

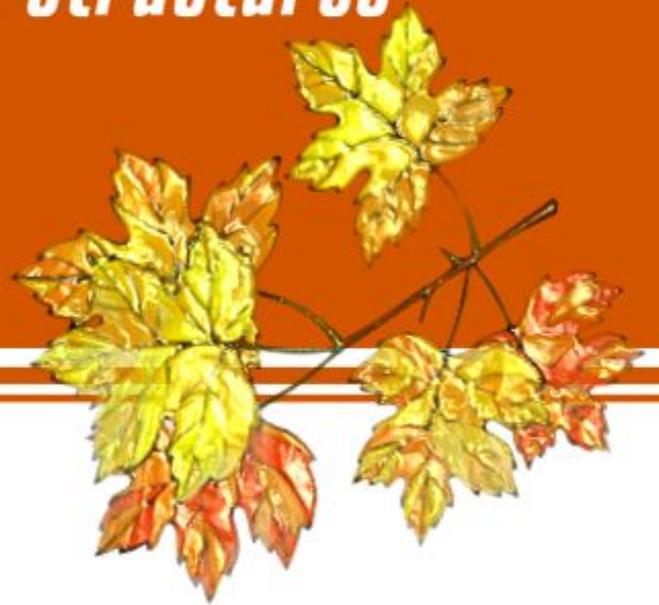
# DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5

# Diagnostics, Resource and Mechanics *of materials and structures*



**5, 2020**  
September-October

<http://dream-journal.org>



Editor-in-Chief: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)  
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**, **Sergey V. Gladkovsky**

## Editorial Council

Chairman: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)

**Anatoly A. Burenin** (Russia)  
**Irina G. Goryacheva** (Russia)  
**Janez Grum** (Slovenia)  
**Mikhail P. Lebedev** (Russia)  
**Leopold I. Leontiev** (Russia)  
**Evgeny V. Lomakin** (Russia)  
**Valery P. Matveenko** (Russia)  
**Nikolay A. Makhutov** (Russia)  
**Mitko M. Mihovski** (Bulgaria)  
**Nikita F. Morozov** (Russia)  
**Vladimir V. Moskvichev** (Russia)  
**Sergey V. Panin** (Russia)  
**Vasily M. Fomin** (Russia)  
**Shao Wen-zhu** (China)

## Editorial Board

**Boris V. Artemyev** (Moscow)  
**Vladimir A. Bataev** (Novosibirsk)  
**Aleksandr K. Belyaev** (St.-Peterburg)  
**Vera V. Berezovskaya** (Ekaterinburg)  
**Sergey V. Burov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir O. Vaskovsky** (Ekaterinburg)  
**Dmitry I. Vichuzhanin** (Ekaterinburg)  
**Mladen N. Georgiev** (Sofia, Bulgaria)  
**Vladimir G. Degtyar** (Miass)  
**Igor G. Emelyanov** (Ekaterinburg)  
**Sergey M. Zadvorkin** (Ekaterinburg)  
**Alexander G. Zalazinsky** (Ekaterinburg)  
**Anatoly V. Konvalov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir N. Kostin** (Ekaterinburg)  
**Aleksey V. Makarov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir A. Mironov** (Ekaterinburg)  
**Radik R. Mulyukov** (Ufa)  
**Vitaly V. Muravyov** (Izhevsk)  
**Aleksandr P. Nichipuruk** (Ekaterinburg)  
**Oleg A. Plekhov** (Perm)  
**Anna M. Povlotskaya** (Ekaterinburg)  
**Evgenii Yu. Prosviryakov** (Ekaterinburg)  
**Nataliya B. Pugacheva** (Ekaterinburg)  
**Igor Yu. Pyshmintsev** (Chelyabinsk)  
**Anatoly B. Rinkevich** (Ekaterinburg)  
**Roman A. Savray** (Ekaterinburg)  
**Alexander S. Smirnov** (Ekaterinburg)  
**Yury V. Subachev** (Ekaterinburg)  
**Alexander I. Ulyanov** (Izhevsk)  
**Yulia V. Khudorozhkova** (Ekaterinburg)

**Elena E. Verstakova**, editor of the English translation  
**Irina M. Tsiklina**, editor of Russian texts  
**Anna V. Garieva**, maker-up  
**Galina V. Torlopova**, associate editor  
**Raul N. Shakirov**, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,  
Ekaterinburg, Russian Federation  
phone: +7 (343) 375-35-83,  
fax: +7 (343) 374-53-30  
e-mail: [dream-journal@mail.ru](mailto:dream-journal@mail.ru)  
<http://dream-journal.org>



**Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович** – академик РАН, д.т.н.  
Заместители главного редактора: **Сергей Витальевич Смирнов**, д.т.н.; **Сергей Викторович Гладковский**, д.т.н.

Редакционный совет:

**Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович**, академик РАН, д.т.н. (Россия)

**Буренин Анатолий Александрович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Горячева Ирина Георгиевна**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Грум Янез**, Ph.D, (Республика Словения)  
**Лебедев Михаил Петрович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Леонтьев Леопольд Игоревич**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Ломакин Евгений Викторович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Матвеев Валерий Павлович**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Махутов Николай Андреевич**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Миховски Митко Минков**, д.т.н. (Республика Болгария)  
**Морозов Никита Федорович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Москвичев Владимир Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Панин Сергей Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Фомин Василий Михайлович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Шао Вэнь-чжу**, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – **Горкунов Эдуард Степанович**, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Смирнов Сергей Витальевич**, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Гладковский Сергей Викторович**, д.т.н. (Екатеринбург)

**Артемьев Борис Викторович**, д.т.н., (Москва)  
**Батаев Владимир Андреевич**, д.т.н. (Новосибирск)  
**Беляев Александр Константинович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)  
**Березовская Вера Владимировна**, д.т.н., (Екатеринбург)  
**Буров Сергей Владимирович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Васьковский Владимир Олегович**, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Вичужанин Дмитрий Иванович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Георгиев Младен Николов**, д.т.н. (София, Республика Болгария)  
**Дегтярь Владимир Григорьевич**, академик РАН, д.т.н. (Миасс)  
**Емельянов Игорь Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Задворкин Сергей Михайлович**, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Залазиский Александр Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Коновалов Анатолий Владимирович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Костин Владимир Николаевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Макаров Алексей Викторович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Миронов Владимир Александрович**, д.м.н. (Екатеринбург)  
**Мулюков Радик Рафикович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)  
**Муравьев Виталий Васильевич**, д.т.н. (Ижевск)  
**Ничипурук Александр Петрович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Плехов Олег Анатольевич**, д.ф.-м.н. (Пермь)  
**Поволоцкая Анна Моисеевна**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Просвиряков Евгений Юрьевич**, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Пугачева Наталия Борисовна**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Пышминцев Игорь Юрьевич**, д.т.н. (Челябинск)  
**Ринкевич Анатолий Брониславович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Саврай Роман Анатольевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Смирнов Александр Сергеевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Субачев Юрий Владимирович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Ульянов Александр Иванович**, д.т.н. (Ижевск)  
**Худорожкова Юлия Викторовна**, к.т.н. (Екатеринбург)

**Верстакова Елена Евгеньевна** – редактор перевода текста на английский язык  
**Циклина Ирина Михайловна** – редактор текста  
**Гариева Анна Валерьевна** – верстальщик текста  
**Торлопова Галина Викторовна** – помощник редактора  
**Шакиров Рауль Нурович**, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН  
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30  
e-mail: dream-journal@mail.ru  
http://dream-journal.org



## CONTENTS

<b>Lukin N. A. and Rubin L. S.</b> A precision low-frequency analog-to-digital converter for advanced systems of technical diagnostics and nondestructive testing .....	6
<b>Kurilin S. P. and Sokolov A. M.</b> Formation of a system of indicators for evaluating the characteristics of asynchronous electric motors at their life cycle stages .....	17
<b>Kazakov A. L., Spevak L. F., Spevak E. L.</b> On numerical methods for constructing benchmark solutions to a nonlinear heat equation with a singularity .....	26
<b>Pegov V. I. and Moshkin I. Yu.</b> Applying an updated method of markers to defining transient force impact under multiphase flowing .....	45
<b>Anakhov S. V., Guzanov B. N., Pugacheva N. B., Bykova T. M., and Matushkin A. V.</b> The influence of the constructive features of the plasmotron on the quality of the cut during air-plasma cutting of sheet metals .....	58

**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Лукин Н. А., Рубин Л. С.</b> Прецизионный низкочастотный преобразователь «аналог–код» для перспективных систем технической диагностики и неразрушающего контроля .....	6
<b>Курилин С. П., Соколов А. М.</b> Формирование системы показателей для оценки характеристик асинхронных электродвигателей на этапах жизненного цикла .....	17
<b>Казаков А. Л., Спевак Л. Ф., Спевак Е. Л.</b> О численных методах построения эталонных решений для нелинейного уравнения теплопроводности с особенностью .....	26
<b>Пегов В. И., Мошкин И. Ю.</b> Применение модернизированного метода маркеров для определения нестационарного силового воздействия при многофазном обтекании .....	45
<b>Анахов С. В., Гузанов Б. Н., Пугачева Н. Б., Быкова Т. М., Матушкин А. В.</b> Влияние конструктивных особенностей плазмотрона на качество реза при воздушно-плазменном раскрое листовых металлов .....	58



**Received:** 13.08.2020  
**Revised:** 11.09.2020  
**Accepted:** 09.10.2020  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.5.006-016

## A PRECISION LOW-FREQUENCY ANALOG-TO-DIGITAL CONVERTER FOR ADVANCED SYSTEMS OF TECHNICAL DIAGNOSTICS AND NONDESTRUCTIVE TESTING

N. A. Lukin<sup>a)</sup> and L. S. Rubin<sup>b)\*</sup>

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

<sup>a)</sup>  <http://orcid.org/0000-0001-6326-217X>;

<sup>b)</sup>  [rubin281@yandex.ru](mailto:rubin281@yandex.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [rubin281@yandex.ru](mailto:rubin281@yandex.ru)

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation  
Tel.: +7 (919) 387 15 31

The main results of the development of a precision low-current meter based on a nonlinear ADC are presented. It is shown that the application of the method of nonlinear analog-to-digital conversion and a controlled voltage level at the non-inverting input of an integrating operational amplifier allows both high sensitivity and a wide dynamic range with a small spread of output codes. The use of the laboratory sample of the meter for cyclic tensile testing of steel specimens is described.

**Keywords:** nonlinear analog-to-digital converter, nanoampere current meter, integrating operational amplifier, magnetostriction measurement.

### References

1. Aaltonen L. Integrated Interface Electronics for Capacitive MEMS Inertial Sensors, *Doct. Diss., Aalto Univ., Sc. Sci. Tech., Fac. Electr., Comm. Autom., Dep. Micro Nanosci.*, 2010, 152 p.
2. Boyden E., Rifai O.El., Hubert B., Karpman M., Roberts D. A High-Performance Tunneling Accelerometer. *MIT Term Project Paper 6.777*, Introduction to Microelectromechanical Systems, Spring, 1999, 58p.
3. Osaki Yuji, Hirose Tetsuya, Kuroki Nobutaka, and Numa Masahiro. Temperature-Compensated Nano-Ampere Current Reference Circuit with Subthreshold Metal–Oxide–Semiconductor Field-Effect Transistor Resistor Ladder. *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 50, no. 4S, pp. 04DE08–1–6. DOI: 10.1143/JJAP.50.04DE08.
4. Linares-Barranco B., Serrano-Gotarredona T., Serrano-Gotarredona R., Serrano-Gotarredona C. Current Mode Techniques for Sub-pico-Ampere Circuit Design. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 2004, 38, pp. 103–119.
1. Digital processors limited by power; what's the upside? Available at: <https://phys.org/news/2012-08-digital-processors-limited-power-upside.html>
5. Gelman M.M. *Sistemnye analogo-tsifrovye preobrazovateli i protsessory signalov* [System Analog-to-Digital Converters and Signal Processors]. Moscow, Mir Publ., 1999, 559 p. (In Russian).
6. Lukin N.A., Rubin L.S. Using nonlinear functional analog-to-digital conversion for precision measurements of small electrical quantities in real time. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2014, no. 4 (87), pp. 131–141. (In Russian).

7. Integrating analog-to-digital converter for measuring small electrical signals. *Patent RF* 2693647 C1, 2019. (In Russian).
8. Gorkunov E.S., Povolotskaya A.M., Zadvorkin S.M., Putilova E.A., Mushnikov A.N., Bazulin E.G., Vopilkin A.K. Some features in the behavior of magnetic and acoustic characteristics of hot-rolled 08G2B steel under cyclic loading. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2019, vol. 55, no. 11, pp. 827–836.

Подана в журнал: 13.08.2020  
УДК 681.325,621.317.311  
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.006-016

## ПРЕЦИЗИОННЫЙ НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ «АНАЛОГ–КОД» ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ И НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Н. А. Лукин<sup>а)</sup>, Л. С. Рубин<sup>б)</sup>\*

*Институт машиноведения УрО РАН,  
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620049, Российская Федерация*

<sup>а)</sup>  <http://orcid.org/0000-0001-6326-217X>;

<sup>б)</sup>  [rubin281@yandex.ru](mailto:rubin281@yandex.ru)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [rubin281@yandex.ru](mailto:rubin281@yandex.ru)  
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация  
Тел.: 8–919–387–15–31

Приводятся основные результаты разработки прецизионного измерителя малых токов на базе нелинейного аналого-цифрового преобразования (АЦП). Применение разработанного метода и управляемого уровня напряжения на неинвертирующем входе интегрирующего операционного усилителя позволяет одновременно достичь высокой чувствительности и широкого динамического диапазона при малом разбросе выходных кодов. Описано применение лабораторного образца измерителя при циклических испытаниях стальных образцов на растяжение.

**Ключевые слова:** нелинейный аналого-цифровой преобразователь, измеритель наноамперного тока, интегрирующий операционный усилитель, измерение магнитострикции.

### 1. Введение

Развитие методов и средств неразрушающего контроля в настоящее время связано с прогнозированием остаточного ресурса контролируемых объектов, что требует реализации систем технического диагностирования. Современные средства технической диагностики включают в свой состав устройства цифровой обработки сигналов, что требует преобразования выходных сигналов сенсоров в цифровой код. К настоящему времени разработана большая номенклатура разнообразных аналого-цифровых преобразователей, реализованных в виде микросхем.

Можно выделить следующие области применения, в которых в настоящее время сформулированы наиболее жесткие требования к АЦП:

- встроенная электроника микромеханических акселерометров [1, 2];
- системы контроля параметров сверхбольших интегральных схем в процессе их изготовления и эксплуатации [3];
- прецизионные сенсоры для регистрации физических и химических процессов с очень малыми значениями энергии [4].

Кроме того, развитие измерительных систем реального времени выявляет необходимость прецизионного измерения малых электрических параметров. Краткий анализ состояния разработок систем измерения малых параметров в реальном времени [7] показывает, что необходимо обеспечивать выполнение взаимно противоречивых требований:

- необходимо добиваться измерения малых и сверхмалых токов (порядка нано- и пикоампер) с относительной суммарной погрешностью порядка долей, %;

- требуется обеспечивать измерения в динамическом диапазоне до 100 дБ;
- процесс измерения должен производиться в режиме жесткого реального времени;
- необходимо обеспечить измерения одновременно от нескольких разных сенсоров.

Одновременное удовлетворение всем перечисленным требованиям с использованием существующих подходов, основанных на усилении входного сигнала и последующем аналого-цифровом (АЦ)-преобразовании, практически невозможно. Поэтому представляется целесообразным использование функциональных возможностей микроэлектроники, которые могут реализовать на аналоговом уровне первичную обработку входного сигнала с тем, чтобы как минимум существенно упростить АЦ-преобразование. Это направление на современном и будущем этапах развития микроэлектроники в определенной степени возвращает достаточно старые концепции АЦП, которые успешно развивались еще в 50–60-х гг. XX в. во многих научных школах и коллективах разработчиков нашей страны. К таким идеям все чаще приходят исследователи и разработчики современных систем реального времени, когда с помощью чисто цифровых подходов уже не удастся добиться либо высокой точности, либо широкого диапазона изменения измеряемых параметров. В настоящее время в ряде случаев предпринимаются попытки реализовать задачи с помощью аналоговых процессоров. В частности, агентство DARPA начало финансирование разработки экспериментального образца системы наблюдения и разведки на основе оптических сенсоров [5]. В этом проекте прорабатывается вариант использования аналоговых решающих модулей для реализации алгоритмов, которые еще недавно считались чисто «цифровыми» в плане применения элементной базы.

В настоящей статье описаны результаты разработки многоканальной прецизионной измерительной системы сбора данных (ССД), представленных в форме входных токов малой величины, для систем реального времени. АЦП реализуется на основе широко применяемой операции интегрирования. При этом внимание уделяется использованию функциональных возможностей аналоговой электроники с целью уменьшения погрешности измерения и увеличения диапазона измеряемых величин. Операция интегрирования выполняется в течение заданного интервала времени, что ограничивает быстродействие АЦП интегрирующего типа.

## 2. Нелинейная шкала измерений

Измерение малых токов в ответственных применениях всегда связано с необходимостью уменьшить влияние неизбежно присутствующих помех аддитивного характера. С целью снижения влияния этих помех был выбран один из наиболее точных – метод АЦП с двухтактным интегрированием [6]. Суть метода состоит в том, что в первом такте измеряемый входной ток интегрируется на емкости операционного усилителя-интегратора и за определенный заранее отрезок времени преобразуется в уровень напряжения на емкости. Во втором такте производится разряд этой емкости до некоторой заранее заданной величины напряжения на обкладках. При этом изменение напряжения на выходе операционного усилителя-интегратора во втором такте преобразования определяется выбором способа разряда интегрирующей емкости. Высокая точность метода определяется тем, что одна и та же емкость участвует в процессах заряда–разряда, при этом одновременно производится усреднение аддитивной смеси входного тока и помех.

В измерителях с двухтактным интегрированием чаще всего применяются линейные измерительные шкалы. В этом случае для обеспечения большого динамического диапазона измерения, например 100 дВ, необходимо существенно увеличивать напряжение источников питания, что для аппаратуры с автономным питанием нежелательно. Увеличения динамического диапазона измеряемой величины добиваются путем применения нелинейной шкалы, которая реализуется с помощью кусочно-линейной аппроксимации, при которой линейность шкалы с некоторой постоянной крутизной сохраняется на определенном интервале измеряемых величин, а при выходе за этот интервал крутизна шкалы меняется, сохраняя постоянное значение до достижения следующей границы интервала измеряемой величины. Известным

недостатком кусочно-линейной аппроксимации является значительная погрешность измерений в местах переключения интервальных шкал. Это обусловлено наличием так называемой «мертвой» зоны в компараторах, которая увеличивает суммарную погрешность измерений и более существенно зависит от величины внешнего шума, чем погрешность для любой другой точки линейных сегментов приближения нелинейной шкалы. Этому недостатку принципиально лишены гладкие нелинейные шкалы, которые являются одним из предметов рассмотрения в нашей работе.

Для формирования измерительной шкалы используется источник тока разряда емкости интегратора, у которого ток меняется во времени. Вид нелинейности шкалы определяется заранее комбинацией параметров (номиналов) элементов цепи разряда емкости интегратора и изменения тока разряда. Основой функционирования измерителя является нелинейное АЦ-преобразование входных токов в цифровые коды, при этом в качестве функциональной шкалы преобразования в каждом канале измерения выбрана параболическая шкала вида  $N = k(I_{in})^m$ , где  $k$  – масштабный коэффициент,  $I_{in}$  – входной ток [А];  $m < 1$ . В [7] показано, что при любых значениях измеряемого тока выбранная шкала обеспечивает меньшую относительную суммарную погрешность измерения по сравнению с линейным вариантом ( $m = 1$ ), широко используемым в настоящее время.

Применение АЦП интегрирующего типа позволяет не только эффективно снизить влияние аддитивных случайных шумов на разброс выходных кодов, но и заменить цифровое интегрирование входного сигнала при необходимости его дальнейшей обработки. В этом случае удастся избежать погрешностей численных методов интегрирования.

Важное значение имеет борьба с влиянием электромагнитного фона, который практически всегда присутствует при технической диагностике исследуемых объектов в реальных условиях их эксплуатации. Электромагнитный фон влияет на входные цепи измерителей малых электрических сигналов, действуя как аддитивная помеха. Для снижения этого влияния дополнительно к двухтактному интегрированию применен компенсационный метод. Суть компенсационного метода состоит в том, что создается электрическая цепь, симметричная входной цепи измерительного устройства, а на ее выходе формируется электрический сигнал, вызванный только действием электромагнитного фона, и этот сигнал затем вычитается из смеси сигнала и помехи на входе измерительных цепей преобразователя «ток–код». Структурная схема АЦП интегрирующего типа с параболической функциональной шкалой, реализующая компенсационный метод подавления влияния электромагнитного фона, приведена в [8]. Эффективность компенсационного метода целиком определяется примененной электрической схемой входных цепей измерителя.

### 3. Макет нелинейного преобразователя «аналог–код»

С целью подтверждения эффективности предложенного способа преобразования на основе результатов работ по компьютерному моделированию алгоритмических и схемотехнических решений был создан макет 4-канального преобразователя «наноамперный ток–код» с нелинейной шкалой преобразования. На рис. 1 приведена структурная схема 4-канального преобразователя «наноамперный ток–код».

Структурная схема состоит из аналоговой и цифровой частей. Аналоговая часть содержит четыре измерительные ячейки и общий для всех ячеек генератор пилообразного напряжения. На выходе каждого канала формируется короткий импульс, временное положение которого определяется интегралом от измеряемого электрического тока. Цифровая часть разработана на основе стандартной платы STM32L-Discovery. В цифровой части формируются все служебные сигналы, необходимые для организации двухтактного интегрирующего преобразования входного тока во временное положение импульса, а также преобразования временного положения импульса в цифровой код, который через USB-разъем поступает в память подключаемого через этот разъем компьютера.



Рис. 1. Структурная схема 4-канального преобразователя «наноамперный ток–код»

На рис. 2 представлена функциональная схема одного канала преобразователя «аналог–временной интервал», на рис. 3 приведены временные диаграммы, поясняющие ее функционирование. Работа схемы осуществляется циклами длительностью 10 мс. Каждый цикл состоит из двух тактов: первый такт длится 3,5 мс, второй – 6,5 мс (рис. 3 а). Соответствующие управляющие импульсы от микропроцессора поступают на контакт ЗАПУСК. Входной измеряемый ток через контакт ВХОДНОЙ ТОК и цепь заряда емкости заряжает емкость  $C$  в течение всего первого такта. Операционный усилитель (ОУ) и включенная параллельно ему емкость  $C$  являются интегратором, поэтому выходное напряжение ОУ линейно изменяется во времени (рис. 3 б), а на емкости  $C$  накапливается электрический заряд.

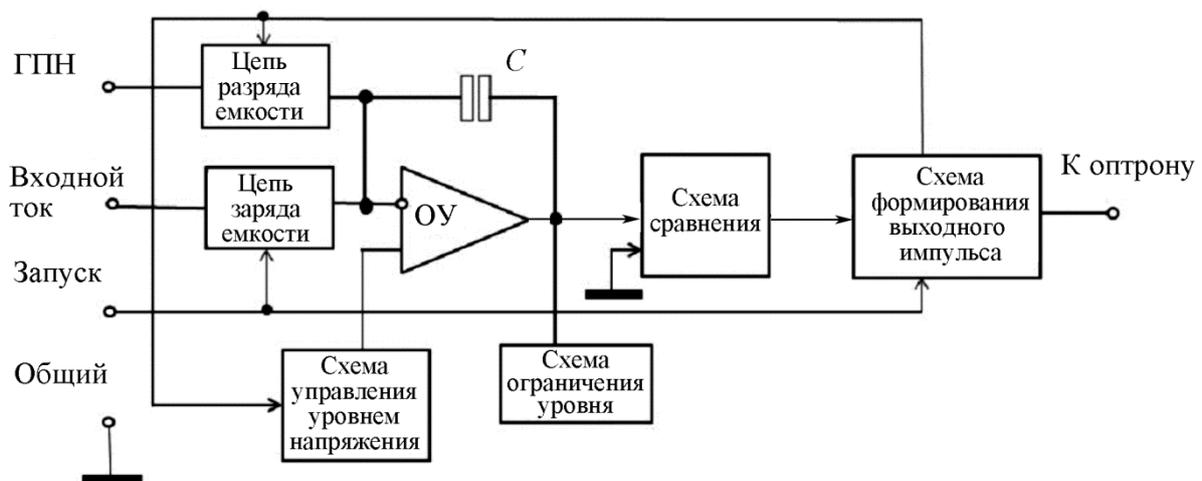


Рис. 2. Функциональная схема одного канала преобразователя «аналог–временное положение импульса» аналоговой части макета

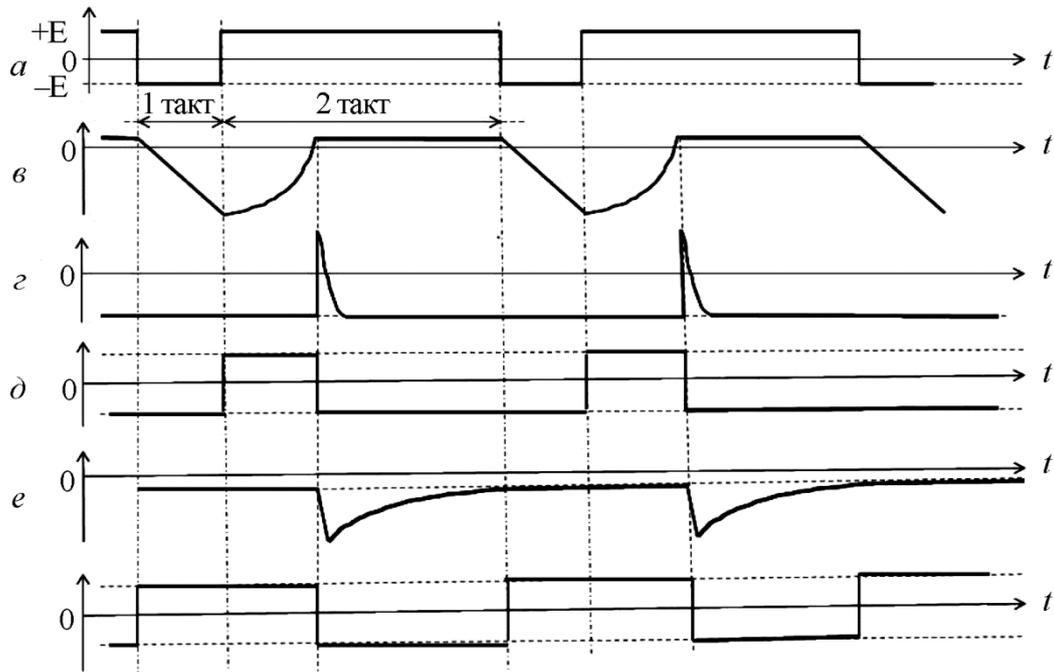


Рис. 3. Временные диаграммы напряжений в разных точках функциональной схемы рис. 2

По окончании управляющего импульса ЗАПУСК начинается второй такт преобразования, цепь заряда емкости прерывает поступление входного тока на заряд емкости  $C$ , которая начинает разряжаться через цепь разряда. Величина тока разряда емкости  $C$  определяется напряжением, формируемым на контакте ГПН, соединенным через резистор с выходом генератора пилообразного напряжения (рис. 1). Это и обеспечивает нелинейность разряда емкости, при этом  $m = 0,5$ .

К выходу ОУ подключены схема сравнения и схема ограничения уровня. Схема сравнения находится в режиме ожидания до тех пор, пока процесс разряда емкости  $C$  не приведет к тому, что уровень напряжения на выходе ОУ становится сравнимым с постоянным уровнем, который подается в схеме макета на контакт ОБЩИЙ. Момент сравнения зависит от уровня напряжения, до которого зарядилась емкость интегратора к концу первого такта преобразования, и от величины скорости изменения тока разряда.

Этот момент фиксируется схемой сравнения, которая формирует на выходе импульс положительной полярности (рис. 3 в). Этим импульсом запускается схема формирования выходного сигнала, при этом:

1) формируется выходной импульс канального преобразователя «ток – временной интервал», электрически согласованный с входными цепями микропроцессора цифровой части макета, и поступающий на выходной контакт К ОПТРОНУ;

2) формируется импульсный сигнал, управляющий подключением генератора пилообразного напряжения через цепь разряда емкости к емкости  $C$  (рис. 3 г), передний фронт которого совпадает с окончанием первого такта преобразования, а задний фронт во времени совпадает с выходным импульсом схемы сравнения (рис. 3 в). Этот же импульсный сигнал используется для управления схемой управления уровнем напряжения;

3) синхронизируется схема формирования выходного сигнала импульсом ЗАПУСК.

Работу схемы ограничения уровня и схемы управления уровнем напряжения рассмотрим совместно. Схема управления уровнем напряжения подстраивает уровень напряжения на неинвертирующем входе ОУ. Стандартные схемы включения ОУ в режиме интегратора предполагают постоянство напряжения на неинвертирующем входе. Обычно это нулевой уровень относительно напряжений источников питания, в функциональной схеме он уста-

новлен на контакте ОБЩИЙ. Однако такое включение не позволяет использовать свойство ОУ подавлять синфазные помехи, если они одновременно присутствуют на инвертирующем и неинвертирующем входах ОУ. Для обеспечения такой возможности необходимо изменить схему подключения неинвертирующего входа, что и осуществляется схемой управления уровнем напряжения.

В основе действия схемы управления лежит подключение к неинвертирующему входу запоминающей емкости, на которой формируется и запоминается электрический потенциал. Поскольку в ОУ всегда обеспечивается линейный режим работы, то потенциал, устанавливающийся на неинвертирующем входе, с высокой точностью повторяется на инвертирующем входе. При этом выходной импульс канального преобразователя формируется в момент времени, который наступает после начала второго такта преобразования даже в том случае, если входной ток равен нулю. Это обеспечивает величину нижней границы динамического диапазона измерения, которая в цифровой форме на цифровом выходе преобразователя отображается ненулевым кодом.

Сигнал на неинвертирующем входе ОУ показан на рис. 3 д. В схеме управления уровнем напряжения формируется небольшой отрицательный уровень на интервале времени от начала первого такта до момента сравнения (рис. 3 е). В течение этого отрезка времени на запоминающей емкости устанавливается небольшой неизменный отрицательный потенциал, который повторяется на инвертирующем входе, что добавляет к входному току некоторый постоянный ток, который и обеспечивает ненулевой код при нулевом входном токе.

Схема сравнения формирует импульс в момент превышения сигналом на выходе ОУ нулевого уровня, который затем фиксируется схемой ограничения уровня до момента начала первого такта следующего цикла преобразования. Фиксация уровня на выходе ОУ позволяет стабилизировать остаточный заряд емкости  $C$  до начала первого такта любого цикла преобразования, а также обеспечивает линейный режим работы ОУ во втором такте преобразования от момента сравнения до начала первого такта преобразования следующего цикла.

От момента формирования импульса сравнения до начала первого такта следующего цикла преобразования в схеме управления уровнем напряжения разблокируются цепи «заряда–разряда» запоминающей емкости. В результате напряжение на неинвертирующем входе изменяется, немного снижаясь в отрицательную область в начале процесса перезаряда запоминающей емкости, а затем плавно изменяясь до уровня, который был в начале первого такта преобразования. К началу первого такта второго цикла преобразования потенциал на неинвертирующем входе восстанавливается. Поскольку режим работы ОУ линейен, то это обеспечивает постоянство и практическое равенство уровней на неинвертирующем и инвертирующем входах ОУ в течение всего времени «заряда–разряда» емкости в любом цикле преобразования. Это позволяет электрические цепи, контактирующие с инвертирующим и неинвертирующим входами ОУ, выполнить симметрично и реализовать свойство дифференциального входа ОУ подавления синфазных помех.

#### 4. Экспериментальные исследования макета нелинейного АЦП

Разработанный макет был испытан в нормальных условиях с целью выявления параметров разброса выходных кодов в диапазоне изменения входного тока от 0 до 1000 нА. В качестве источника тока наноамперного диапазона использовался источник-измеритель Keithley 2450. Входной ток задавался в виде ступенчато изменяющегося тока, время экспозиции каждой ступени, в течение которого входной ток не менялся, составляло около 5 с. Выходные коды в виде текстового файла через USB разъем поступали в компьютер, в котором на экране монитора отображались в виде точек, показывающих изменения выходного кода  $i$ -го канала во времени. В каждом массиве кодов, соответствующем заданной ступени входного тока вычислялись среднее значение и стандартное отклонение. Разброс выходных кодов определяется наличием внешних помех, действующих на входные цепи преобразователя, среди которых всегда присутствует

флуктуационный шум, и несовершенством работы электрической схемы, которое связано с шумами, генерируемыми элементами электрической схемы. Результаты преобразования токов в диапазоне от 0 до 1000 нА в код для одного из каналов приведены в таблице.

Цифровые данные, полученные на выходе одного канала преобразователя АЦ-ФАП при ступенчатом изменении входного измеряемого тока

№ п.п.	Величина входного тока, нА	Среднее значение цифрового отсчета, М	Стандартное отклонение, Δ	Относительное значение стандартного отклонения от среднего значения, Δ/М, %	Время экспозиции, сек
1	0	1220,8	2,701	0,221	5,0
2	1	1677,9	1,748	0,104	4,8
3	2	2023,6	1,451	0,072	4,9
4	4	2567,7	1,191	0,046	5,1
5	8	3388,4	0,963	0,028	4,9
6	16	4590,4	0,749	0,016	5,0
7	32	6330,4	0,542	0,009	4,7
8	64	8821,7	0,498	0,006	4,9
9	128	12374,3	0,442	0,004	4,8
10	256	17432,4	0,464	0,003	4,9
11	512	24639,4	0,472	0,002	5,0
12	1000	34559,8	0,384	0,001	4,9

Из приведенных в таблице данных следует, что влияние флуктуационных шумов на стандартное отклонение от среднего значения при нелинейной шкале, аппроксимируемой степенной функцией с показателем степени  $m$ , близким к 0,5, с увеличением входного тока уменьшается. При этом в области малых значений входного тока стандартное отклонение относительно среднего значения выходного кода не превышает 0,22 % , а на верхней границе динамического диапазона стандартное отклонение составляет 0,001 % от среднего значения выходного кода. Разрешающая способность в начале шкалы не больше 10 пА.

Для оценки устойчивости работы электрической схемы производилось измерение стабильности выходных кодов преобразователя при ступенчатом изменении величины входного тока непрерывно в течение 14 ч работы преобразователя в нормальных условиях.

Результаты исследований функционирования макета аналого-цифрового преобразователя с нелинейной шкалой показали, что преобразование токов наноамперного диапазона в цифровые коды в нормальных условиях осуществляется с высокой стабильностью, которая характеризуется разбросом выходных кодов при неизменном входном сигнале во всем измеряемом наноамперном диапазоне не более 0,1 % от величины выходного кода.

Поскольку исследуемый макет содержит 4 одинаковых канала преобразования, была произведена оценка межканальных помех для двух вариантов включения каналов:

1. На входы трех каналов подавался нулевой входной ток, а на вход 4-го канала – меандр с входным током 0 нА и 1000 нА и периодом 900 мс.

2. На вход одного канала – нулевой входной ток, а на 3 других входа подавался один и тот же сигнал в виде меандра с входным ток 0 нА и 1000 нА и периодом 900 мс.

В обоих вариантах обнаружить влияние меандра на выходные коды каналов с нулевым входным током не удалось.

## 5. Применение нелинейного измерителя малых токов для исследования магнитострикции

Разработанный макет преобразователя «наноамперный ток–код» был применен для исследования конструкционных материалов, которые предварительно подвергались длительным циклическим механическим воздействиям на растяжение. В частности, проводилось измерение магнитострикции сталей, применяемых для изготовления трубопроводов, крупногабаритных корпусов, в которых относительное изменение размеров из-за влияния магнитострикции составляет  $10^{-6}$  [9].

В процессе измерений осуществляли запись выходных кодов одного канала макета 4-канального преобразователя «ток–код», подключенного через согласующий каскад, имеющий дифференциальный вход и недифференциальный выход, к *тензорезистивному* мосту, а на второй канал макета подавался сигнал от потенциалметра.

Выходные коды макета АЦП регистрировали в виде последовательности кодов во времени с дискретом 10 мс, а изменение кодов во времени непосредственно использовано для оценки относительного изменения продольных и поперечных размеров образцов при изменении магнитного поля.

Результаты измерения магнитострикции с использованием преобразователя «наноамперный ток–код» показывают:

- разработанный и описанный в данной работе АЦП с нелинейной шкалой преобразования позволяет получить малые разбросы измерений – средние относительные разбросы значений цифровых кодов за все время составили не более 7 %;
- чувствительность АЦП имеет порядок  $10^{-10}$  А, что обеспечивает измерение изменения сопротивления тензомоста 400 Ом с разрешающей способностью порядка  $10^{-4}$  Ом.

## 6. Выводы

1. Разработанный макет 4-канального преобразователя «наноамперный ток–код» позволяет регистрировать наблюдаемые параметры в динамическом диапазоне не менее 60 дБ с малыми разбросами выходных кодов в реальном времени.

2. Высокие характеристики преобразования достигнуты применением нелинейной шкалы преобразования, модель которой представляет степенную функцию с показателем степени, меньше единицы, и примененной схемой включения входов интегрирующего операционного усилителя, позволяющей использовать его свойство подавления синфазных сигналов.

3. Выбранная модель нелинейной шкалы позволяет уменьшить влияние флуктуационных шумов и нестабильной работы элементов электрической схемы преобразователя на разброс его выходных кодов.

## Литература

1. Aaltonen L. Integrated Interface Electronics for Capacitive MEMS Inertial Sensors : Doct. Diss. – Aalto Univ., Sc. Sci. Tech., Fac. Electr., Comm. Autom., Dep. Micro Nanosci. – 2010. – 152 p.
2. A High-Performance Tunneling Accelerometer / E. Boyden, O. El. Rifai, B. Hubert, M. Karpman, D. Roberts // Term Project 6.777, Introduction to Microelectromechanical Systems / MIT Media Lab. – Spring, 1999. – 58 p.
3. Temperature-Compensated Nano-Ampere Current Reference Circuit with Subthreshold Metal–Oxide–Semiconductor Field-Effect Transistor Resistor Ladder / Yuji Osaki, Tetsuya Hirose, Nobutaka Kuroki, and Masahiro Numa // Jpn. J. Appl. Phys. – Vol. 50, no. 4S. – P. 04DE08-1–6. – DOI: 10.1143/JJAP.50.04DE08.

4. Current Mode Techniques for Sub-pico-Ampere Circuit Design / B. Linares-Barranco, T. Serrano-Gotarredona, R. Serrano-Gotarredona, C. Serrano-Gotarredona // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. – 2004. – Vol. 38. – P. 103–119.
5. Digital processors limited by power; what's the upside? – URL: <https://phys.org/news/2012-08-digital-processors-limited-power-upside.html>
6. Гельман М. М. Системные аналого-цифровые преобразователи и процессоры сигналов. – М. : Мир, 1999. – 559 с.
7. Лукин Н. А., Рубин Л. С. Применение нелинейного функционального аналого-цифрового преобразования для прецизионных измерений малых электрических величин в реальном времени // Гироскопия и навигация. – 2014. – № 4 (87) – С. 131–141.
8. Аналого-цифровой преобразователь интегрирующего типа для измерения малых электрических сигналов : пат. 2693647 С1 Рос. Федерация / Лукин Н.А., Рубин Л. С. – № 20181056452019 ; заявл. 14.02.2018 ; опубл. 03.07.2019, Бюл. 19.
9. Some features in the behavior of magnetic and acoustic characteristics of hot-rolled 08G2B steel under cyclic loading / E. S. Gorkunov, A. M. Povolotskaya, S. M. Zadvorkin, E. A. Putilova, A. N. Mushnikov, E. G. Bazulin, A. K. Vopilkin // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2019. – Vol. 55, no. 11. – P. 827–836.



**Received:** 09.08.2020  
**Revised:** 22.09.2020  
**Accepted:** 16.10.2020  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.5.017-025

## FORMATION OF A SYSTEM OF INDICATORS FOR EVALUATING THE CHARACTERISTICS OF ASYNCHRONOUS ELECTRIC MOTORS AT THEIR LIFE CYCLE STAGES

S. P. Kurilin<sup>1, a)\*</sup> and A. M. Sokolov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Smolensk Branch of the National Research University "Moscow Power Engineering Institute"  
1, Energeticheskiy Dr., Smolensk, 2014013, Russian Federation

<sup>2</sup>National Research University "Moscow Power Engineering Institute",  
14, Krasnokazarmennaya St., Moscow, 111250, Russian Federation

a)  <https://orcid.org/0000-0001-7843-275X>  kurilinsp@inbox.ru

\*Corresponding author. E-mail: kurilinsp@inbox.ru

Address for correspondence: Energeticheskiy pr., 1, Smolensk, 2014013, Russian Federation  
Tel.: +7 910 712 88 36

The article focuses on the development and formation of a system of indicators for assessing the characteristics of asynchronous electric motors (AEMs) at various life cycle stages. The problem is solved on the basis of the topological approach to the analysis of heterogeneous electromechanical systems. The life cycle of AEM and the tasks of its information support are described. The flows of diagnostic information are analyzed. Indicators for assessing the health of AEDs at various stages of their life cycle are proposed.

**Keywords:** asynchronous electric motor, life cycle, operational states, topological approach, indicators of motor health.

### Acknowledgment

*The study was performed under the state assignment (project No. FSWF-2020-0019) and financially supported by the RFBR as part of project No. 20-01-00283.*

### References

1. Vol'dek A.I. *Elektricheskie mashiny* [Electrical Machines]. 3rd ed., Moscow, Al'yans Publ., 2017, 832 p. (In Russian).
2. Gol'dberg O.D., Makarov L.N., Khelemskaya S.P. *Inzhenernoe proektirovanie elektricheskikh mashin* [Engineering Design of Electrical Machines]. Moscow, Izdat. Dom «Basted» Publ., 2016, 528 p. (In Russian).
3. Kurilin S.P., Denisov V.N. *Topologicheskie aspekty teorii asinkhronnykh elektricheskikh mashin* [Topological Aspects of the Theory of Asynchronous Electrical Machines]. Smolensk, Universum Publ., 2019, 200 p. (In Russian).
4. Borisov V.V., Kurilin S.P., Chernovalova M.V. Topologicheskii podkhod k issledovaniyu neodnorodnykh elektromekhanicheskikh system. In: *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh: sb. tr. mezhdunar. nauch. konf.* [Mathematical Methods in Engineering and Technology: Proceedings of the International Scientific Conference]. St. Petersburg, Politekhn. Un-t Publ., 2020, vol. 7, pp. 96–99. (In Russian).

5. Kurilin S.P., Denisov V.N., Fedulov A.S., Dli M.I. Scientific basis of methods for topological diagnostics of asynchronous electric machines. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2053, pp. 030031. DOI: 10.1063/1.5084392.
6. Kurilin S.P., Denisov V.N. The Development of Topological Diagnostic Methods of Asynchronous Electric Machines. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 214–221. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.214-221. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_185.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_185.html)
7. Kurillin S.P., Denisov V.N., Dli M.I., Bobkov V.I. Vector space as an area of the operation risks characteristics for asynchronous electric machines. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2019, vol. 1260, pp. 052017. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/5/052017.
8. Kurilin S.P., Denisov V.N., Dli M.I., Bobkov V.I. A method for the operational diagnostics of induction motors. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2176, pp. 040008. DOI: 10.1063/1.5135157. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_185.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_185.html)

Подана в журнал: 09.08.2020  
УДК 621.313.333:(512+514.1+515.1)  
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.017-025

## ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ НА ЭТАПАХ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

С. П. Курилин<sup>1)\*</sup>, А. М. Соколов<sup>2)</sup>

<sup>1</sup>Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске,  
1, Энергетический пр., Смоленск, 214013, Российская Федерация  
<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»,  
14, ул. Красноказарменная, Москва, 111250, Российская Федерация

а)  <https://orcid.org/0000-0001-7843-275X>  [kurilinsp@inbox.ru](mailto:kurilinsp@inbox.ru)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [kurilinsp@inbox.ru](mailto:kurilinsp@inbox.ru)  
Адрес для переписки: д. 1, Энергетический пр., г. Смоленск, 214013, Российская Федерация,  
Тел.: +7-910-712-88-36

Статья посвящена выработке и формированию системы показателей для оценки характеристик асинхронных электродвигателей (АЭД) на различных этапах жизненного цикла. Задача решается на основе топологического подхода к анализу неоднородных электромеханических систем. Описывается жизненный цикл АЭД и задачи его информационного сопровождения. Представлены потоки диагностической информации. Предложены показатели для оценки технического состояния АЭД на различных этапах жизненного цикла.

**Ключевые слова:** асинхронный электродвигатель, жизненный цикл, эксплуатационные состояния, топологический подход, показатели технического состояния.

### 1. Введение

Асинхронные электродвигатели (АЭД) характеризуются массовым применением и входят в состав большинства технических систем. О широте их применения свидетельствует тот факт, что эксплуатируемый в настоящее время парк АЭД Российской Федерации имеет мощность порядка 70 млн кВт.

Применяемые в настоящее время показатели технического и энергетического качества АЭД, такие как КПД и коэффициент мощности [1, 2], предполагают параметрическую однородность объекта. К тому же они являются зависимыми, т. е. характеризуют как техническое состояние самого объекта, так и режим его эксплуатации. Вместе с тем по своим физическим и параметрическим характеристикам АЭД является неоднородной электромеханической системой.

Отметим, что у параметрически неоднородного электродвигателя могут быть и однородные эксплуатационные состояния. При этом сам асинхронный электродвигатель как физико-техническая система параметрически неоднороден. Подтверждением этого, в частности, является факт различных входных сопротивлений электродвигателя для токов прямой и нулевой последовательностей. Параметрическая неоднородность, в основе которой лежит физическая неоднородность устройства, может проявляться или не проявляться, но она внутренне присуща электромеханической системе и неотъемлема от нее.

Значение факторов качественного проектирования и регулярной эксплуатационной диагностики в повышении технического уровня и надежности технических систем весьма высоко. Это связано с укрупнением технических систем, высокой степенью их интегрированности и с повышением их роли в экономической жизни страны. В полной мере это отно-

сится к качественному проектированию и эксплуатационной диагностике АЭД, которые в значительной мере определяют технический уровень, надежность и живучесть технических систем. При этом ключевую роль играют, во-первых, система показателей для оценки характеристик АЭД на различных этапах жизненного цикла, во-вторых, методы и способы их мониторинга, производимого по ходу эксплуатации. В этих аспектах факт параметрической неоднородности электродвигателя, проявляющийся по мере его эксплуатационного старения, является существенным.

## 2. Постановка задачи и методы решения

Задачей исследования является выработка и формирование системы показателей для оценки характеристик асинхронных электродвигателей на различных этапах жизненного цикла. Разрабатываемые показатели должны быть независимыми от внешних воздействий, т. е. должны отображать само изделие, а не режим его эксплуатации.

Поставленная задача решается методами, способами и средствами, присущими топологическому подходу к анализу неоднородных электромеханических систем [3–5]. В соответствии с ним разрабатываемые показатели отображают состояние векторного пространства АЭД и те изменения, которые в нем происходят в связи с эксплуатационным старением изделия.

## 3. Результаты и обсуждение

### 3.1. Жизненный цикл АЭД

В жизненном цикле АЭД выделяются фазы проектирования, изготовления и эксплуатации изделия. На протяжении фазы эксплуатации состояния АЭД изменяются от эталонного состояния, имеющего место в момент выпуска с производящего предприятия, до предельного состояния, имеющего место в момент прекращения эксплуатации. Фазы жизненного цикла и эксплуатационные состояния АЭД на оси времени жизненного цикла представлены на рис. 1.

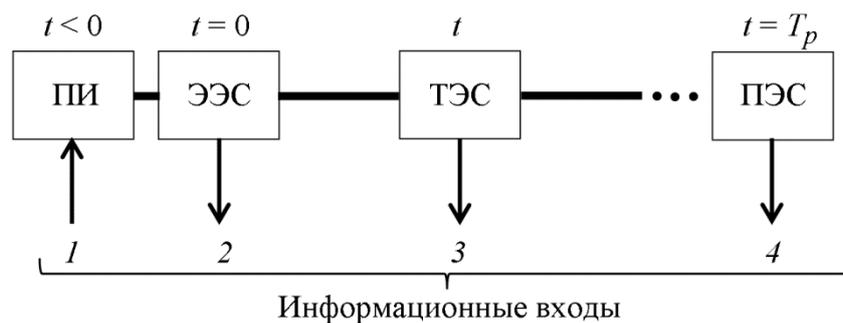


Рис. 1. Фазы жизненного цикла и эксплуатационные состояния АЭД

Здесь ПИ – фаза проектирования и изготовления изделия, имеющая место до начала эксплуатации АЭД. По информационному входу 1 поступают обработанные данные диагностических тестирований и учетные данные эксплуатируемых АЭД. ЭЭС – эталонное эксплуатационное состояние, в котором все технические показатели АЭД соответствуют требованиям нормативно-технической документации, а само изделие полностью работоспособно. ЭЭС соответствует моменту  $t = 0$  завершения выходных испытаний и начала эксплуатации АЭД. По входу 2 в процессе выходных испытаний снимается информация об эталонном техническом состоянии изделия. Вероятность работоспособности для ЭЭС принимается равной единице. ТЭС – текущее эксплуатационное состояние, соответствующее фиксированному моменту эксплуатации  $t > 0$ .

В этом состоянии АЭД уже подвергся эксплуатационному старению и, возможно, приобрел мелкие (не вызывающие потерю работоспособности) повреждения. В связи с этим технические показатели изделия отклонились от эталонных значений ЭЭС, что можно трактовать как частичную утрату работоспособности. По входу 3 в процессе эксплуатационного тестирования снимается информация о текущем техническом состоянии изделия. ПЭС – предельное эксплуатационное состояние, соответствующее моменту прекращения эксплуатации  $t = T_p$ . В предельном состоянии технические показатели АЭД неустранимо ушли за рамки требований нормативно-технической документации. В нормативно-техническом, смысле изделием полностью утрачена работоспособность и вероятность сохранения работоспособности равна нулю. По показателям ПЭС определяется и передается по входу 4 информация о предельных отклонениях технических показателей от эталонных значений.

### 3.2. Задачи информационного сопровождения жизненного цикла АЭД

В плане научного и информационного сопровождения жизненного цикла АЭД выделяются две задачи – прогнозная и структурно-аналитическая.

Содержанием прогнозной задачи является получение сведений о текущей работоспособности АЭД, в частности – получение прогнозных оценок остаточного ресурса и вероятности потери работоспособности. Оценки даются для каждого электродвигателя и впоследствии анализируются и обобщаются по характерным эксплуатационным группам. Источником информации для решения прогнозной задачи служат данные о текущем техническом состоянии эксплуатируемого АЭД, получаемые в результате регулярного диагностического тестирования. Выходом задачи является принятие решения о продолжении или прекращении его эксплуатации. Возможно также решение об изменении режима эксплуатации.

Содержанием структурно-аналитической задачи является, во-первых, разделение эксплуатируемых АЭД по характерным эксплуатационным группам, во-вторых, получение сведений о степени соответствия конструктивных и технологических решений, принятых на этапе проектирования и изготовления изделия, условиям и режимам эксплуатации. Оценки соответствия даются для каждой фиксированной эксплуатационной группы.

Источниками информации для решения структурно-аналитической задачи служат обобщенные данные диагностических тестирований, а также результаты моделирования эксплуатационных состояний АЭД. Выходом задачи являются проектно-конструкторские и технологические рекомендации, а также эксплуатационные требования для фиксированной эксплуатационной группы АЭД.

Таким образом, эксплуатационная диагностика связывает воедино проектировочные решения и производственные технологии – с одной стороны и вероятность безотказной работы, и остаточный ресурс – с другой стороны. Естественным продолжением такого объединения является выработка критериев оптимальности жизненного цикла электромеханических систем, а также создание методов, способов, правил и технологий их реализации в рамках фиксированной эксплуатационной группы.

### 3.3. Эксплуатационные группы АЭД

Основной физической процесс, отслеживаемый в ходе эксплуатационной диагностики АЭД, процесс его эксплуатационного старения, т. е. процесс постепенной утраты изделием физических, конструктивных, параметрических и технических свойств. Эксплуатационное старение – сложный и трудно формализуемый процесс, зависящий от многих детерминированных и случайных факторов. Вместе с тем, очевидно, что интенсивность старения определяется степенью защиты, а также условиями и характером эксплуатации изделия, т. е. длительностью эксплуатации, влажностью, запыленностью, агрессивностью окружающей среды, частотой и интенсивностью перегрузок, сезонностью эксплуатации, нестабильностью пара-

метров питания и др. В этой связи авторы считают целесообразным введение специального термина «эксплуатационная группа», под которой понимается группа АЭД с приблизительно одинаковыми условиями и характером эксплуатации и, следовательно, с приблизительно одинаковыми темпами эксплуатационного старения. Показатель темпа эксплуатационного старения, определяемый в ходе эксплуатационной диагностики, может быть использован как числовой критерий для отнесения АЭД к той или иной эксплуатационной группе.

### 3.4. Информационные потоки на этапах жизненного цикла АЭД

Информация, передаваемая по входам 1–4 (рис. 1), обрабатывается с целью получения необходимых прогнозных и структурно-аналитических показателей АЭД. Диаграмма информационных потоков на этапах жизненного цикла АЭД представлена на рис. 2.

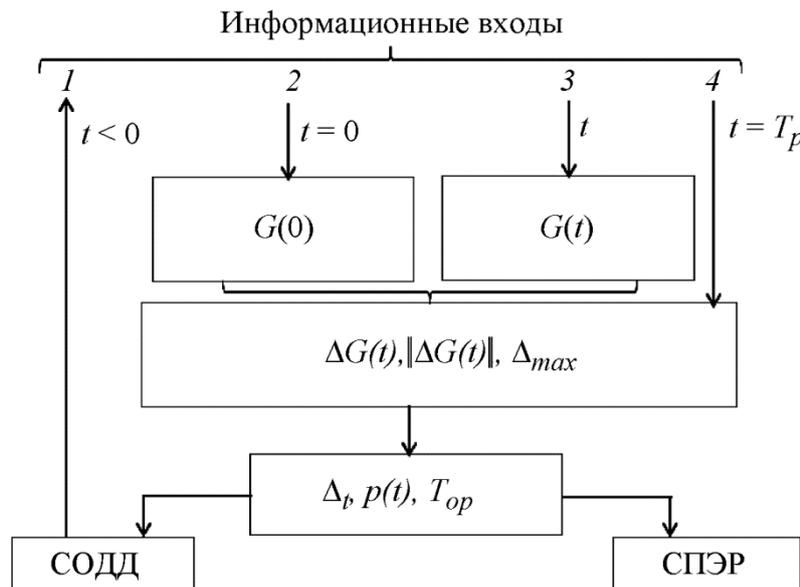


Рис. 2. Информационные потоки на этапах жизненного цикла АЭД

Методология проведения диагностического обследования и способ формирования диагностических матриц приведены в [4, 6–8]. В соответствии с ними на первом этапе диагностического обследования экспериментально формируются матрицы Грина для состояний ЭЭС и ТЭС. Матрица Грина для состояния ЭЭС в долях от амплитуды тока проводимости имеет вид:

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Грина для состояния ТЭС в тех же единицах имеет вид

$$G(t) = \begin{pmatrix} I_{Am} & i_{Am} & I_{Cm} \\ I_{Am} & I_{Bm} & i_{Bm} \\ i_{Cm} & I_{Bm} & I_{Cm} \end{pmatrix},$$

где  $I_{Am}$ ;  $I_{Bm}$ ;  $I_{Cm}$  – амплитуды токов проводимости в фазах обмотки статора А, В, С;  $i_{Am}$ ;  $i_{Bm}$ ;  $i_{Cm}$  – амплитуды индуцированных токов в фазах обмотки статора А, В, С. Матрицы  $G(0)$  и  $G(t)$  формируются в процессах выходного и эксплуатационного тестирования АЭД соответственно.

### 3.5. Показатели технического состояния АЭД

На втором этапе диагностического обследования вычисляется матрица текущих отклонений (рис. 2):

$$\Delta G(t) = \text{abs}(G(0) - G(t)),$$

которая далее нормируется

$$\|\Delta G(t)\| = \text{abs} \begin{pmatrix} \frac{1-I_{Am}}{\Delta I} & \frac{i_{Am}}{\Delta i} & \frac{1-I_{Cm}}{\Delta I} \\ \frac{1-I_{Am}}{\Delta I} & \frac{1-I_{Bm}}{\Delta I} & \frac{i_{Bm}}{\Delta i} \\ \frac{i_{Cm}}{\Delta i} & \frac{1-I_{Bm}}{\Delta I} & \frac{1-I_{Cm}}{\Delta I} \end{pmatrix}.$$

Для нормирования вводятся различные предельные отклонения элементов проводимости ( $\Delta I$ ) и индуктивных элементов ( $\Delta i$ ) матрицы текущих отклонений. Предельные отклонения определяются экспертным путем и ассоциируются с предельным эксплуатационным состоянием. Это означает, что достижение каким-либо элементом матрицы  $\|\Delta G(t)\|$  значения 1 свидетельствует о появлении состояния ПЭС и влечет за собой прекращение эксплуатации АЭД.

После нормирования определяется максимальное нормированное отклонение элементов матрицы Грина от эталонных значений свидетельствующее о степени эксплуатационного старения изделия:

$$\Delta_{\max} = \max \|\Delta G(t)\|.$$

На третьем этапе диагностического обследования определяются:

– показатель темпа эксплуатационного старения изделия

$$\Delta_t = \frac{\Delta_{\max}}{t};$$

– показатель вероятности сохранения работоспособности изделия

$$p(t) = 1 - \Delta_{\max};$$

– показатель остаточного ресурса изделия

$$T_{op} = \frac{p(t)}{\Delta_t}.$$

Данные показатели направляются в систему поддержки эксплуатационных решений (СПЭР), а также в систему обработки диагностических данных (СОДД). СПЭР накапливает и обрабатывает информацию для принятия решения о продолжении или прекращении эксплуатации изделия. СОДД обрабатывает диагностические и учетные данные обследованного АЭД и относит его к определенной эксплуатационной группе.

Полученная в ходе периодических диагностических обследований информация позволяет обоснованно решать эксплуатационные задачи и в отношении конкретного АЭД, и в отношении эксплуатационных групп, и в отношении парков АЭД различных технических систем и отраслей экономики. Отметим также, что в соответствии со спецификой формирования матриц Грина, информация, содержащаяся в них, не соотносится с режимом эксплуатации АЭД, т. е. является безусловной и характеризует только само изделие.

#### 4. Заключение

В плане научного и информационного сопровождения жизненного цикла АЭД выделяются две задачи – прогнозная и структурно-аналитическая. Их решение позволяет организовать эффективную эксплуатацию парка АЭД РФ. При этом ключевую роль играют, во-первых, система показателей для оценки характеристик АЭД на различных этапах жизненного цикла, во-вторых, методы и способы их мониторинга, производимого по ходу эксплуатации. В этих аспектах существенным является факт параметрической неоднородности электродвигателя, проявляющийся по мере его эксплуатационного старения.

Эксплуатационная диагностика является общим звеном отмеченных выше задач. На основе данных диагностического тестирования определяются такие показатели текущего технического состояния АЭД, как показатель темпа эксплуатационного старения, показатель вероятности сохранения работоспособности и показатель остаточного ресурса. Данные показатели позволяют существенно повысить обоснованность принимаемых эксплуатационных решений.

#### Благодарность

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00283, и в рамках государственного задания, проект № FSWF-2020-0019.*

#### Литература

1. Вольдек А. И. Электрические машины. – 3-е изд. – М. : Альянс, 2017. – 832 с.
2. Гольдберг О. Д., Макаров Л. Н., Хелемская С. П. Инженерное проектирование электрических машин. – М. : Издат. дом «Бастед», 2016. – 528 с.
3. Курилин С. П., Денисов В. Н. Топологические аспекты теории асинхронных электрических машин. – Смоленск : Универсум, 2019. – 200 с.
4. Борисов В. В., Курилин С. П., Черновалова М. В. Топологический подход к исследованию неоднородных электромеханических систем // Математические методы в технике и технологиях : сб. тр. междунар. науч. конф. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2020. – Т. 7. – С. 96–99.
5. Scientific basis of methods for topological diagnostics of asynchronous electric machines / S. P. Kurilin, V. N. Denisov, A. S. Fedulov, M. I. Dli // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – P. 030031. – DOI: 10.1063/1.5084392.
6. Kurilin S. P., Denisov V. N. The Development of Topological Diagnostic Methods of Asynchronous Electric Machines // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 214–221. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.214-221. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_185.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_185.html)

7. Vector space as an area of the operation risks characteristics for asynchronous electric machines / S. P. Kurillin, V. N. Denisov, M. I. Dli, V. I. Bobkov // IOP Conf. Series. Journal of Physics. Conf. Series. – 2019. – Vol. 1260. – P. 052017. – DOI:10.1088/1742-6596/1260/5/052017.
8. A method for the operational diagnostics of induction motors / S. P. Kurilin, V. N. Denisov, M. I. Dli, V. I. Bobkov // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2176. – P. 040008. – DOI: 10.1063/1.5135157. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_185.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_185.html)



**Received:** 17.08.2020

**Revised:** 24.09.2020

**Accepted:** 16.10.2020

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044

## ON NUMERICAL METHODS FOR CONSTRUCTING BENCHMARK SOLUTIONS TO A NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A SINGULARITY

A. L. Kazakov<sup>1, a)</sup>, L. F. Spevak<sup>1, b)\*</sup>, E. L. Spevak<sup>2, c)</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Institute of Natural Sciences and Mathematics, B. N. Yeltsin Ural Federal University,  
48 Kuibysheva St., Ekaterinburg, 620000, Russian Federation*

a)  <http://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);  
b)  <http://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru);  
c)  [spevak155@gmail.com](mailto:spevak155@gmail.com)

\*Corresponding author. E-mail: [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian Federation  
Tel.: +7 (343) 362 30 22; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper deals with the construction of exact solutions to a nonlinear heat equation with degeneration in the case of the zero value of the required function. Generically self-similar solutions and traveling wave solutions are considered, the construction of which reduces to solving Cauchy problems for a nonlinear second-order ordinary differential equation with a singularity before the higher derivative. Two approaches are proposed to solve the Cauchy problems: the analytical solution by the power series method and the numerical solution by the boundary element method on a specified segment. A complex computational experiment is carried out to compare the above two methods with each other and with the finite difference methods, namely the Euler method and the fourth-order Runge-Kutta method. Power series segments are used on the first step of the finite difference solutions in order to resolve the singularity. The comparison of the application domains, the accuracy of the solutions and their dependence on the parameters of a certain problem shows that the boundary element method is the most universal, although not the most accurate for some particular examples. The conclusions drawn allow us to construct benchmark solutions to verify the approximate solutions of the nonlinear heat equation by various methods in a wide range of parameter values.

**Keywords:** nonlinear heat equation, exact solution, generically self-similar solution, traveling wave, power series, boundary element method.

### Acknowledgment

*The work was supported by the RFBR, project No. 20-07-00407.*

### References

1. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p. ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
2. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*, NY, Berlin, Walter de Gruyter, 1995, 534 p. ISBN 3-11-012754-7.
3. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. *K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchey ot temperatury* [Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity

- depending on the temperature]. In: Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A.F. Ioffe, Moscow, Akad. Nauk SSSR Publ., 1950, pp. 61–71. (In Russian).
4. Barenblatt G.I., Vishik I.M. On the Final Velocity of Propagation in Problems of Non-stationary Filtration of Liquid and Gas. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1956, vol. 20, no. 3, pp. 411–417. (In Russian).
  5. Oleynik O.A., Kalashnikov A.S. Chzhou Yuy-Lin. The Cauchy Problem and Boundary Value Problems for Equations of the type of Non-stationary Filtration. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*, 1958, vol. 22, no. 5, pp. 667–704. (In Russian).
  6. Sidorov A.F. In: *Izbrannye Trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian). ISBN 5-9221-0103-X.
  7. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Studies of the Boundary Value Problem of a Nonlinear Filtration with Degeneration. *Vychislitelnye tekhnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68. (In Russian).
  8. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-dimensional Nonlinear Filtration Problems. *Izvestiya IGU. Seriya Matematika* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2012, vol. 5, no. 2, pp. 2–17. (In Russian).
  9. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 10–11, pp. 6918–6928. DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
  10. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129. (In Russian).
  11. Kazakov A.L., Spevak L.F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 40, iss. 2, pp. 1333–1343. DOI: 10.1016/j.apm.2015.06.038.
  12. Spevak L.F., Kazakov A.L. Constructing numerical solutions to a nonlinear heat conduction equation with boundary conditions degenerating at the initial moment of time. In: *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1785, iss. 1, pp. 040076. DOI: 10.1063/1.4967136
  13. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. A heat wave problem for a degenerate nonlinear parabolic equation with a specified source function. In: *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2053, pp. 030024. Available at: <https://doi.org/10.1063/1.5084385>
  14. Kazakov A.L., Nefedova O.A., Spevak L.F. Solution of the Problem of Initiating the Heat Wave for a Nonlinear Heat Conduction Equation Using the Boundary Element Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.
  15. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sibirskiye Elektronnyye Matematicheskiye Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. (In Russian). DOI: 10.33048/semi.2019.16.073. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v16/p1057-1068.pdf>
  16. Spevak L.F., Kazakov A.L. Solving a degenerate nonlinear parabolic equation with a specified source function by the boundary element method. In: *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, pp. 040054. Available at: <https://doi.org/10.1063/1.5017402>
  17. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A. On the Numerical-Analytical Approaches to Solving a Nonlinear Heat Conduction Equation with a Singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 100–116. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
  18. Banerjee P.K., Butterheld R. *Boundary element methods in engineering science*, US, McGraw-Hill Inc., 1981, 452 p. ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.

19. Nardini D., Brebbia C.A. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements. *Applied Mathematical Modelling*, 1983, vol. 7, no. 3, pp. 157–162. DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
20. Wrobel L.C., Brebbia C.A. Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. In: *Finite elements in water resources VI*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986, pp. 801–811.
21. Tanaka M., Matsumoto T., Yang Q.F. Time-stepping boundary element method applied to 2-D transient heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 1994, vol. 18, pp. 569–576. DOI: 10.1016/0307-904X(94)90142-2.
22. Tanaka M., Matsumoto T., Takakuwa S. Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, vol. 195, pp. 4953–4961. DOI: 10.1016/j.cma.2005.04.025.
23. Divo E., Kassab A.J. Transient non-linear heat conduction solution by a dual reciprocity boundary element method with an effective posteriori error estimator. *Computers, Materials and Continua*, 2005, vol. 2, pp. 277–288. DOI: 10.3970/cm.c.2005.002.277.
24. Wrobel L.C., Brebbia C.A. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 65, pp. 147–164. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
25. Singh K.M., Tanaka M. Dual reciprocity boundary element analysis of transient advection-diffusion. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2003, vol. 13, pp. 633–646. DOI: 10.1108/09615530310482481.
26. Al-Bayati S.A., Wrobel L.C. A novel dual reciprocity boundary element formulation for two-dimensional transient convection–diffusion–reaction problems with variable velocity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, vol. 94, pp. 60–68. DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.06.001.
27. Fendoglu H., Bozkaya C., Tezer-Sezgin M. DBEM and DRBEM solutions to 2D transient convection-diffusion-reaction type equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, vol. 93, pp. 124–134. DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.04.011.
28. Powell M.J.D. The Theory of Radial Basis Function Approximation. In: W. Light, ed. *Advances in Numerical Analysis*, Oxford Science Publications, Oxford, UK, 1992, vol. 2.
29. Golberg M.A., Chen C.S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, pp. 285–296. DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
30. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. Analytical and numerical construction of heat wave type solutions to the nonlinear heat equation with a source. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, no. 2, pp. 111–122. DOI 10.1007/s10958-019-04294-x.
31. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical Study of Travelling Wave Type Solutions for the Nonlinear Heat Equation. In: *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2176, pp. 030006. DOI: 10.1063/1.5135130.
32. Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Nelineynye uravneniya matematicheskoy fiziki i mekhaniki. Metody resheniya* [A Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics. Solution Methods]. Moscow, Yurayt Publ., 2017, 256 p. (In Russian). ISBN 978-5-534-02317-6.

Подана в журнал: 17.08.2020

УДК 517.958:519.633

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044

## О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ ЭТАЛОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОСОБЕННОСТЬЮ

А. Л. Казаков<sup>1, а)</sup>, Л. Ф. Спевак<sup>1, б)\*</sup>, Е. Л. Спевак<sup>2, в)</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,  
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620049, Российская Федерация

<sup>2</sup>Институт естественных наук и математики Уральского Федерального университета  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,  
48, ул. Куйбышева, г. Екатеринбург, 620000, Российская Федерация

а)  <http://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);

б)  <http://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru);

в)  [spevak155@gmail.com](mailto:spevak155@gmail.com)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 362–30–22; факс: +7 (343) 374–53–30

Работа посвящена построению точных решений нелинейного уравнения теплопроводности с вырождением в случае нулевого значения искомой функции. Рассмотрены обобщенно-автомодельные решения и решения типа бегущей волны, нахождение которых сводится к решению задач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с особенностью при старшей производной. Для решения этих задач предложены два подхода: построение аналитического решения методом степенных рядов и построение решения на заданном отрезке методом граничных элементов. В проведенном объемном вычислительном эксперименте построенные двумя методами решения сравнивались между собой, а также с разностными решениями методами Эйлера и Рунге–Кутты, в которых для раскрытия особенностей на первом шаге используются отрезки степенных рядов. Сопоставление областей применимости методов, точности решений и их зависимости от параметров конкретной задачи показало наибольшую универсальность метода граничных элементов, хотя для отдельных примеров лучшую точность имели решения другими методами. Сделанные выводы позволят с достаточной корректностью строить эталонные решения для верификации приближенных решений нелинейного уравнения теплопроводности различными методами в широком диапазоне значений параметров.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение теплопроводности, точное решение, обобщенно-автомодельное решение, бегущая волна, степенной ряд, метод граничных элементов.

### 1. Введение

Верификация численных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными является важной составляющей их разработки. Особую актуальность указанная проблематика приобретает в связи с исследованием нелинейных уравнений с особенностями, поскольку в этом случае очень редко удается доказать сходимость метода и тогда в основе верификации обычно лежит сравнение полученных решений с известными точными решениями, либо с приближенными решениями, полученными другими методами. Статья посвящена исследованию методов построения точных решений типа бегущей волны, а также обобщенно-автомодельных решений для вырождающегося нелиней-

ного параболического уравнения, которые авторы используют для верификации разрабатываемых ими алгоритмов на основе метода граничных элементов (МГЭ).

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником [1, 2]:

$$T_t = (k(T) T_x)_x + H(T). \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  – время;  $x$  – пространственная координата;  $T$  – искомая функция (температура);  $k(T)$  – функция источника. Будем считать, что  $k(0) = 0$ ;  $H(0) = 0$ . В случае монотонности и достаточной гладкости функции  $k(T)$  подстановкой  $u = k(T)$  уравнение (1.1) приводим к виду

$$u_t = uu_{xx} + F(u)u_x^2 + h(u). \quad (1.2)$$

Здесь  $F(u) = \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} + 1$ ;  $h(u) = \frac{H(\varphi(u))}{\varphi'(u)}$ ;  $T = \varphi(u)$  – функция, обратная к  $u = k(T)$ .

Важным свойством уравнения (1.2) является вырождение параболического типа при  $u = 0$ , что приводит к существованию решений, имеющих вид тепловой волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью [3–6]. Именно верификации численного метода построения таких решений посвящена настоящая работа.

Данное исследование продолжает большой цикл работ авторов, посвященных построению и исследованию решений, имеющих тип тепловой волны. Ранее авторы исследовали уравнение (1.2) при заданном законе движения нулевого фронта тепловой волны

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad (1.3)$$

а также задачи об иницировании тепловой волны при краевом режиме в неподвижной точке

$$u|_{x=0} = f(t) \quad (1.4)$$

и в подвижной точке,

$$u|_{x=g(t)} = f(t). \quad (1.5)$$

Легко видеть, что условия (1.3) и (1.4) являются частными случаями (1.5). Для степенной функции  $k(T)$  были доказаны теоремы существования и единственности аналитического решения в различных постановках задачи (1.2), (1.5) [7–14]. Для произвольного вида функции  $k(T)$  аналогичная теорема была доказана для задачи (1.2), (1.3) [15]. Другим направлением исследования была разработка численных алгоритмов решения всех этих задач на заданном конечном промежутке времени: задача (1.2), (1.3) в различных постановках была рассмотрена в работах [8, 9, 11, 13, 16], задача (1.2), (1.4) – в [8, 9, 11, 12, 14], задача (1.2), (1.5) [9, 11]. Подробный обзор подходов авторов к численным и аналитическим исследованиям задач для уравнения (1.2) приведен в статье [17].

В основе численных алгоритмов, разработанных авторами, лежит решение с помощью МГЭ [18] и метода двойственной взаимности (МДВ) [19]. Подобный подход, впервые предложенный для решения нестационарных задач теплопроводности в работе [20], является эффективным средством решения краевых задач для параболических уравнений различного вида: теплопроводности [21–23], диффузии [24], адвекции–диффузии [25], конвекции–реакции–диффузии [26, 27] и др. Общим подходом в этих работах является представ-

ление параболического уравнения в виде неоднородного уравнения Пуассона с производной по времени в правой части и применение МГЭ для решения полученного эллиптического уравнения. Важную роль при использовании МДВ играет выбор вида радиальных базисных функций [28, 29]. При решении нелинейных задач методом граничных элементов [22–24] МДВ позволяет свести интегралы по области к интегралам по границе, что позволяет снизить размерность задачи, и дальнейшее решение определяется выбранной дискретизацией по времени.

Несмотря на обоснованность и широкое использование применяемого подхода к решению разработанные алгоритмы необходимо верифицировать сравнением с известными точными решениями. Авторами были рассмотрены различные подходы к их построению: исследовались обобщенно-автомодельные решения, имеющие тип тепловой волны [15, 30], а также решения типа бегущей волны [31]. Общим в этих подходах является то, что построение решения сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка с особенностью при старшей производной. Получить решение такой задачи в конечном аналитическом виде удастся лишь в единичных случаях. Однако найденное с достаточной точностью приближенное решение задачи Коши также позволит получить эталонное решение для тестирования численного решения исходной задачи для уравнения (1.2). Отсюда вытекает основная цель данного исследования: провести сравнительную оценку точности различных численных алгоритмов решения задач Коши, возникающих при построении точных решений уравнения (1.2), и определить наиболее подходящий метод.

## 2. Обобщенно-автомодельные решения

Рассмотрим случай, когда  $k(T) = T^\sigma$  и  $h(u) = \alpha u^\beta$ . Тогда задача (1.2), (1.3) может быть записана следующим образом:

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + \alpha u^\beta, \quad u|_{x=a(t)} = 0. \quad (2.1)$$

Будем искать решения задачи (2.1) в виде

$$u = \lambda(t)w(z), \quad z = 1 - \frac{x}{a(t)}. \quad (2.2)$$

Решения подобного типа будем называть *обобщенно-автомодельными* [32]. Подставив (2.2) в (2.1), после приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на  $a^2(t)/\lambda^2(t)$  получим:

$$ww'' + \frac{1}{\sigma} (w')^2 + \frac{a(t)a'(t)}{\lambda(t)} (z-1)w' - \frac{a^2(t)\lambda'(t)}{\lambda^2(t)} w + \frac{\alpha a^2(t)}{\lambda^{2-\beta}(t)} w^\beta = 0, \quad (2.3)$$

$$w(0) = 0. \quad (2.4)$$

**Утверждение.** Уравнение (2.3) является обыкновенным дифференциальным относительно искомой функции  $w(z)$ , если закон движения фронта тепловой волны  $a(t)$  является при согласованном значении  $\beta$  либо экспонентой ( $\beta = 1$ ), либо степенной функцией.

**Доказательство.** Можно видеть, что (2.3) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ), когда выполнены равенства

$$\frac{a(t)a'(t)}{\lambda(t)} = A = const; \quad \frac{a^2(t)\lambda'(t)}{\lambda^2(t)} = B = const; \quad \frac{a^2(t)}{\lambda^{2-\beta}(t)} = D = const. \quad (2.5)$$

Проинтегрировав систему (2.5), можно убедиться, что, если  $B/A = 2$ ,  $\beta = 1$ , решением является экспонента  $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$ ; если же  $B/A \neq 2$ , – степенная функция  $a(t) = (C_3 t + C_4)^\omega$ . Здесь  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;  $\omega = (\beta - 2)/(2\beta - 2)$  – константы,  $\beta \neq 1, 2$ . *Утверждение доказано.*

Не теряя общности рассмотрения, можно принять, что  $A = 1$ . При выполнении условий (2.5) задача (2.3), (2.4) может быть записана в виде

$$w w'' + \frac{1}{\sigma} (w')^2 + (z - 1)w' - Bw + \alpha D w^\beta = 0, \quad w(0) = 0, \quad (2.6)$$

где  $B = 2/(\beta - 2)$ ;  $D = 1/C_2$  в случае показательного закона движения фронта тепловой волны;  $D = (C_3 \omega)^{\beta-2}$  в случае степенного закона движения. В соответствии с физическим смыслом задачи предположим, что  $w'(0) > 0$ . Тогда условием совместности задачи (2.6) является равенство

$$w'(0) = \sigma. \quad (2.7)$$

Задача Коши (2.6), (2.7) имеет особенность при  $z = 0$  и для нее неприменимы классические теоремы существования и единственности. Существование и единственность аналитического решения (2.6), (2.7) при натуральных значениях  $\beta$  следует из ранее полученных результатов авторов [15].

Таким образом, с учетом равенства  $\lambda(t) = a(t)a'(t)$  (2.5), получены следующие обобщенно-автомодельные решения задачи (2.1):

$$u = \begin{cases} C_1^2 C_2 e^{2C_2 t} w(z), & z = 1 - \frac{x}{C_1 e^{C_2 t}}, \quad \beta = 1; \\ C_3 \omega (C_3 t + C_4)^{2\omega-1} w(z), & z = 1 - \frac{\rho}{(C_3 t + C_4)^\omega}, \quad \omega = \frac{\beta-2}{2\beta-2}, \quad \beta \neq 1, 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь функция  $w(z)$  удовлетворяет задаче Коши (2.6), (2.7).

### 3. Бегущая волна

Рассмотрим теперь случай нелинейности общего вида. Будем искать решение задачи (1.2), (1.3) типа бегущей волны. Представим решение в виде  $u(t, x) = v(z)$ , где  $z = \mu t - x$ . Подставляя принятый вид решения в уравнение (1.2) и граничное условие (1.3), приходим к следующей задаче Коши:

$$v v'' + F(v)(v')^2 - \mu v' + h(v) = 0; \quad (3.1)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = \frac{\mu}{F(0)}. \quad (3.2)$$

Напомним, что  $h(0) = 0$ . Из (3.2) имеем, что  $F(0) \neq 0$ . Как и в предыдущем разделе, классические теоремы существования и единственности здесь неприменимы. Из ранее полученных результатов авторов [15] следует, что в случае, если функции  $F(v)$  и  $h(v)$  аналитические в окрестности точки  $v = 0$  и  $F(0) > 0$ , задача (3.1), (3.2) имеет единственное аналитическое решение, которое в свою очередь порождает решение  $u(t, x) = v(\mu t - x)$  задачи (1.2), (1.3) при  $a(t) = \mu t$ .

Решение задачи (3.1), (3.2), как и задачи (2.6), (2.7), в конечной форме можно получить лишь в редких отдельных случаях. Некоторые из них будут приведены в разд. 6. Однако имеет смысл рассмотреть возможность построения приближенных решений этих задач аналитическими и численными методами.

#### 4. Решение методом степенных рядов

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ следующего вида:

$$vv'' + F_0(v')^2 - \mu v' + f(v)(v')^2 + g(z)v' + h(v) = 0; \quad (4.1)$$

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = \frac{\mu}{F_0}, \quad (4.2)$$

где  $F_0 > 0$ ,  $\mu > 0$  – константы; функции  $f$ ,  $g$ ,  $h$  являются аналитическими в некоторой окрестности нуля и  $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ . Можно убедиться, что частными случаями задачи (4.1), (4.2) являются как задача (2.6), (2.7), так и задача (3.1), (3.2).

Будем строить решение задачи (4.1), (4.2) в виде ряда по степеням  $z$ :

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k z^k}{k!}; \quad v_k = \left. \frac{d^k v}{dz^k} \right|_{z=0}. \quad (4.3)$$

При этом  $v_0 = 0$  и  $v_1 = \mu/F_0$  известны из условия (4.2) и образуют базу индукции. Пусть найдены коэффициенты ряда (4.3) до номера  $k$  включительно. Для нахождения  $v_{k+1}$  продифференцируем обе части (4.1)  $k$  раз по  $z$  и положим  $z = 0$ . Получим, что

$$\mu \left( \frac{k}{F_0} + 1 \right) v_{k+1} = F_k. \quad (4.4)$$

Конкретный вид правой части (4.4) не приводится из-за громоздкости, однако  $F_k$  будет зависеть от величин, которые известны в силу предположения индукции. Поскольку  $F_0 > 0$ ,  $\mu \neq 0$ , то  $v_{k+1}$  отсюда определяется однозначно.

Сходимость ряда (4.3) доказывается методом мажорант по стандартной процедуре [15, 30]. Его отрезки могут быть использованы для проверки корректности вычислений, которые выполняются другими приближенными методами. Однако здесь необходимо учитывать, что сходимость является локальной, причем размер окрестности, как правило, невелик.

## 5. Решение методом граничных элементов

Обобщая результаты разделов 2 и 3, можно сказать, что при отыскании для уравнения (1.2) точных решений рассмотренных типов необходимо решить задачу Коши вида

$$vv'' = G(z, v, v'); v(0) = 0; v'(0) = v'_*, \quad (5.1)$$

где  $G(z, v, v')$  – известная функция;  $v'_*$  – известное число. В случае, когда задача (5.1) не интегрируется в квадратурах, она может быть решена приближенно. Для построения решения уравнения (1.2) на некотором промежутке времени  $t \in [0, t_*]$  задача (5.1) должна быть решена на соответствующем отрезке  $z \in [0, L(t_*)]$ . Найденное с достаточной точностью решение может быть использовано для построения эталонного решения уравнения (1.2).

Для решения задачи (5.1) на отрезке  $z \in [0, L]$  методом граничных элементов представим ее в следующем виде:

$$v'' = \frac{1}{v} G(z, v, v'), z \in (0, L); \quad (5.2)$$

$$v|_{z=0} = 0; \quad (5.3)$$

$$q|_{z=0} = -v'_*. \quad (5.4)$$

Здесь  $q$  – тепловой поток в граничных точках;  $q(0) = -v'(0)$ ;  $q(L) = v'(L)$ .

Итерационная процедура решения задачи (5.2)–(5.4) с помощью МГЭ при начальном приближении  $v_0(\xi) \equiv 0$  имеет вид:

$$v_k(\xi) = -v'_* u^*(\xi, 0) + q_L^{(k)} u^*(\xi, L) - v_L^{(k)} q^*(\xi, L) - \int_0^L \frac{1}{v_{k-1}(z)} G(z, v_{k-1}(z), v'_{k-1}(z)) u^*(\xi, z) dz; \quad (5.5)$$

$$\xi \in (0, L),$$

где  $u^*(\xi, z) = \frac{1}{2}(L - |z - \xi|)$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа,  $q^*(\xi, 0) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi)$ ,  $q^*(\xi, L) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L - \xi)$  [18];  $v_L^{(k)} = v_k(L)$  и  $q_L^{(k)} = q_k(L) = v'_k(L)$  –  $k$ -е итерации граничных значений искомой функции и потока, которые являются решением системы граничных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} v_L^{(k)} = v'_* + 2 \int_0^L \frac{1}{v_{k-1}(z)} G(z, v_{k-1}(z), v'_{k-1}(z)) u^*(0, z) dz, \\ v_L^{(k)} - q_L^{(k)} L = -2 \int_0^L \frac{1}{v_{k-1}(z)} G(z, v_{k-1}(z), v'_{k-1}(z)) u^*(L, z) dz. \end{cases} \quad (5.6)$$

Интегралы в правых частях соотношений (5.5) и (5.6) вычисляются с помощью МДВ через разложение по радиальным базисным функциям (РБФ):

$$\frac{1}{v_k(z)} G(z, v_k(z), v_k'(z)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(k)} f_i(z). \quad (5.7)$$

Здесь  $f_i(z) = f(|z - z_i|)$  – РБФ;  $z_1, \dots, z_m$  – точки коллокации, расположенные на отрезке  $[0, L]$ . Для каждой  $f_i(z)$  существует функция  $\hat{u}_i(z)$ , такая что  $\frac{d^2 \hat{u}_i(z)}{dz^2} = f_i(z)$ . Подстановка (5.7) в интеграл приводит его к следующему виду:

$$\int_0^L \frac{1}{v_k(z)} G(z, v_k(z), v_k'(z)) u^*(\xi, z) dz = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(k)} [-\hat{u}_i(\xi) + \hat{q}_i(0) u^*(\xi, 0) + \hat{q}_i(L) u^*(\xi, L) - \hat{u}_i(0) \hat{q}^*(\xi, 0) - \hat{u}_i(L) \hat{q}^*(\xi, L)], \quad (5.8)$$

где  $\hat{q}_i(\xi, 0) = -\frac{\partial \hat{u}_i(\xi, 0)}{\partial z}$ ;  $\hat{q}_i(\xi, L) = \frac{\partial \hat{u}_i(\xi, L)}{\partial z}$ , а коэффициенты  $\alpha_i^{(k)}$  определяются из системы уравнений, получающейся из (5.7) при  $z = z_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Итерационный процесс останавливается при  $\left| \frac{v_L^{(k)} - v_L^{(k-1)}}{v_L^{(k)}} \right| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданный параметр точности. Тогда  $v_k(\xi)$  будет непрерывно дифференцируемым приближенным решением задачи (5.1) на интервале  $\xi \in (0, L)$ , которое позволит построить эталонное решение уравнения (1.2).

Отдельно стоит отметить случай, когда искомая функция  $v(z)$  обращается в ноль в точке  $z = L$  и имеет в этой точке бесконечную производную. Тогда решение имеет максимум  $v_{\max}$  в некоторой точке  $z_{\max} \in (0, L)$ . Значение  $L$  при этом неизвестно. Корректно решить такую задачу с помощью представленного алгоритма невозможно, поэтому был разработан специальный подход к решению, включающий в себя два этапа. На первом этапе решается задача (5.2) – (5.4) на отрезке  $z \in [0, L_1]$ , где значение  $L_1$  подобрано таким образом, что  $z_{\max} < L_1 < L$ . Решение задачи проводится с помощью итерационной процедуры (5.5), (5.6). На втором этапе решается задача для функции  $z(v)$ , обратной к  $v(z)$ , соответствующая задаче (5.2)–(5.4) на отрезке  $z \in [L_1, L]$ :

$$z'' = F(v, z, z'), \quad v \in (0, L_2); \quad (5.9)$$

$$z|_{v=L_2} = L_1; \quad (5.10)$$

$$q_z|_{z=L_2} = \frac{1}{q(L_1)}. \quad (5.11)$$

Здесь  $L_2 = v(L_1)$ ;  $q_z$  – поток для функции  $z(v)$ ;  $v(L_1)$  и  $q(L_1)$  – значения, найденные на первом этапе решения. Задача (5.2)–(5.4) может быть решена итерационным МГЭ аналогично решению на первом этапе. В результате мы получим функцию  $z(v)$ ,  $v \in [0, L_2]$ . В частности, будет найдено значение  $z(0) = L$ . Непрерывный вид решения позволит построить обратную функцию  $v(z)$ ,  $z \in [L_1, L]$  без потери точности. Таким образом, мы получим полное решение задачи (5.2)–(5.4). Отметим еще раз, что в рассмотренном случае  $\lim_{z \rightarrow L} v'(z) = -\infty$ . Поэтому стандартное решение МГЭ в один этап невозможно, даже если мы знаем значение  $L$ .

Известно, что МГЭ редко применяется для решения одномерных задач. В данном случае это оправдывается получением непрерывного решения, что является преимуществом перед конечно-разностными методами, а также возможностью получения решения на заданном отрезке, что не всегда возможно методом степенных рядов. В совокупности с этими преимуществами, при условии достаточной точности, гранично-элементное решение представляется весьма перспективным. Сравнительная оценка точности решения различными методами задачи (5.1) в различных постановках при различных значениях параметров приведена в следующем разделе.

## 6. Вычислительный эксперимент

В данном разделе проведем сравнительный анализ приближенных решений задачи (5.2)–(5.4) в виде отрезков ряда (4.3), решений МГЭ и решений разностными методами. Последние будем строить следующим образом. Представим (5.2)–(5.4) в виде задачи Коши для системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} v' = w \\ w' = \frac{1}{v} G(z, v, w) \end{cases}; v(0) = 0; w(0) = v_*'. \quad (6.1)$$

Решать систему (6.1) будем методом Эйлера (МЭ) и методом Рунге–Кутты (МРК) четвертого порядка. Поскольку начальные условия заданы в точке сингулярности, на первом шаге в качестве решения примем решение в виде отрезка ряда, имеющего достаточно высокую точность вблизи начальной точки.

Проведенные исследования задачи (5.2)–(5.4) в различных постановках показали, что их решения можно условно разделить на следующие виды.

I. Ограниченные решения, определенные на отрезке  $z \in [0, L]$ , причем  $v(L) > 0$ . Такой вид могут иметь решения задачи Коши (2.6), (2.7) (в этом случае  $L = 1$ ) и задачи (3.1), (3.2). Решение может быть как монотонно возрастающим на всем отрезке, так и иметь максимум  $v_{\max} > 0$  в некоторой точке  $z_{\max} \in (0, L)$ .

II. Ограниченные решения, определенные на отрезке  $z \in [0, L]$ , для которых  $v(L) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow L} v'(z) = -\infty$ . Решение имеет максимум  $v_{\max} > 0$  в точке  $z_{\max} \in (0, L)$ . Такой характер могут иметь решения как задачи (2.6), (2.7) (в этом случае  $L < 1$ ), так и задачи (3.1), (3.2).

III. Ограниченные решения задачи Коши (3.1), (3.2), определенные на бесконечном интервале  $z \in [0, +\infty)$ .

IV. Неограниченные монотонные решения  $v(z)$ , такие что  $\lim_{z \rightarrow z_*} v(z) = +\infty$ , где  $z_* > 0$  – конечно или бесконечно. Решения такого вида также характерны для бегущей волны.

Построение численного решения на всей области определения (отрезке) позволит получить глобальное эталонное решение уравнения (1.2). В случае неограниченной области определения мы можем построить численное решение лишь для ограниченного интервала времени.

### 6.1. Сравнение точных и приближенных решений

В отдельных случаях удастся получить точное решение задачи (5.2)–(5.4) в конечном виде. Эти решения дают возможность непосредственно оценить корректность приближенных решений.

**Пример 1.** В качестве начального примера рассмотрим задачу (2.6), (2.7), когда источник имеет вид  $h(u) = u$ , а закон движения фронта тепловой волны – показательный,  $a(t) = e^t$ . В этом случае в задаче (5.1)

$$G(z, v, v') = (1 - z)v' - \frac{(v')^2}{\sigma} + v, \quad v'_* = \sigma. \quad (6.2)$$

Тогда точное решение задачи имеет вид:

$$v(z) = \sigma z, \quad z \in [0, 1] \quad (6.3)$$

и относится к виду 1. Несмотря на простоту решения сравнение с ним позволяет сделать отдельные выводы о корректности приближенных методов. Очевидно, что решение методом степенных рядов, как и разностные методы, приведет к точному решению. Что касается МГЭ, то легко проверить, что представленный в разделе 5 алгоритм приведет к точному решению уже на первой итерации. Таким образом, уже на примере простого случая, приводящего к линейному решению, мы наблюдаем корректность предложенного алгоритма МГЭ.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь более сложный случай, когда рассматриваемая задача Коши имеет точное аналитическое решение. На этот раз это будет задача (3.1), (3.2) при дробно-линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры ( $\kappa(T) = \frac{\lambda T}{T+c}$ ) и при отсутствии источника –  $h(u) \equiv 0$ . Тогда  $F(u) = \frac{\lambda + u}{\lambda - u}$  и в задаче (5.1):

$$G(z, v, v') = \mu v' - \frac{\lambda + v}{\lambda - v} (v')^2, \quad v'_* = \mu. \quad (6.4)$$

Точное решение задачи

$$v(z) = \lambda \left( 1 - e^{-\frac{\mu z}{\lambda}} \right), \quad z \in [0, +\infty) \quad (6.5)$$

является монотонным и ограниченным и относится к виду III. Решение методом степенных рядов ввиду единственности аналитического решения приведет к ряду Тейлора для решения (6.5). Поэтому сравнивать будем точность решения МГЭ и разностными методами. В табл. 1 приведены погрешности полученных решений на отрезке  $[0, L]$  при различных значениях параметров задачи. Параметр  $h$  в случае разностных методов означает шаг интегрирования, а в случае МГЭ – расстояние между соседними точками коллокации, которые равномерно распределены на рассматриваемом отрезке.

Анализ полученных результатов показал следующее. При достаточно большом значении  $h = 0,1$  наибольшую точность имеют решения МГЭ. Сравнительно большая погрешность метода Рунге–Кутты четвертого порядка в этом случае обусловлена погрешностью на первом шаге, который мы делаем с помощью отрезка ряда. В проведенных расчетах мы использовали отрезки рядов десятой степени. В случае шага  $h = 0,01$  погрешность на первом шаге мала, вследствие чего точность метода Рунге–Кутты высока и превосходит другие методы. Таким

образом, точность решения рассматриваемых задач разностными методами зависит от точности решения в виде отрезка ряда на первом шаге. В данном примере это отрезок ряда Тейлора точного решения (6.5), однако в общем случае радиус сходимости ряда (4.3), построение которого описано в разд. 4, неизвестен, поэтому точность решения непредсказуема.

Таблица 1 – Погрешности приближенных решений (пример 2)

$\lambda$	$\mu$	$h$	$L$	МГЭ	МЭ	МПК
2	0,1	0,1	1	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$
2	0,1	0,1	2	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
2	0,1	0,01	1	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-11}$
2	0,1	0,01	2	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-10}$
2	0,5	0,1	1	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
2	0,5	0,1	2	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$
2	0,5	0,01	1	$7,2 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$
2	0,5	0,01	2	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-9}$
3	0,1	0,1	1	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	0,1	2	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
3	0,1	0,01	1	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-11}$
3	0,1	0,01	2	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-10}$
3	0,5	0,1	1	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
3	0,5	0,1	2	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
3	0,5	0,01	1	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-10}$
3	0,5	0,01	2	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-10}$

Отметим еще одно выявленное преимущество МГЭ перед разностными методами. При фиксированном шаге погрешность решения МГЭ не увеличивается, как у разностных решений, а уменьшается с увеличением интервала интегрирования. Это связано с увеличением числа точек коллокации.

### 6.2. Оценка точности приближенных решений

В следующих двух примерах точные решения в конечном виде найти не удалось, поэтому в качестве оценки точности приближенных решений принята невязка уравнения.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу (2.6),(2.7) при степенном законе движения фронта тепловой волны вида  $a(t) = (t+1)^{\frac{\beta-2}{2\beta-2}}$ , который соответствует источнику  $h(u) = \alpha u^\beta$  при  $\beta \neq 1, 2$ . Тогда в задаче (5.1)

$$G(z, v, v') = (1-z)v' - \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{2}{2-\beta}v - \alpha Dv^\beta; v_* = \sigma. \quad (6.6)$$

Решения этой задачи при  $\sigma = 3$ ,  $\alpha = 1$  и различных значениях  $\beta$  методом граничных элементов представлены на рис. 1. При  $\beta = 2.1, 2.3$  областью определения решения является лишь часть отрезка  $[0, 1]$ :  $z \in [0, L]$ ,  $L < 1$ ,  $v(L) = 0$ . Эти решения относятся к виду II, и решения МГЭ строятся в два этапа, как описано в разд. 5. При больших значениях  $\beta$  мы имеем решения вида I.

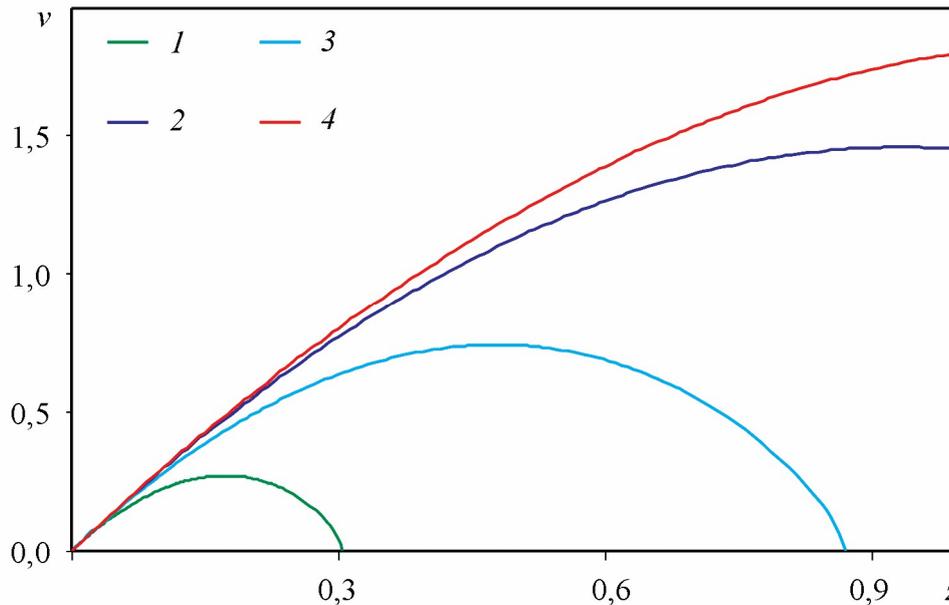


Рис. 1. Решения МГЭ (пример 3): 1 –  $\beta = 2,1$ ; 2 –  $\beta = 2,7$ ; 3 –  $\beta = 2,3$ ; 4 –  $\beta = 3$

Непрерывный вид решений МГЭ позволяет дифференцировать их. Поэтому точность метода оценивалась подстановкой решения и его производных в решаемое уравнение  $vv'' - G(z, v, v') = 0$ . В качестве оценки точности было принято максимальное абсолютное значение левой части внутри интервала решения, т.е. невязка уравнения. В совокупности с выполнением начальных условий малое значение такой оценки показывает хорошую точность полученного решения. В табл. 2 приведем значения невязок для примера 2 при некоторых значениях параметров в сравнении с соответствующими погрешностями из табл. 1. Расчеты показывают хорошую корреляцию невязки и погрешности решений, что дает основания использовать невязку для оценки точности решения.

Таблица 2 – Невязки уравнения (3.1) для решений МГЭ (пример 2).

$\lambda$	$\mu$	$h$	$L$	Невязка	Погрешность
2	0,1	0,1	2	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	0,01	2	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$
2	0,5	0,1	2	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$
2	0,5	0,01	2	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-6}$

Значения невязки уравнения (2.6) для примера 3 при  $\sigma = 3$ ,  $\alpha = 1$  представлены в табл. 3. Сравнительно большая невязка на втором этапе объясняется тем, что граничные условия на нем задаются по решению на первом этапе, т. е. уже с начальной погрешностью. Для сравнения приведем аналогичную оценку точности для решения в виде отрезка степенного ряда (4.3), который, отметим, мы можем построить только для целых значений  $\beta$ . При  $\beta = 3$  невязка уравнения (2.6) для отрезка ряда десятой степени составляет  $1,5 \cdot 10^{-3}$ , а для отрезка двадцатой степени –  $8,2 \cdot 10^{-7}$ , что хуже, чем для решения МГЭ.

Невозможность построения решения в виде ряда при нецелых значениях  $\beta$  приводит к сложностям при решении разностными методами. В рассмотренных случаях для раскрытия особенности на первом шаге мы можем использовать лишь формулу Тейлора третьего порядка вместо отрезка ряда произвольной степени, это приводит к достаточно большой погрешности решения. Сравнение решения МГЭ с разностными решениями при целом значе-

нии  $\beta = 3$  показано на рис. 2. Разностные решения приближаются к решению МГЭ с увеличением порядка точности. Это косвенно свидетельствует, что гранично-элементное решение не уступает в корректности разностным. Отметим, что решение методом Рунге–Кутты с шагом  $h = 0,01$  отличается от решения с шагом  $h = 0,05$  начиная с седьмого знака после запятой и не приведено на графике.

Таблица 3 – Невязки уравнения (2.6) для решений МГЭ (пример 3)

$\beta$	$h$	Невязка на 1-м этапе	Невязка на 2-м этапе
2,1	0,05	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$
2,1	0,01	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
2,3	0,05	$6,7 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$
2,3	0,01	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
2,7	0,05	$2,1 \cdot 10^{-7}$	–
2,7	0,01	$3,4 \cdot 10^{-8}$	–
3	0,05	$1,0 \cdot 10^{-9}$	–
3	0,01	$8,2 \cdot 10^{-10}$	–

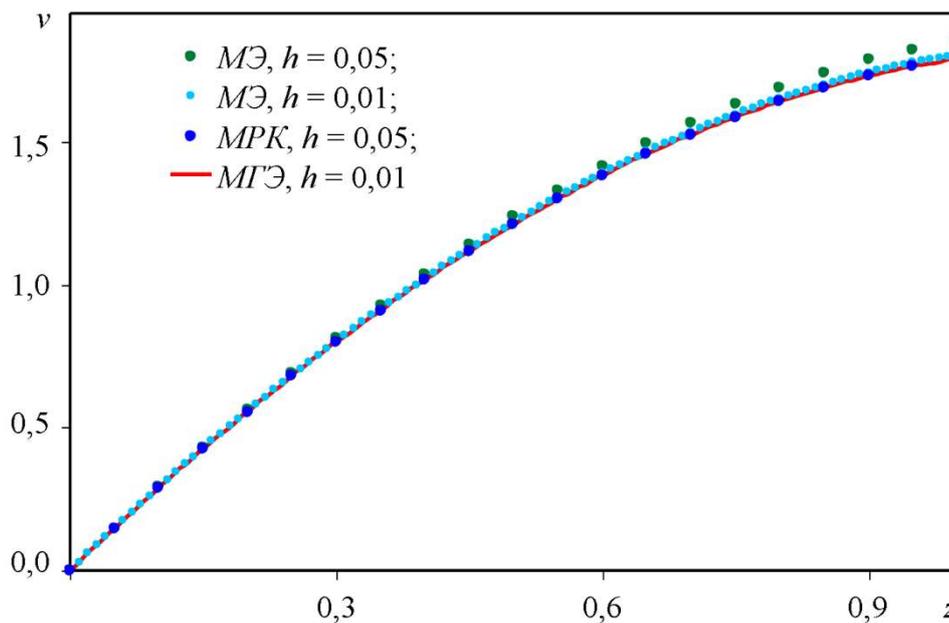


Рис. 2. Сравнение решения МГЭ и разностных решений при  $\beta = 3$  (пример 3)

Таким образом, *пример 3* показал, что метод граничных элементов может быть применен в более широком диапазоне значений параметров, чем другие рассмотренные методы. Непрерывность полученного решения позволяет оценить точность выполнения решаемого уравнения. Сравнение с решениями другими методами показало меньшую погрешность решений МГЭ.

**Пример 4.** В завершение вычислительного эксперимента рассмотрим задачу, имеющую неограниченные решения вида IV. Именно, рассмотрим задачу (3.1), (3.2) для случая показательного коэффициента теплопроводности,  $k(T) = \lambda(e^{CT} - 1)$ , в отсутствие источника, при  $\alpha = 0$ . В этом случае

$$G(z, v, v') = \mu v' - \frac{\lambda}{\lambda + v} (v')^2, \quad v'_* = \mu. \quad (6.7)$$

Оценку точности решения вновь будем проводить с помощью невязки уравнения (3.1). В табл. 4 приведены невязки решений на отрезке  $z \in [0, L]$  для решений МГЭ при различных значениях  $h$  расстояния между соседними точками коллокации, а также для отрезков ряда (4.3) различных степеней  $n$ . Полученные результаты показывают, что решение в виде ряда может иметь преимущество перед решением МГЭ, но при этом сильно зависит от параметров задачи. В свою очередь решения МГЭ слабо зависят от параметров и при этом дают невязки достаточно малого порядка. При этом порядок невязок для решений МГЭ не зависит от величины отрезка интегрирования в отличие от невязок для отрезков рядов.

Для сравнения решений МГЭ с разностными решениями было подсчитано их максимальное расхождение, которое наблюдалось на правом конце отрезка интегрирования. Результаты расчетов, приведенные в табл. 5, вновь показывают, что разностные решения приближаются к решению МГЭ с увеличением порядка точности метода. В качестве решений МГЭ здесь были приняты решения при  $h = 0,01$ .

Таблица 4 – Невязки уравнения (3.1) для решений МГЭ и отрезков рядов (пример 3)

$\lambda$	$\mu$	$L$	МГЭ		Ряд	
			$h = 0,1$	$h = 0,01$	$n = 5$	$n = 10$
1	0,2	1	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-13}$
1	0,2	2	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-10}$
1	0,5	1	$5,6 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$
1	0,5	2	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
2	0,2	1	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-15}$
2	0,2	2	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-13}$
2	0,5	1	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-11}$
2	0,5	2	$5,9 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$

Таблица 5 – Максимальные отклонения разностных решений от решений МГЭ при  $L = 2$  (пример 4)

$\lambda$	$\mu$	МЭ		МПК	
		$h = 0,1$	$h = 0,01$	$h = 0,1$	$h = 0,01$
1	0,2	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$1,92 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^{-6}$	$3,32 \cdot 10^{-6}$
1	0,5	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$2,74 \cdot 10^{-5}$	$2,69 \cdot 10^{-5}$
2	0,2	$9,35 \cdot 10^{-4}$	$9,28 \cdot 10^{-5}$	$6,24 \cdot 10^{-6}$	$6,23 \cdot 10^{-6}$
2	0,5	$5,68 \cdot 10^{-3}$	$5,61 \cdot 10^{-4}$	$4,51 \cdot 10^{-5}$	$4,50 \cdot 10^{-5}$

## 7. Заключение

В статье рассмотрена проблема нахождения точных решений для верификации приближенных методов построения тепловой волны, имеющей конечную скорость движения, для нелинейного уравнения теплопроводности с нелинейностью общего вида и источником. В условиях когда каких-либо строгих утверждений о сходимости приближенных методов доказать не удастся, данная тематика приобретает большую актуальность. При этом построение точных решений сводится к интегрированию задач Коши для ОДУ второго порядка, имеющих особенность перед старшей производной, т. е. к необходимости решить задачу, хотя и более простую, чем исходная, но тоже нетривиальную. Предложены два способа по-

строения: первый основан на методе степенных рядов, второй – на методе граничных элементов. Оба предполагают раскрытие особенности за счет специального выбора базисных функций, однако наборы последних различны, что позволяет, комбинируя подходы, добиваться хороших результатов. Сравнение решений двумя предложенными методами между собой, а также с разностными решениями методом Эйлера и методом Рунге–Кутты 4 порядка позволили сделать следующие основные выводы. В отдельных случаях решения методом степенных рядов и разностными методами имеют большую точность, чем решения МГЭ, а в других – меньшую. При этом решения МГЭ могут быть получены в более широком диапазоне параметров рассмотренных задач, их точность является удовлетворительной для поставленной задачи и в гораздо меньшей степени зависит от значений этих параметров, чем решения в виде ряда и разностные решения. Таким образом, МГЭ является среди использованных наиболее универсальным подходом к решению задач Коши рассмотренного типа для построения эталонных решений нелинейного вырождающегося уравнения теплопроводности. Дальнейшие исследования могут быть связаны с расширением класса используемых решений за счет применения обобщенных бегущих волн, а также с рассмотрением уравнения более общего вида, например содержащего конвективные слагаемые.

### Благодарность

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-07-00407.*

### Литература

1. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
2. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
3. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // В кн.: Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. : Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
4. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 3. – С. 411–417.
5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.
7. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
8. Казаков А. Л., Спёвак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия ИГУ. Серия Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
9. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
10. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спёвак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.

11. Kazakov A. L., Spevak L. F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // *Applied Mathematical Modelling*. – 2016. – Vol. 40, iss. 2. – P. 1333–1343. – DOI: 10.1016/j.apm.2015.06.038.
12. Spevak L. F., Kazakov A. L. Constructing numerical solutions to a nonlinear heat conduction equation with boundary conditions degenerating at the initial moment of time // *AIP Conference Proceedings*. – 2016. – Vol. 1785, iss. 1. – P. 040076. – DOI: 10.1063/1.4967133.
13. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Spevak L. F. A heat wave problem for a degenerate nonlinear parabolic equation with a specified source function // *AIP Conference Proceedings*. – 2018. – Vol. 2053. – P. 030024. – DOI: 10.1063/1.5084385.
14. Казаков А. Л., Неведова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2019. – Т. 59, № 6. – С. 1047–1062. – DOI: 10.1134/S00444466919060085.
15. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // *Сибирские электронные математические известия*. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v16/p1057-1068.pdf>
16. Spevak L. F., Kazakov A. L. Solving a degenerate nonlinear parabolic equation with a specified source function by the boundary element method // *AIP Conference Proceedings*. – 2017. – Vol. 1915. – P. 040054. – DOI: 10.1063/1.5017402.
17. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the Numerical-Analytical Approaches to Solving a Nonlinear Heat Conduction Equation with a Singularity // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
18. Banerjee P. K., Butterheld R. *Boundary element methods in engineering science*. – US : McGraw-Hill Inc., 1981. – 452 p. – ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.
19. Nardini D., Brebbia C. A. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements // *Applied Mathematical Modelling*. – 1983. – Vol. 7, no. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
20. Wrobel L. C., Brebbia C. A. Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction // *Finite elements in water resources VI*. – Springer-Verlag : Berlin, Germany, 1986. – P. 801–811.
21. Tanaka M., Matsumoto T., Yang Q. F. Time-stepping boundary element method applied to 2-D transient heat conduction problems // *Applied Mathematical Modelling*. – 1994. – Vol. 18. – P. 569–576. – DOI: 10.1016/0307-904X(94)90142-2.
22. Tanaka M., Matsumoto T., Takakuwa S. Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 195. – P. 4953–4961. – DOI: 10.1016/j.cma.2005.04.025.
23. Divo E., Kassab A. J. Transient non-linear heat conduction solution by a dual reciprocity boundary element method with an effective posteriori error estimator // *Computers, Materials and Continua*. – 2005. – Vol. 2. – P. 277–288. – DOI: 10.3970/cmcc.2005.002.277.
24. Wrobel L. C., Brebbia C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1987. – Vol. 65. – P. 147–164. – DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
25. Singh K. M., Tanaka M. Dual reciprocity boundary element analysis of transient advection-diffusion // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. – 2003. – Vol. 13. – P. 633–646. – DOI: 10.1108/09615530310482481.
26. Al-Bayati S. A., Wrobel L. C. A novel dual reciprocity boundary element formulation for two-dimensional transient convection–diffusion–reaction problems with variable

- velocity // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2018. – Vol. 94. – P. 60–68. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.06.001.
27. Fendoglu H., Bozkaya C., Tezer-Sezgin M. DBEM and DRBEM solutions to 2D transient convection-diffusion-reaction type equations // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2018. – Vol. 93. – P. 124–134. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.04.011.
28. Powell M. J. D. The Theory of Radial Basis Function Approximation // Light W., ed. Advances in Numerical Analysis. – Oxford, UK : Oxford Science Publications, 1992. – Vol. 2.
29. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – Vol. 23. – P. 285–296. – DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
30. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Spevak L. F. Analytical and numerical construction of heat wave type solutions to the nonlinear heat equation with a source // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 239, no. 2. – P. 111–122. – DOI: 10.1007/s10958-019-04294-x.
31. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical Study of Travelling Wave Type Solutions for the Nonlinear Heat Equation // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2176. – P. 030006. – DOI: 10.1063/1.5135130.
32. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. – М. : Изд-во Юрайт, 2017. – 256 с. – ISBN 978-5-534-02317-6.



**Received:** 16.08.2020  
**Revised:** 24.09.2020  
**Accepted:** 16.10.2020  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.5.045-057

## APPLYING AN UPDATED METHOD OF MARKERS TO DEFINING TRANSIENT FORCE IMPACT UNDER MULTIPHASE FLOWING

V. I. Pegov<sup>a)\*</sup> and I. Yu. Moshkin<sup>b)</sup>

*South Urals Federal Research Center of Mineralogy and Geoecology,  
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ilmen State Nature Reserve,  
Bldg. 1, Miass, 456300, Russian Federation  
Academician V. P. Makeyev State Rocket Centre JSC,  
1 Turgoyakskoye Hwy., Miass, 456300, Russian Federation*

a)  ofpat@mail.ru;

b)  moshkin\_igor@mail.ru

\*Corresponding author. E-mail: ofpat@mail.ru

Address for correspondence: pr. Oktyabrya, 16, Room 103, OFPAT, 456318, Miass, Russian Federation  
Tel.: +7 (351) 328 85 50

Numerical simulation of transient hydrodynamic forces from shaped gas cavities formed in liquid under active interaction of liquid and a jet source of high-temperature gas and intensive heat and mass transfer is performed. To solve the task, a method of coarse particle markers with, as opposed to the classical one, an additional stage, when moving boundaries of different media in cells with interfaces of these media are as if stitched, is updated. In addition, problems of inter-media heat and mass transfer by condensation and evaporation are simultaneously solved. The predicted results are compared with the experimental data. Validation and verification are performed by comparing the analysis results with the experimental data. The applicability of the updated method of coarse particle markers to defining transient force impact under multiphase flowing is demonstrated.

**Keywords:** heat and mass transfer, two-phase flow, method of markers, transient impact, multiphase flow.

### Acknowledgment

*The work was performed with the support from the South Urals Federal Research Center of Mineralogy and Geoecology of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences and the Academician V. P. Makeyev State Rocket Centre JSC under the state assignment to the South Urals Federal Research Center of Mineralogy and Geoecology of the Ural Branch of RAS, theme No. 0431-2014-0001.*

### References

1. Degtyar V.G., Pegov V.I. *Gidrodinamika podvodnogo starta raket* [Hydrodynamics of Underwater Missile Launching]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009, 448 p. (In Russian).
2. Degtyar V.G., Pegov V.I., Moshkin I.Yu., Cheshko A.D. Mathematical modeling of the processes of heat and mass transfer of hot gas jets with fluid during underwater rocket launches. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*, 2019, vol. 57, iss. 5, pp. 742–747. DOI: 10.1134/S004036441905003X. (In Russian).
3. Pegov V.I., Moshkin I.Yu. Dynamic analysis of a ballistic missile model. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2017, vol. 10, iss. 4, pp. 56–63. DOI: 10.14529/mmp170406. (In Russian).
4. Degtyar V.G., Pegov V.I., Cheshko A.D. Investigation of ignition of a submerged jet engine. *Nauchno-technicheskiy Vestnik Povolzhya*. – 2016. – No. 5. – P. 181–189. (In Russian).

5. Pegov V.I., Cheshko A.D., Moshkin I.Yu., Merkulov Ye.S. Experimental modeling and simulation of launching effect on a submarine. In: *A look into the future-2016: proceedings of XIV Youth Scientific and Technical Conference*, Saint Petersburg, CDB ME “Rubin” Publ., 2016, pp. 598–605. (In Russian).
6. Pegov V.I., Moshkin I.Yu. Analysis of fluid dynamics of cavitation launch technique *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, iss. 4, pp. 476–485. DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13408. (In Russian).
7. Pegov V.I., Moshkin I.Yu., Merkulov Ye.S., Cheshko A.B. Numerical simulation of hydrodynamic loads on starting rocket and submarine, *Bulletin of Almaz-Antey JSC*, 2016, no. 3 (18), pp. 65–70. (In Russian).
8. Degtiar V.G., Moshkin I.Yu., Pegov V.I., Kalashnikov S.T., Khlybov V.I. *RU CNC\_RNSG 2015613842* (08 Sept. 2014). (In Russian).
9. Kostin G.F., Degtiar V.G., Kalashnikov S.T., Savelyev V.N., Tyumentsev V.A., Khlybov V.I., Shvaleva R.K. Experimental-analytical methodology used to define parameters of sandy-grained roughness on burned surfaces of composite thermal-protective materials. *Konstruktii iz Kompozitsionnykh Materialov*, 2018, no. 3, pp. 29–39. (In Russian).
10. Kostin G.F., Zakharyevich D.A., Kalashnikov S.T., Savelyev V.N., Shvaleva R.K. Methodology and results of evaluation of variations in thermal and physical characteristics of a carbon fiber composite on the basis of a phenol-formaldehyde binding agent under heating and decomposition. *Konstruktii iz Kompozitsionnykh Materialov*, 2018, no. 4, pp. 63–70. (In Russian).
11. Kalashnikov S.T., Mokin Yu.A., Shvaleva R.K. Design and experimental study of changes in the shape of small lateral surface distortions during ablation of carbon-composite thermal protection of the reentry vehicle model. *Konstruktii iz Kompozitsionnykh Materialov*, 2018, no. 4 (152), pp. 42–47. (In Russian).
12. Mokin Yu.A., Kalashnikov S.T., Shvaleva R.K. Estimate of variance of disturbance aerodynamic normal force coefficient of rotary body with small irregular surface distortions of composite thermal protection coating at supersonic flow. *Konstruktii iz Kompozitsionnykh Materialov*, 2020, no. 3, pp. 3–8. (In Russian).

Подана в журнал: 16.08.2020  
УДК 629.76.085.5:532.5:519.673  
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.045-057

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕРНИЗИРОВАННОГО МЕТОДА МАРКЕРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ МНОГОФАЗНОМ ОБТЕКАНИИ

В. И. Пегов<sup>а)</sup>\*, И. Ю. Мошкин<sup>б)</sup>

*Южно-Уральский федеральный научный центр минералогии и геоэкологии  
Уральского отделения Российской академии наук,  
к. 1, Ильменский заповедник, 456300, г. Миасс, Российская Федерация  
АО «Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева»,  
1, Тургоякское шоссе, 456300, г. Миасс, Российская Федерация*

<sup>а)</sup>  ofpat@mail.ru;

<sup>б)</sup>  moshkin\_igor@mail.ru

\*Ответственный автор. Электронная почта: ofpat@mail.ru

Адрес для переписки: пр. Октября, 16, к. 103, ОФПАТ, 456318, г. Миасс, Российская Федерация  
Тел.: +7 (351) 328–85–50

Проведено численное имитационное моделирование нестационарных гидродинамических сил от газовых полостей сложной формы, образующихся в жидкости при активном взаимодействии жидкости и струйного источника высокотемпературного газа при интенсивном тепломассообмене. Для решения данной задачи был модернизирован метод маркеров крупных частиц, когда, в отличие от классического, вводится дополнительный этап, на котором происходит «сшивка» подвижных границ различных сред в ячейках, где проходит раздел этих сред. При этом одновременно решаются задачи тепломассообмена между средами, конденсацией и испарением. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными. Валидация и верификация проведены путем сравнения результатов расчетов с опытными данными. Показана возможность использования модернизированного метода маркеров крупных частиц для определения нестационарных гидродинамических сил при многофазном обтекании.

**Ключевые слова:** тепломассообмен, двухфазное течение, метод маркеров, нестационарное воздействие, многофазное обтекание.

### 1. Введение

Выход автономного подводного аппарата, предназначенного для проведения научно-исследовательских и спасательных работ, из транспортного контейнера осуществляется работой донного газогенератора, который создает на днище контейнера газовую область с повышенным давлением и температурой. При выходе аппарата из контейнера (раскупорке) происходит истечение сгенерируемого высокотемпературного газа в жидкость. В результате возникает сложная, существенно нестационарная картина взаимодействия горячих струй газа с водой. В течение многих лет ГРЦ Макеева проводит расчетно-теоретические и экспериментальные исследования подводного старта аппаратов и сопутствующих ему процессов, в частности со струйным истечением высокотемпературных газовых струй в жидкость [1–7].

В практике проектирования рассматривается широкий круг возможных схем старта. Отметим основные особенности различных схем с точки зрения процессов газодинамики и тепломассообмена. Так, если старт подводного аппарата осуществляется с применением аккумулятора давления и запуском двигательной установки после выхода из контейнера, то

движение аппарата в контейнере будет происходить только за счет сил давления. В случае применения стартовых двигателей или маршевого двигателя необходимо учитывать тягу и ее изменение от противодействия. Тип источника продуктов сгорания, его расположение, схема подачи рабочего газа, химический состав продуктов сгорания будут также влиять на газодинамические и тепловые параметры.

Другим определяющим фактором является схема расположения амортизации аппарата. Пояса горизонтальной амортизации могут располагаться на аппарате или контейнере. Газодинамические и тепловые процессы в минометной схеме старта существенным образом зависят от обводов поясов амортизации, их расположения, степени обтюрации кольцевого зазора. В соответствии с этими особенностями принимается та или иная схематизация течения. Влияние вертикальной амортизации выражается посредством упругих сил на пути, соизмеримом с величиной деформации элементов вертикальной амортизации. В пусковых установках применяются также различные устройства удержания, фиксирующие аппарат на пусковом столе до достижения определенной величины поршневой силы. При «сухом» способе старта с подводного носителя для герметизации верхнего среза контейнера применяется жесткая или эластичная мембрана; известны также устройства, обеспечивающие равномерное открытие контейнера посредством хода аппарата. Процессы раскрытия верхнего среза контейнера и формирования газовой полости у верхнего среза контейнера при подводном старте существенным образом влияют на газодинамические параметры в свободные объемы контейнера. Кроме того, для уменьшения гидродинамических нагрузок на аппарат при старте с движущегося носителя могут применяться различные устройства, обеспечивающие двухфазное обтекание аппарата на подводном участке траектории, например газогенераторы наддува газовой каверны. Эти особенности обтекания оказывают влияние на изменение давления, как на корпус аппарата, так и в стенки контейнера, что требуется учитывать при расчете гидродинамических нагрузок и кинематических параметров движения аппарата при выходе из контейнера. Более плотная компоновка аппарата и элементов стартовой системы в ограниченном объеме контейнера носителя, усложнение геометрии трактов приводят к локальным неравномерностям газодинамического и теплового воздействия.

Цель работы – разработка метода определения силового воздействия на подводный аппарат с учетом нестационарного силового воздействия от многофазной среды с учетом теплообмена между различными компонентами среды при отделении от носителя. Для учета тепловых процессов проведена модернизация метода маркеров крупных частиц; разработан программный комплекс имитационного моделирования тепловых процессов при многофазном обтекании. Проводится сравнение расчетов с экспериментальными данными.

## 2. Материал и методика

Для решения задачи о движении границ многофазных сред сейчас существует множество различных численных методов, недостатком которых является недостаточная точность при решении задачи теплообмена при протекании взаимодействий в высокотемпературных многофазных газовых потоках. Для решения задачи о движении границы раздела двух сред «жидкость–газ» был модернизирован так называемый метод маркеров SMAC (Simplified Marker-and-Cell Method). (Классический метод позволяет проводить расчеты многофазной среды без учета теплообмена). Основная идея предлагаемого метода заключается в расщеплении каждого временного шага на два этапа:

- 1) на первом этапе проводится сквозной счет параметров состояния жидкости и газа независимо друг от друга, с одновременным рассмотрением маркеров частиц жидкости и газа, перемещающихся со скоростью своих сред, что позволяет определить скорость и положение подвижных границ этих сред на этом промежутке времени;

2) на втором этапе происходит «сшивка» подвижных границ двух сред в ячейках, где проходит граница раздела этих сред, при этом одновременно решается задача тепломассообмена между жидкостью и газом.

Для первого этапа используется стандартная система уравнений SMAC – метода, на втором этапе расчета рассматривается двухфазная среда.

1. Уравнение состояния для воды:

$$e_1 = \frac{P_1 - C_0^2(\bar{\rho}_1 - \rho_0)}{(\gamma_1 - 1)\bar{\rho}_1}, \quad (1)$$

где скорость звука в воде  $C_0 = 1515$  м/с;  $\gamma_1 = 5,6$ ;  $\rho_0 = 1020$  кг/м<sup>3</sup>;  $\bar{\rho}_1$  – среднеобъемная плотность жидкости (воды).

2. Газ с уравнением состояния:

$$e_2 = \frac{P_2}{(\gamma_2 - 1)\bar{\rho}_2}, \quad (2)$$

где  $\gamma_2 = 5,6$  – показатель адиабаты газа;  $\bar{\rho}_2$  – среднеобъемная плотность газа.

В элементарном объеме  $V$  может находиться одновременно и та, и другая среда, занимая объемы  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. Объемную долю газа в ячейке будем характеризовать величиной  $\xi = V_2/V_1$ , а  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – истинные плотности среды;  $\rho_1 = \bar{\rho}_1(1-\xi)$  – плотность жидкости внутри общего объема  $V$ ;  $\rho_2 = \bar{\rho}_2\xi$  – плотность газа внутри общего объема  $V$ ;  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  – общая плотность.

Законы сохранения запишем для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат в следующем виде:

– уравнение массы для общей плотности среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho W) = 0,$$

– уравнение массы для газа:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 W) = M,$$

– уравнение импульсов для общей среды:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u W) + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v W) + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

– уравнение энергии для общей среды:

$$\frac{\partial \left( e + \rho \frac{W^2}{2} \right)}{\partial t} + \text{div} \left[ \left( e + \rho \frac{W^2}{2} \right) W \right] + \text{div}(PW) = 0,$$

– уравнение энергии для газа:

$$\frac{\partial \left( e_2 + \rho_2 \frac{W^2}{2} \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \left( e_2 + \rho_2 \frac{W^2}{2} \right) W \right] + \frac{\rho_2}{\rho} W \cdot \operatorname{grad} P + K P_2 \operatorname{div} W = 0.$$

Здесь  $W$  – вектор скорости;  $u, v$  – составляющие  $W$  вдоль  $z$  и  $r$  соответственно;  $M$  – отнесенная к единице объема быстрота прироста массы в данной ячейке за счет парообразования.

Слагаемое  $P \operatorname{div} W$  в уравнении энергии определяет работу, совершенную над единичным объемом общей среды за единицу времени, а  $K$  – долю этой работы, приходящейся на газ.

Для определения коэффициента  $K$  необходимо найти работу, совершаемую при сжатии той и другой среды от давления  $P - dP$  до давления  $P$ . Эта работа с учетом адиабатичности определяется следующим образом:

$$dA_1 = \frac{V(1-\xi)P_1}{\gamma_1(P_1 - P_0)} dP; \quad dA_2 = \frac{V\xi}{\gamma_2} dP; \quad P_0 = \frac{\rho_0 C_0^2}{\gamma_1},$$

а долю работы  $dA_2$  в общей работе  $dA = dA_1 + dA_2$  через коэффициент  $K = \frac{dA_2}{dA}$  можно определить следующим образом:

$$K = \frac{\xi \gamma_1 (P + P_0)}{\xi (P + P_0) \gamma_1 + (1 - \xi) P \gamma_2}. \quad (4)$$

Для улучшения устойчивости счета первого этапа в уравнениях (3) и (4) вместо  $P$  используем  $P + q$ , где  $q$  – искусственное вязкостное давление, которое определим следующим образом:

$$q = -\mu C_0^2 h \frac{\partial u}{\partial r} \text{ при } \frac{\partial u}{\partial r} < 0, \quad q = 0 \text{ при } \frac{\partial u}{\partial r} \geq 0, \quad (5)$$

где  $h$  – размер ячейки;  $\mu$  – искусственная вязкость.

В системе уравнений (1)–(5) нет уравнения для определения объемной доли газа. Кроме того, из уравнений состояния (1) и (2) давление может быть определено только в случае заполнения ячейки одной средой: либо газом ( $\xi = 1$ ), либо жидкостью ( $\xi = 0$ ).

Для определения давления в смешанных ячейках, т. е. заполненных жидкостью и газом, предложена следующая схема. Термодинамическая система «газ–жидкость» в момент поступления газа в объем, заполненный жидкостью и газом, является термодинамически неравновесной, так как газ – среда более энергоемкая, чем жидкость. Установление термодинамического равновесия происходит в результате обмена внутренней энергией между газом и жидкостью внутри одной ячейки. Это происходит за счет работы сжатия сред. При этом суммарная внутренняя энергия ячейки не изменяется, а давление устанавливается одинаковое в жидкости и газе. Сжатие на первом этапе будем считать адиабатическим, т. е. можно записать:

$$e_1 + e_2 = \operatorname{const}(\xi); \quad P_2 \xi^{\gamma_2} = \operatorname{const}. \quad (6)$$

Учитывая все это, получим дифференциальное уравнение для давления в жидкости  $P_1$ :

$$\frac{dP_1}{d\xi} = \frac{P_1 + \rho_0 C_0^2 + P_2(\gamma_1 - 1)}{1 - \xi}; \quad \xi \in [0,1]; \quad (7)$$

а давление газа  $P_2$  определяется из закона адиабатического сжатия:

$$P_2(\xi) = P_2(\xi^n) \left( \frac{\xi^n}{\xi^{n+1}} \right)^{\gamma_2}; \quad \xi \in [0,1], \quad (8)$$

где  $\xi^n$  – объемная доля в ячейке до перераспределения энергий в  $n$  – временном слое.

Уравнение (7) будем интегрировать методом Рунге–Кутты на интервале  $[\xi^n, \xi^{n+1}]$ .  
Значение объемной доли  $\xi^{n+1}$  определяем из условия:

$$P_1(\xi^{n+1}) = P_2(\xi^{n+1}).$$

Таким образом, решаем (7) с учетом (8) при следующих начальных условиях:

$$P_1(\xi^n) = \frac{e_1(\gamma_1 - 1) + C_0^2[\rho_1 - \rho_0(1 - \xi^n)]}{1 - \xi^n} \rho_1; \quad P_2(\xi^n) = \frac{e_2(\gamma_2 - 1)}{\xi^n} \rho_2. \quad (9)$$

В результате получаем объемную долю газа и давление в смешанной ячейке. На следующем шаге, исходя из особенностей постановки задачи, определяется изменение температуры газа в смешанных ячейках за счет тепломассообмена между газом и жидкостью, а также за счет фазовых переходов. При этом считается, в отличие от первого шага, что эти процессы носят изохорический характер, т. е. в этом случае газ не совершает работы и его объемная доля не изменяется, а меняется только его температура и давление, а следовательно, граница раздела двух сред сохраняется.

Для определения потери энергии при фазовом переходе воспользуемся следующим уравнением:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{h_2 - h_1}{T(V_2 - V_1)}, \quad (10)$$

где  $h_2 - h_1$  – представляет собой разность энтальпий сосуществующих фаз. Эта разность энтальпий является теплотой фазового перехода, т. е. теплотой, которая поглощается (или выделяется) веществом в процессе фазового перехода;  $V_1$  – удельный объем жидкости на линии раздела,  $V_2$  – удельный объем пара на линии раздела.

В расчетах теплоту парообразования определяем из следующего равенства:

$$r_0 = a - bT, \quad (11)$$

где  $a$  есть величина постоянная для рассматриваемого газа,  $b$  – коэффициент, который найдем из соотношения:

$$\ln \frac{P_s}{P_s(T_s)} = \frac{a}{R} \left( \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T} \right) + \frac{b}{R} \ln \frac{T_s}{T}. \quad (12)$$

Здесь  $P_s$  есть давление насыщения при температуре  $T_s$ .

По вышеизложенному методу была составлена программа на ЭВМ, с помощью которой были проведены расчеты динамики всплывающих газовых полостей, заполненных горячим или холодным газом. При этом начальное давление газов отличалось от давления окружающей жидкости. Расчеты позволили проследить динамику свободных границ газовых полостей в жидкости, их деформацию вплоть до разрушения (распада). Данный программный комплекс позволяет также проводить имитационное моделирование движения и теплообмена многофазной среды в контейнере при выходе из него аппарата.

### 3. Результаты и обсуждение

Полученная система уравнений (раздел 2) была реализована в программном комплексе CNC\_RGSKK[8], разработанным Южно-Уральским федеральным научным центром минералогии и геоэкологии УрО РАН совместно с АО «Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева» в рамках государственного задания ЮУ ФНЦ МиГ УрО РАН по теме № 0431-2014-0001. Программный комплекс зарегистрирован в Роспатенте. Для подтверждения работоспособности модернизированного метода маркеров крупных частиц, а также созданного на его основе программного комплекса CNC\_RGSKK, полученных результатов имитационного моделирования и проверки силового воздействия на аппарат были проведены экспериментальные исследования с использованием пространственной модели ( $M = 1:10$ ) на установке (рис. 1), состоящей из форкамеры 1, в которую поступал воздух из магистрали высокого давления, модели контейнера 2 и модели аппарата 3 с установленными на нем двумя поясами амортизации 4 и одним поясом обтюрации 5, расположенным в нижней части аппарата.

Необходимое противодействие на выходе из контейнера создавалось дополнительным поддувом газов в емкость, окружающую модель аппарата и контейнера.

Методика эксперимента строилась в предположении квазистационарности процессов. Варьировались следующие параметры:

- положение аппарата относительно контейнера;
- степень обтюрации кольцевого зазора;
- давление в форкамере;
- давление среды на выходе из контейнера.

Отношение давления на выходе из кольцевого зазора к давлению в задонном объеме  $\bar{P} = \frac{P_H}{P_1}$  составляло 0,2...0,66. На модель аппарата наносился визуализационный состав.

В процессе эксперимента при выходе на стационарный режим замерялось давление в 30–40 точках на аппарате и контейнере.

На рис. 2 представлена типичная фотография реализуемой в кольцевом зазоре картины течения при прохождении аппаратом безразмерного пути 0,08, когда зона равномерного течения отсутствует. При всех исследуемых режимах в плоскостях I и III (напротив широких протоков) отчетливо видны интенсивные струйные течения на всем промежутке между первым и вторым поясами амортизаторов. В плоскостях II и IV реализуется сложное вихревое течение.

При увеличении степени обтюрации струйные течения становятся более отчетливыми, при этом, чем больше перепад давления между входным и выходным сечениями кольцевого зазора, тем выше по потоку перемещается система вихревых и возвратных течений (плоскости II и IV на рис. 2).

В верхнем поясе амортизаторов поток перемешивается, и течение становится близким к равномерному. Анализируя полученные экспериментальные результаты по картине течения газов в кольцевом зазоре, можно сделать вывод, что картина течения в основном определяется конструктивным заполнением кольцевого зазора, т.е. геометрическими факторами, и

слабо зависит от величины внешнего противодействия. Неравномерность проходных сечений вдоль окружности зазора между аппаратом и контейнером оказывает значительное влияние на характер течения.

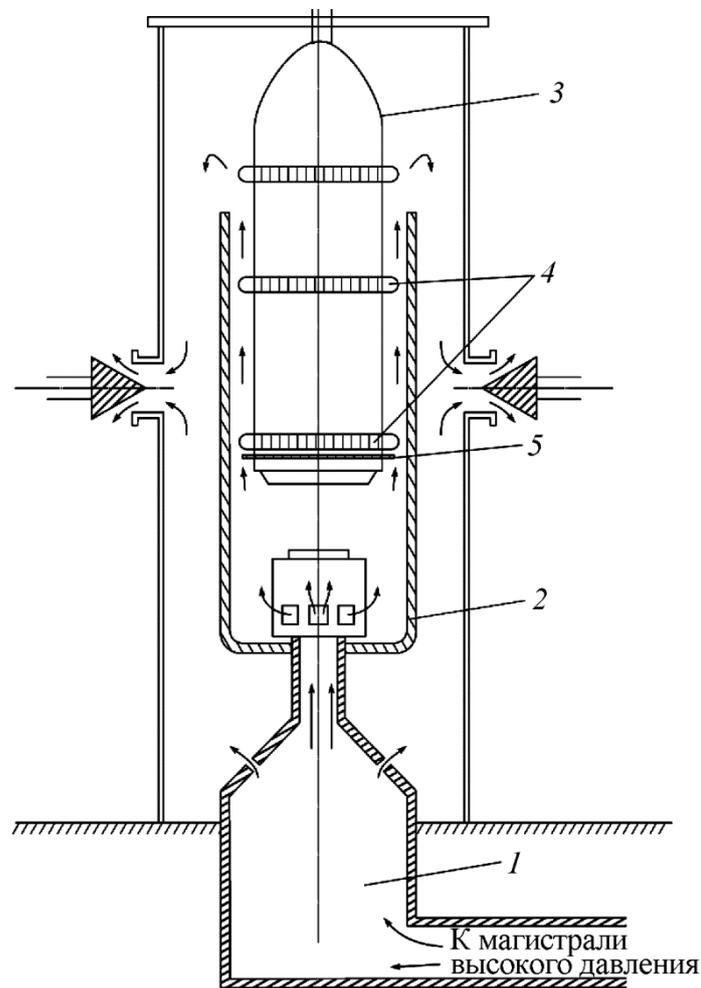


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Немаловажным вопросом, особенно при расчетах процесса теплообмена в задонном объеме, является изучение картины течения, зависящей как от используемых стартовых устройств, так и от положения аппарата в контейнере. В экспериментах изучалась картина течения, реализуемая для случаев старта аппарата с помощью односоплового и многосоплового двигателя первой ступени и старта с использованием аккумулятора давления. Для последнего случая исследовалось влияние некоторых конструктивных особенностей (различные отражательные козырьки и щитки) на газодинамическую картину течения. Отношение диаметра аппарата к диаметру контейнера во всех экспериментах составляло 0,9. В результате проведенных экспериментальных исследований выявлено, что в задонном объеме картина течения зависит от положения аппарата в контейнере и характеризуется глубиной проникновения струй. При старте с помощью многосоплового стартового двигателя картина течения несколько усложняется. Дополнительно в центральной части днища контейнера возникают участки стекания направленных навстречу друг другу течений, формирующих отраженный в сторону днища аппарата поток, оканчивающийся вихревыми течениями.

При выходе аппарата из контейнера газы из кольцевого зазора поступают в объем газовой полости, однако наиболее интенсивный ее рост происходит после прохождения аппаратом пути, равного его длине, когда цилиндрическая часть аппарата проходит обтюрирующий пояс.

В это время давление газов в контейнере, как правило, превышает давление окружающей среды, и газ из контейнера начинает перетекать в газовую полость. Вследствие большого массового расхода газов давление в полости возрастает и становится больше гидростатического, свободная граница полости приобретает значительные скорости по нормали. При выходе кормы аппарата из полости часть газов захватывается изделием и за его кормой образуется донная газовая каверна, которая имеет форму, близкую к цилиндрической. По мере роста газовых объемов давление газов в них падает и становится меньше гидростатического. Вследствие разрежения объем газовой полости начинает уменьшаться и в некоторый момент времени происходит полное схлопывание, объем донной газовой каверны полностью отделяется от объема контейнера. Валидация и верификация разработанного математического моделирования и программного комплекса проведены для двух случаев: при выходе кормы аппарата из контейнера и при продуве заполненного водой контейнера горячей струей газа.



Рис. 2. Картина течения газа в кольцевом зазоре  $\bar{P} = 0,52$ ;  $\bar{S}_{обт,1} = 80 \%$ ;  $\bar{S}_{обт,2} = 56 \%$

На рис. 3 представлен график давления по поверхности аппарата в момент выхода его из контейнера, на рис. 4 – график зависимости от времени давления в газовом пузыре, образующемся с верхнего среза контейнера, в сравнении с экспериментом. На рис. 3–6 приведены распределения безразмерного давления и температуры, а также изменение коэффициента давления по безразмерному времени в газовой полости (рис. 3). Сравнение на рис. 3 и 4 при-

ведено в виде графиков зависимостей безразмерной температуры газовой среды  $T/T_0$  и безразмерного давления  $P/P_0$  в задонной области в зависимости от безразмерного времени, рассчитываемого по формуле

$$\bar{t} = t\sqrt{P_0 / \rho_{жс}} / L.$$

Здесь  $T_0$  – начальная температура стенки;  $P_0$  – гидростатическое давление на верхнем срезе шахты;  $L$  – длина модели;  $\rho_{жс}$  – плотность жидкости.

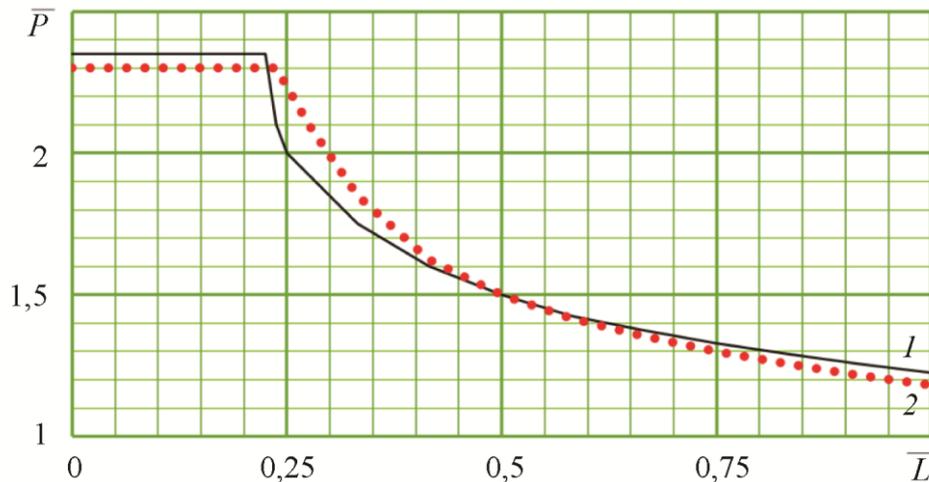


Рис. 3. Распределение давления по длине аппарата: 1 – расчет; 2 – эксперимент

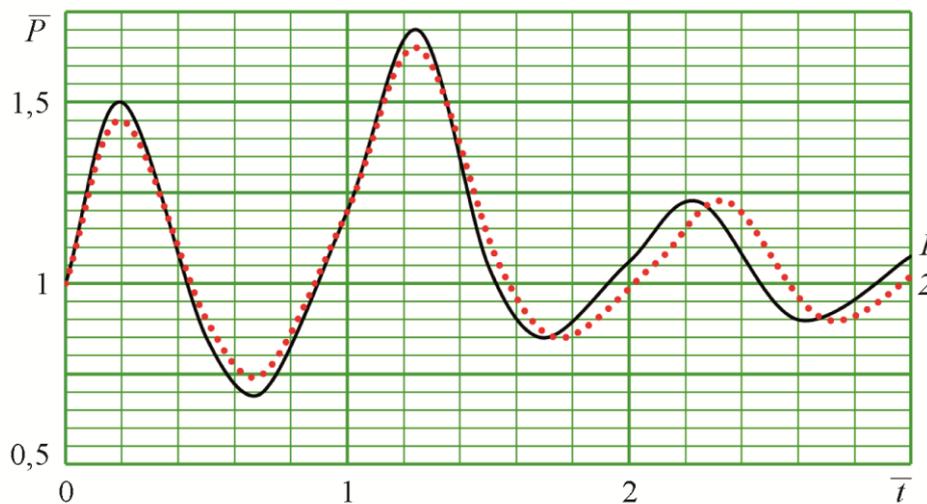


Рис. 4. Зависимость от времени давления в газовой полости: 1 – расчет; 2 – эксперимент

На рис. 5 и 6 приведены графики зависимостей от времени давления и температуры парогазовой смеси, образующейся в объеме шахты при старте аппарата на маршевом двигателе из затопленного водой контейнера [5]. На рис. 3–6 видим, что результаты имитационного моделирования удовлетворительно согласуются с экспериментальными. В работах [9–12] приведены результаты определения теплового и силового воздействия на аппараты при многофазном обтекании при больших скоростях при движении в атмосфере.

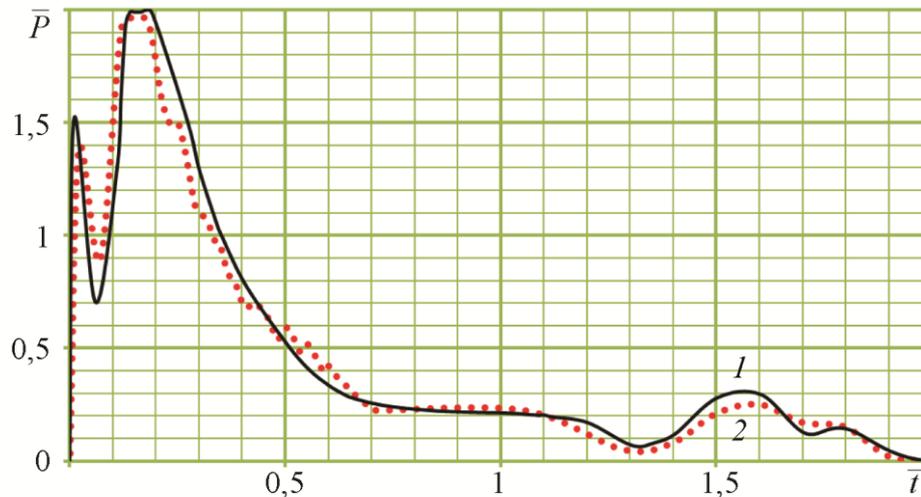


Рис. 5. Зависимость от времени давления парогазовой смеси в контейнере:  
1 – расчет; 2 – эксперимент

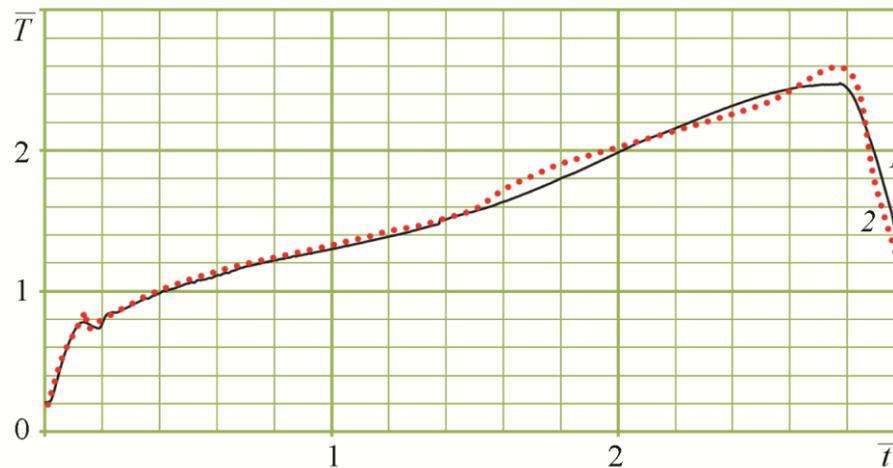


Рис. 6. Зависимость от времени температуры парогазовой смеси в контейнере:  
1 – расчет; 2 – эксперимент

В целом полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенная математическая модель адекватно отражает физические процессы, протекающие при подводном старте аппарата, и может быть использована для решения задач гидродинамики по определению формы образующихся в жидкости газовых полостей и распределения давления по поверхности аппарата и носителя. Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных служит подтверждением достоверности и надежности разработанного метода, который может стать основой для численного моделирования физических процессов, сопровождающих динамику автономных самоходных подводных и надводных аппаратов, обеспечивающих изучение арктического шельфа, поиска полезных ископаемых на дне Северного Ледовитого океана, а также доставку грузов в труднодоступные районы Арктики, эвакуацию людей, проведение подводных и спасательных работ.

#### 4. Заключение

На основе метода маркеров крупных частиц разработан математический метод определения теплового и силового воздействия на аппарат при многофазном обтекании. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными. Создан программный ком-

плекс, позволяющий проводить имитационное моделирование силового и теплового воздействия на аппарат при движении его в многофазной среде.

### Благодарность

*Работа выполнена при поддержке Южно-Уральского федерального научного центра минералогии и геоэкологии УрО РАН и АО «Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева» в рамках государственного задания ЮУ ФНЦ МуГ УрО РАН по теме № 0431-2014-0001.*

### Литература

1. Дегтярь В. Г. Пегов В. И. Гидродинамика подводного старта ракет. – М. : Машиностроение, 2009. – 448 с.
2. Математическое моделирование процессов теплообмена горячих газовых струй с жидкостью при подводном старте ракет / В. Г. Дегтярь, В. И. Пегов, И. Ю. Мошкин, А. Д. Чешко // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 5. – С. 742–747.
3. Пегов В. И., Мошкин И. Ю. Расчет динамики баллистической модели // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 56–63.
4. Дегтярь В. Г., Пегов В. И., Чешко А. Д. Исследование запуска реактивного двигателя в воде // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – № 5. – С. 181–189.
5. Экспериментальное и численное моделирование стартового воздействия на подводную лодку / В. И. Пегов, А. Д. Чешко, И. Ю. Мошкин, Е. С. Меркулов // Сб. «Взгляд в будущее-2016» : труды XIV молодежной научно-технической конференции. – Санкт-Петербург : ЦКБ МТ «Рубин», 2016. – С. 598–605.
6. Пегов В. И., Мошкин И. Ю. Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет // Челябинский физико-математический журнал. – 2018. – Т. 3, № 4. – С. 476–485. – DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13408.
7. Численное моделирование гидродинамических нагрузок на стартовую ракету и подводную лодку / В. И. Пегов, И. Ю. Мошкин, Е. С. Меркулов, А. Д. Чешко // Вестник Концерна ПВО «Алмаз-Антей». – 2016. – № 3 (18). – С. 65–70. – ISSN 2542-054.
8. Программа для ЭВМ CNC\_RNSG : свидетельство о регистрации RU 2015613842 / Дегтярь В. Г., Мошкин И. Ю., Пегов В. И., Калашников С. Т., Хлыбов В. И. – № 2014619029 ; заявл. 08.09.2014 ; опубл. 26.03.2015.
9. Методология экспериментальных и расчетных работ по определению параметров песочно-зернистой шероховатости обгарных поверхностей / Г. Ф. Костин, В. Г. Дегтярь, С. Т. Калашников, В. Н. Савельев, В. А. Тюменцев, В. И. Хлыбов, Р. К. Швалева // Конструкции из композиционных материалов. – 2018. – № 3. – С. 29–39.
10. Методика и результаты оценки изменения теплофизических характеристик углепластика на основе фенолформальдегидного связующего при нагреве и разложении / Г. Ф. Костин, Д. А. Захаревич, С. Т. Калашников, В. Н. Савельев, Р. К. Швалева // Конструкции из композиционных материалов. – 2018. – № 4. – С. 63–70.
11. Калашников С. Т., Мошкин И. Ю., Швалева Р. К. Расчетно-экспериментальное исследование изменения формы малых искажений боковой поверхности в процессе абляции углепластикового теплозащитного покрытия модели спускаемого летательного аппарата // Конструкции из композиционных материалов. – 2018. – Вып. 4 (152). – С. 42–47.
12. Мошкин И. Ю., Калашников С. Т., Швалева Р. К. Оценка дисперсии коэффициента возмущающей аэродинамической нормальной силы тела вращения с малыми случайными искажениями поверхности композитного теплозащитного покрытия при сверхзвуковом обтекании // Конструкции из композиционных материалов. – 2020. – № 3. – С. 3–8.



**Received:** 03.08.2020

**Revised:** 08.09.2020

**Accepted:** 16.10.2020

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.5.058-069

## THE INFLUENCE OF THE CONSTRUCTIVE FEATURES OF THE PLASMOTRON ON THE QUALITY OF THE CUT DURING AIR-PLASMA CUTTING OF SHEET METALS

S. V. Anakhov<sup>1, a)</sup>, B. N. Guzanov<sup>1, b)</sup>, N. B. Pugacheva<sup>2, c)</sup>,  
T. M. Bykova<sup>2, d)\*</sup>, and A. V. Matushkin<sup>3, e)</sup>

<sup>1</sup>Russian State Vocational Pedagogical University,  
11 Mashinostroiteley St., Ekaterinburg, 620012, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

<sup>3</sup>B.N. Yeltsin Ural Federal University,  
19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation

- a) <http://orcid.org/0000-0003-1460-6305> [sergej.anahov@rsvpu.ru](mailto:sergej.anahov@rsvpu.ru);  
b) <http://orcid.org/0000-0001-5698-0018> [guzanov\\_bn@mail.ru](mailto:guzanov_bn@mail.ru);  
c) <http://orcid.org/0000-0001-8015-8120> [nat@imach.uran.ru](mailto:nat@imach.uran.ru);  
d) <http://orcid.org/0000-0002-8888-6410> [tatiana\\_8801@mail.ru](mailto:tatiana_8801@mail.ru);  
e) <http://orcid.org/0000-0001-7309-1618> [227433@rambler.ru](mailto:227433@rambler.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [tatiana\\_8801@mail.ru](mailto:tatiana_8801@mail.ru)

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 43; fax: +7 (343) 374 53 30

The features of structure formation in the heat-affected zone, which are formed in the process of plasma cutting of 10 mm and 36 mm thick St3ps steel sheets, are presented. Cutting of thick steel is accompanied by high carburization, increasing hardness of the surface layer, and increasing surface roughness parameters. The research results allow us to conclude that the developed PMVR-9.1 plasmatron makes it possible to perform sufficiently high-quality cutting of sheet steel with a thickness of up to 40 mm and more. However, butt welding after plasma cutting without preliminary machining can be performed for a steel thickness of 10 mm.

**Keywords:** steel, plasmatron, plasma cutting, microstructure, roughness, microhardness.

### Acknowledgment

*This work was supported by the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation for 2018–2019, No. 13.10317.2018/11.12 (Reg. No. R&D AAAA-A18-118110790009-3).*

### References

1. Kaidalov A.A. *Sovremennye tekhnologii termicheskoi i distantsionnoi rezki konstruktsionnykh materialov* [Modern Technologies of Thermal and Remote Cutting of Constructional Materials]. Kiev, Ekotekhnologiya Publ., 2007, 456 p. (In Russian).
2. Lashchenko G.I. *Plazmennaya rezka metallov i splavov* [Plasma Cutting of Metals and Alloys]. Kiev, Ekotekhnologiya, 2003, 64 p. (In Russian).
3. Koroteev A.C., Mironov V.M., Svirchuk Yu.S. *Plazmotrony. Konstryktsii, kharakteristiki, raschet* [Plasmotrons. Designs, characteristics, calculation]. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1993, 296 p. (In Russian).

4. Zhukov M.F., An'shakov A.S. *Osnovy rascheta plazmotronov lineinoi skhemy* [Bases of Calculation of Plasmotrons of the Linear Scheme]. Novosibirsk, Institut teplofiziki Sibirskogo otdeleniia Rossiiskoi akademii nauk SSSR, 1979, 146 p. (In Russian).
5. Donskoi A.V., Klubnikin V.S. *Elektroplazmennyye protsessy i ustanovki v mashinostroenii* [Electroplasma Processes and Installations in Mechanical Engineering]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1979, 221 p. (In Russian).
6. Anakhov S.V. and Pykin Yu.A. *Plazmotrony: problema akusticheskoi bezopasnosti. Teplofizicheskie i gazodinamicheskie printsipy proektirovaniya maloshumnykh plazmotronov* [Plasmotrons: The Problem of Acoustic Safety. Thermal Physic and Gas-Dynamic Principles of Design of a Low-Noise Plasmotrons]. Yekaterinburg, Ural. Otd., Ross. Akad. Nauk, 2012. (In Russian).
7. Chieu Kuang Fi. *Issledovanie effektivnosti tekhnologii uzkostruinoi plazmennoi rezki metallov* [Investigation of the efficiency of narrow jet plasma technology for metal cutting]. PhD. Theses, Saint-Petersburg, 2008, 143 p. (In Russian).
8. Shalimov M.P., Anakhov S.V., Pykin Iu.A., Matushkin A.V., Matushkina I.Yu. Estimation of efficiency of gas vortex stabilization in metal cutting plasma torches. *Svarka i Diagnostika*, 2018, no. 2, pp. 57–61. (In Russian).
9. Anakhov S.V. *Printsipy i metody proektirovaniia v elektroplazmennyykh i svarochnykh tekhnologiiakh: ucheb. posobie* [The principles and design methods in electroplasma and welding technologies]. Ekaterinburg, Izd-vo Ros. Gos. Prof-ped. Un-ta Publ., 2018, 165 p. (In Russian).
10. Anakhov S.V., Pykin Yu.A., Matushkin A.V. Improving the efficiency of the gas-vortex stabilization system in plasmotrons for high-precisioncutting of metals. *Svarochnoe Proizvodstvo*, 2019, no. 4, pp. 27–30. (In Russian).
11. Anakhov S.V., Guzanov B.N., Matushkin A.V., Pugacheva N.B., Pykin Y.A. Influence of plasma torch design on cutting quality during precision air-plasma cutting of metal. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2020, vol. 63 (2), pp. 155–162. (In Russian). DOI: 10.17073/0368-0797-2020-2-155-162.
12. GOST 8233-56. Steel. Microstructure standards. Moscow, IPK Izdatelstvo Standartov Publ., 2004. (In Russian).

Подана в журнал: 03.08.2020  
УДК 620.18:621.791; 53.06:09,67.08  
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.058-069

## ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛАЗМОТРОНА НА КАЧЕСТВО РЕЗА ПРИ ВОЗДУШНО-ПЛАЗМЕННОМ РАСКРОЕ ЛИСТОВЫХ МЕТАЛЛОВ

С. В. Анахов<sup>1, а)</sup>, Б. Н. Гузанов<sup>1, б)</sup>, Н. Б. Пугачева<sup>2, в)</sup>,  
Т. М. Быкова<sup>2, г)\*</sup>, А. В. Матушкин<sup>3, д)</sup>

<sup>1</sup>Российский государственный профессионально-педагогический университет,  
11, ул. Машиностроителей, г. Екатеринбург, 620012, Российская Федерация

<sup>2</sup>Институт машиноведения УрО РАН,

34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620049, Российская Федерация

<sup>3</sup>Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
19, ул. Мира, г. Екатеринбург, 620002, Российская Федерация

а)  <http://orcid.org/0000-0003-1460-6305>  [sergej.anahov@rsvpu.ru](mailto:sergej.anahov@rsvpu.ru);  
б)  <http://orcid.org/0000-0001-5698-0018>  [guzanov\\_bn@mail.ru](mailto:guzanov_bn@mail.ru);  
в)  <http://orcid.org/0000-0001-8015-8120>  [nat@imach.uran.ru](mailto:nat@imach.uran.ru);  
г)  <http://orcid.org/0000-0002-8888-6410>  [tatiana\\_8801@mail.ru](mailto:tatiana_8801@mail.ru);  
д)  <http://orcid.org/0000-0001-7309-1618>  [227433@rambler.ru](mailto:227433@rambler.ru)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [tatiana\\_8801@mail.ru](mailto:tatiana_8801@mail.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация  
Тел.: +7 (343) 362–30–43, факс: +7 (343) 374–53–30

Представлены особенности образования структуры в зоне термического влияния, формирующиеся в процессе плазменной резки листов стали СтЗпс толщиной 10 мм и 36 мм. При резке стали большой толщины наблюдается повышенное науглероживание, рост твердости приповерхностного слоя и увеличение параметров шероховатости поверхности. Результаты исследований позволяют сделать вывод о том, что разработанный плазмотрон ПМВР-9.1 позволяет произвести достаточно качественный раскрой листовой стали толщиной до 40 мм и более. Однако стыковую сварку после плазменной резки без предварительной механической обработки можно производить при толщине стали 10 мм.

**Ключевые слова:** сталь, плазмотрон, плазменная резка, микроструктура, шероховатость, микротвердость.

### 1. Введение

Воздушно-плазменная резка металлов – одна из наиболее широко используемых технологий в металлургических и машиностроительных производствах для резки металлопроката и раскроя листовых материалов. При проектировании металлорежущих плазмотронов [1], как правило, опираются на такие критерии как производительность, качество реза и надежность их работы [2]. Высокие значения данных параметров в свою очередь зависят от эффективности системы газовихревой стабилизации (ГВС) [3, 4], обеспечивающей высокую степень тепловложения и кинетические свойства плазменной дуги (струи), надежность работы катодного и соплового узлов плазмотрона [5]. Применяемый в современных плазмотронах для резки металлов газовихревой способ стабилизации основан на тангенциальной подаче плазмообразующего газа (ПОГ) в сопловой узел и обжатии плазменной дуги (струи) как самим соплом, так и вихревым потоком стабилизирующего газа в цилиндрическом канале сопла (или на выходе из сопла вторичным потоком стабилизирующего газа в технологии уз-

коструйной плазмы) [6, 7]. Формирование тангенциально закрученного потока газа происходит в вихревых камерах (завихрителях), количество, конструкция и расположение которых в плазмотроне существенным образом влияет на эффективность резки металлов [8].

За последние годы авторами была разработана комплексная система анализа организации течения потока плазмообразующего газа по каналам газоздушного тракта (ГВТ) плазмотрона и созданы новые системы стабилизации дугового разряда металлорежущих плазмотронов постоянного тока для повышения их технологических показателей. Необходимость разработки новых плазмотронов обусловлена тем, что среди разработок отечественного электроплазменного оборудования практически отсутствуют инструментальные плазмотроны для прецизионной резки стальных листов при толщинах проката до 40 мм, обеспечивающие повышенную точность и качество реза кромок, высокую материальную и энергетическую эффективность. Это становится наиболее важным, так как в настоящее время на рынке присутствует качественная продукция только зарубежных производителей (Hypertherm, Kjellberg, MesserGreisheim и др.), что в условиях санкционной политики западных стран требует безусловного импортозамещения в этой весьма ответственной и быстро развивающейся технологической составляющей заготовительного производства [9].

Комплексная система анализа течения потока ПОГ включает методы численного моделирования газодинамических и теплофизических параметров процессов плазмообразования в плазмотроне (рис. 1). Подобный анализ проводился в приложении FlowWorks программной среды SolidWorks в рамках исследования широкого ряда отечественных и импортных плазмотронов постоянного тока. Результаты исследования выявили конструктивные недостатки большинства плазмотронов с точки зрения эффективности работы их систем ГВС и позволили разработать новые комплексные системы ГВС дуговых плазмотронов с более равномерным распределением по сечению ГВТ потока плазмообразующего газа.

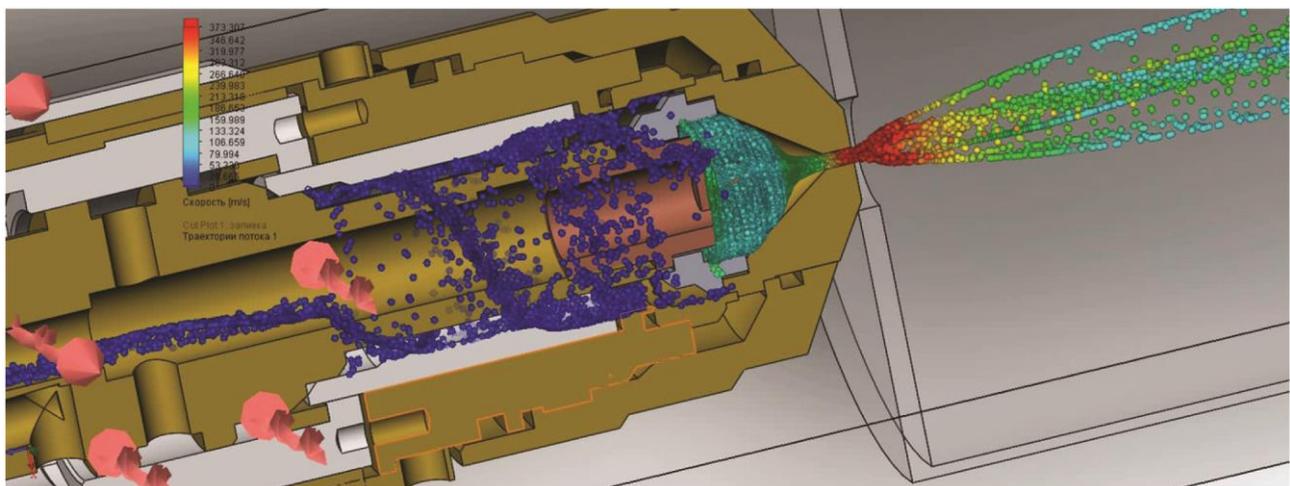


Рис. 1. Моделирование газодинамических характеристик потока плазмообразующего газа по газоздушному тракту одноконтурного плазмотрона (схема без предварительного завихрителя)

Новые системы ГВС были использованы для создания опытно-промышленных и опытных моделей однопоточных плазмотронов для прецизионной резки металлов средних и больших толщин серии ПМВР-5, а также двухпоточных плазмотронов серии ПМВР-9 для высокоточной узкоструйной резки металлов малых и средних толщин. В частности, в камере расширения ГВТ плазмотрона ПМВР-5.1 (рис. 2) была применена система газодинамических фильтров в виде сплошных и перфорированных стенок, а также оптимизирована геометрия отдельных участков ГВТ. В плазмотроне ПМВР-5.2 (рис. 3 а) была предложена система ГВС с симметричной подачей ПОГ в камеру расширения и двумя завихрителями в системе ГВС

(рис. 3 б): 1-я расширительная камера (камера смешения) – предварительный (формирующий) завихритель – 2-я расширительная камера – основной (стабилизирующий) завихритель. Размеры и расположение элементов системы ГВС в плазмотроне ПМВР-5.2 были также определены в рамках оптимизационных процедур по критериям эффективности ГВС. В целях последующего совершенствования систем ГВС в однопоточном плазмотроне ПМВР-5.3 дополнительно применен встроенный ступенчатый газодинамический фильтр с модернизированным завихрителем, обеспечивающим повышение радиальной составляющей скорости ПОГ в сопловом узле (рис. 4). В результате плазмотрон ПМВР-5.3 показал повышенную (на 40 % по сравнению с базовым плазмотроном типа ПМВР) производительность работы на токах до 200 А и качество реза металлов толщиной до 40 мм [10, 11].



Рис. 2. Опытно-промышленная модель плазмотрона ПМВР-5.1 с элементами соплового узла



Рис. 3. Плазмотрон ПМВР-5.2: а – опытно-промышленная модель; б – элементы конструкции (ГВТ с двумя завихрителями и хвостовая часть)



Рис. 4. Опытная модель плазмотрона ПМВР-5.3

На базе решений, полученных при проектировании ГВТ однопоточных плазмотронов, был разработан двухпоточный плазмотрон ПМВР-9.1, работающий по высокотехнологичной схеме «узкоструйной плазмы» (рис. 5). В основе технологии лежит применение двухпоточного принципа стабилизации – двойного вихревого обжатия плазменной дуги за счет распределения плазмообразующего газа по двум контурам на 2 потока (формирующего струю

и стабилизирующего дугу). Применение подобного плазмотрона позволило решить многие проблемы плазменной резки за счет существенного снижения ширины реза, улучшения его качества, повышения эффективности, материало- и энергоемкости процесса, а также обеспечить систематическое импортозамещение расходуемого оборудования для установок энергетической резки металлических материалов.

Опытно-промышленная апробация плазмотрона ПМВР-9.1 показали, что в отличие от однопоточных плазмотронов серии ПМВР-5, обеспечивающих прецизионную резку металлов средних толщин, он обеспечивает повышенное (сравнимое с лазерным) качество реза металлов толщиной до 20 мм за счет конструктивного и технологического изменения системы ГВС плазменной дуги.



Рис. 5. Опытная модель плазмотрона ПМВР-9.1: *а* – в сборе; *б* – элементы конструкции

Примененные методы анализа с учетом известных ранее и созданных в процессе исследования новых критериев и принципов легли в основу новой комплексной методики проектирования металлорежущих плазмотронов по газодинамическим, теплофизическим и акустическим критериям [6, 9, 10]. Методика утверждена в Уральском институте сварки и позволяет разрабатывать новые конструктивные схемы и оценивать эффективность проектирования систем стабилизации дугового разряда плазмотронов. В качестве особых методических рекомендаций можно отметить способы оценки влияния конструктивных особенностей систем ГВС на кинематические параметры плазменной струи. С применением данных способов было показано, что применение новых комплексных систем ГВС в плазмотронах ПМВР-5.3 и ПМВР-9.1 позволило улучшить газодинамические и энергетические параметры плазменной дуги (струи) (рис. 6). Разработанная методика позволяет также произвести оценку технологических возможностей плазмотронов при резке металлов различных толщин, а также ряд параметров их безопасного применения.

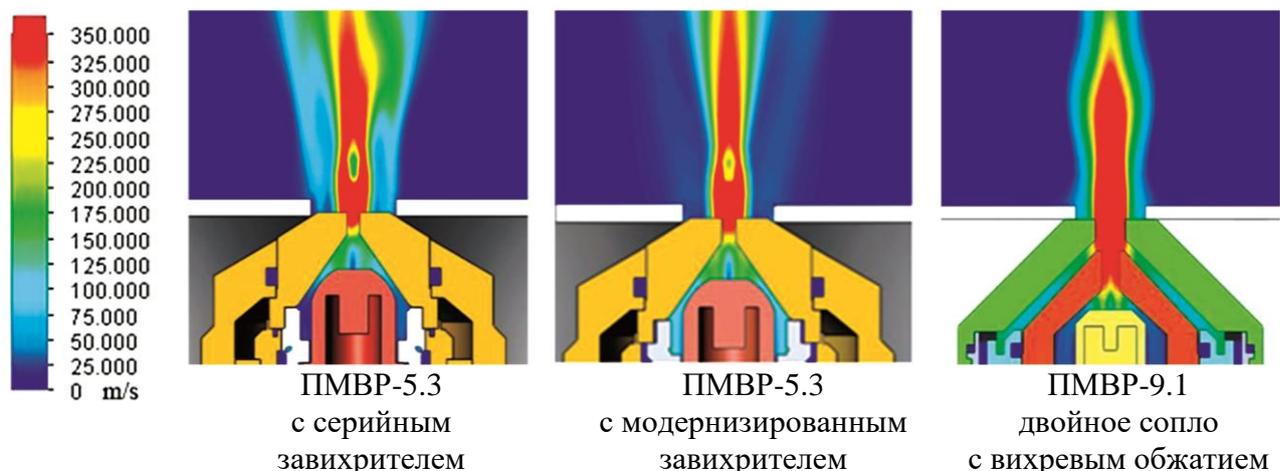


Рис. 6. Численное моделирование кинематических параметров плазменной струи в плазмотронах ПМВР-5.3 и ПМВР-9.1

Комплексная методика проектирования включает и экспериментальную верификацию результатов численного моделирования процессов, характерных для технологии плазменной резки. Экспериментальные результаты, полученные в ходе исследований, проведенных совместно с Институтом машиноведения УрО РАН, подтвердили эффективность применения новых методов ГВС. Например, резка металлов плазматронами типа ПМВР-9.1 позволяет получать прецизионные резы, соответствующие 1 и 2-м классам качества по ГОСТ 14792-80 на углеродистых и низколегированных сталях средних толщин. Кроме того, была показана возможность применения таких плазматронов для прецизионной резки металлов и последующей их сварки без дополнительной механической обработки кромки реза.

## 2. Материалы и методы исследования

С использованием указанного плазматрона было выполнено исследование структурообразования ЗТВ при узкоструйной воздушно-плазменной резке листа углеродистой стали Ст3пс при следующих параметрах работы плазматрона: ток резки – 120 А; напряжение резки ~180 В; давление ПОГ ~ 4,5 атм.; диаметр сопла – 1,9 мм; вылет плазматрона – 6–7 мм. Скорость резки была выбрана в зависимости от толщины листа стали и соответствовала 1,5 м/мин при толщине 10 мм и 0,3 м/мин – при толщине 36 мм.

Структурные исследования выполнены на микроскопе НЕОРНОТ-21 при увеличениях от 100 до 1000 крат. Определение дисперсности пластинчатого перлита и соотношение фаз феррита и перлита в зоне термического влияния в кромке реза было выполнено в соответствии с межгосударственным стандартом ГОСТ 8233-56 [12] на специально вырезанных темплатах при увеличении 1000 крат (рис. 8 а и б). Количественная характеристика основных элементов микроструктуры была произведена на основании сопоставления структуры с эталонами соответствующих шкал стандарта.

Химический состав листовой стали определяли спектральным методом на приборе SPECTROMAX и усредняли по прожигам в нескольких участках площадью 8 мм<sup>2</sup> на поверхности сечения образцов. Для определения распределения химических элементов на поверхности реза был проведен рентгеноспектральный анализ при увеличении 2000 крат на растровом электронном микроскопе TESCAN VEGA ПХМУ, оснащенный системами энергодисперсионного микроанализа INCA ENERGY 450 с АДД детектором OXFORD и программным обеспечением INCA. Исследование рельефа поверхности резов выполнили с помощью оптического интерферометра Veeco NT-1100. Значение твердости определены на приборе LEICA с программным обеспечением Materials Workstation при нагрузке 25 г на верхней и нижней кромках реза.

## 3. Обсуждение результатов

Анализ микроструктур позволяет заключить, что при изменении условий резки в зависимости от толщины разрезаемого листа обнаружены значительные различия в структурообразовании зоны термического влияния (ЗТВ) в исследуемых образцах (рис. 7 и 8). На рис. 7, а и б представлена в сравнении микроструктура внешней зоны плазменной резки исследованных образцов при увеличении 100 крат в зависимости от толщины листа, а в табл. 1 дано описание структуры образцов в каждой зоне.

Определение дисперсности пластинчатого перлита и соотношение фаз феррита и перлита в зоне термического влияния в кромке реза было выполнено в соответствии с межгосударственным стандартом ГОСТ 8233-56 [12] на специально вырезанных темплатах при увеличении 1000 крат (рис. 8 а и б).

Количественная характеристика основных элементов микроструктуры была произведена на основании сопоставления структуры с эталонами соответствующих шкал стандарта.

Анализ микроструктур позволяет заключить, что при изменении условий резки в зависимости от толщины разрезаемого листа обнаружены значительные различия в структурообразовании зоны термического влияния (ЗО+ПЗ) в исследуемых образцах.

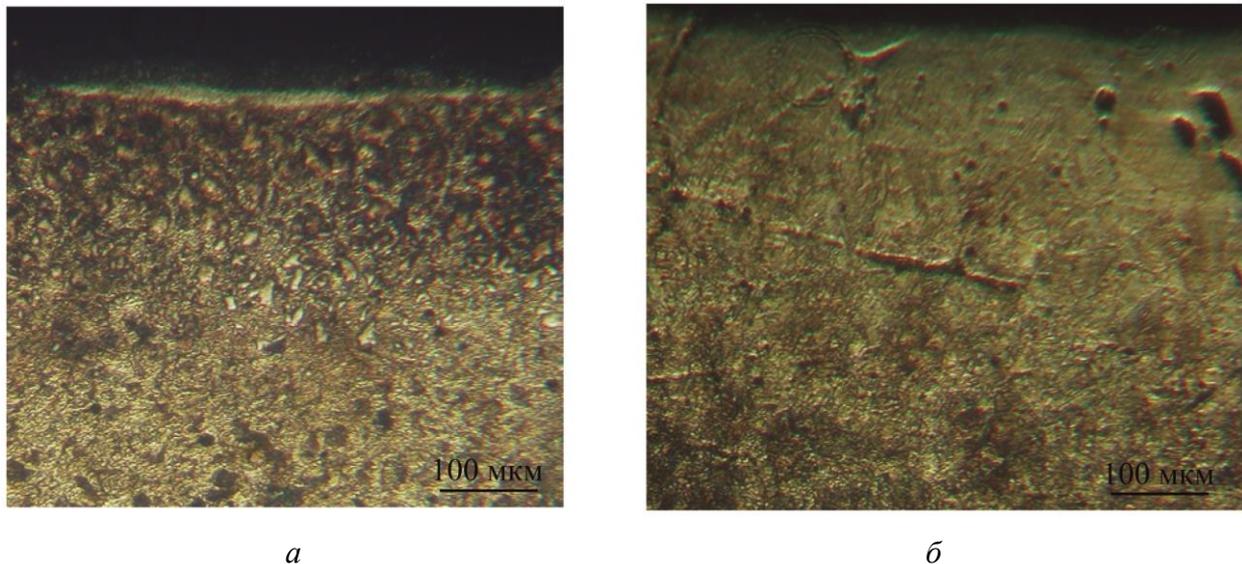


Рис. 7. Микроструктура приповерхностных слоев исследуемой стали после плазменной резки: *а* – толщина листа 10 мм; *б* – толщина листа 36 мм

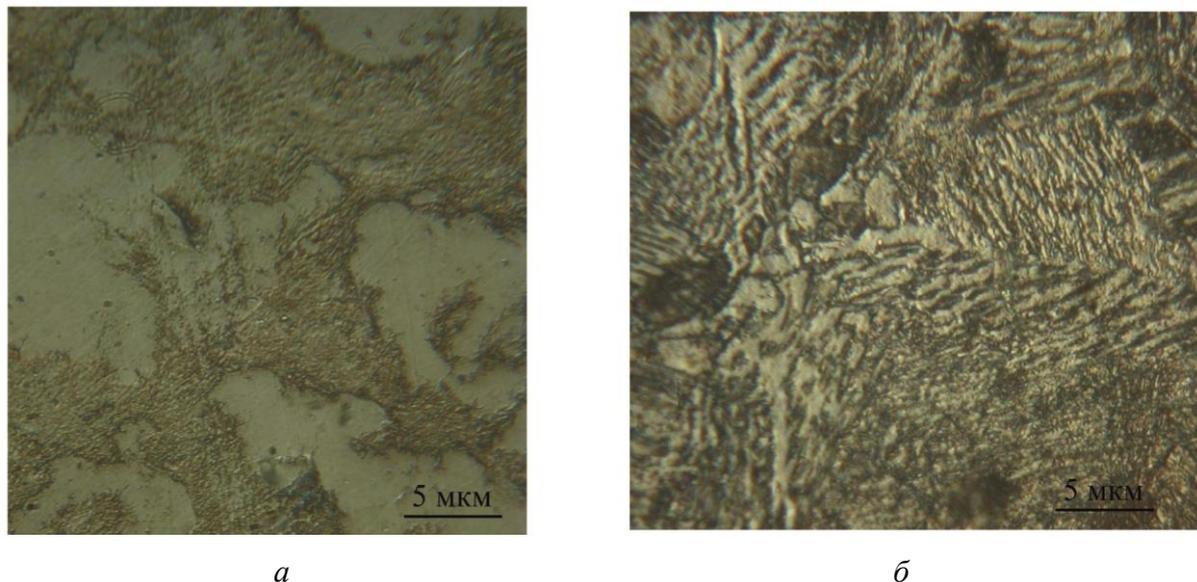


Рис. 8. Микроструктура зоны термического влияния исследуемой стали после плазменной резки: *а* – толщина листа 10 мм; *б* – толщина листа 36 мм

Так, с уменьшением скорости реза практически в 3 раза увеличилась толщина ЗТВ при прочих неизменных параметрах работы плазмотрона. На поверхности реза в обоих случаях формируется не травящийся белый слой бесструктурного мартенсита, а в ЗТВ сформировались перлитно-ферритные структуры с разными количественными соотношениями фаз и отличающейся степенью дисперсности (табл. 1). При скорости резания 1,5 м/мин в тонкой пластине в ЗТВ за счет перекристаллизации в условиях интенсивного теплоотвода образовалась мелкозернистая структура сорбитообразного перлита 1-го балла, в то время как в толстой пластине при скорости резания 0,3 м/мин сформировалась структура укрупненного зер-

на среднепластинчатого перлита 7-го балла (рис. 8). В переходных зонах исследуемых образцов резко возросло количество перлита в перлитно-ферритной структуре по сравнению с исходным соотношением в основе стали (табл. 1).

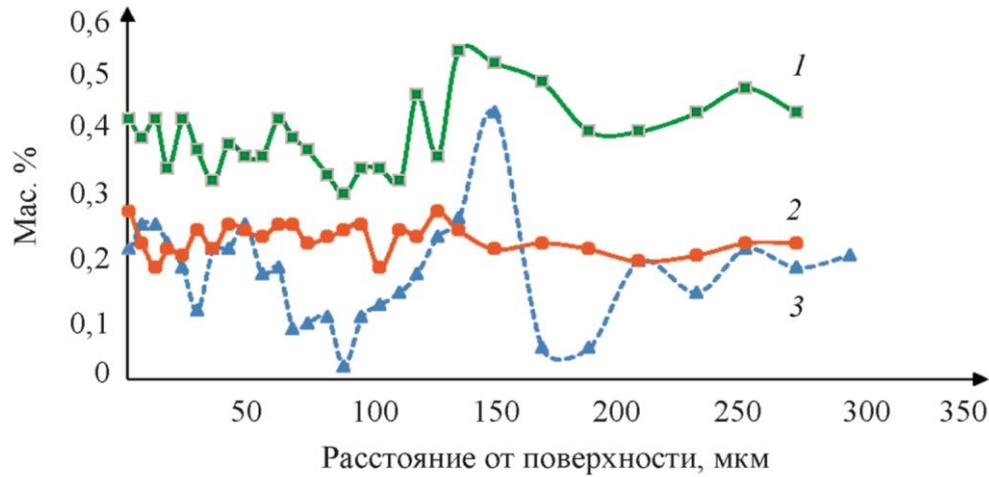
Таблица 1 – Описание структуры образца в каждой зоне

Толщина образца, мм	Зона	Толщина зоны, мкм	Структура
10	Край реза	25	Бесструктурный мартенсит
	Внешняя часть ЗТВ (ЗТВ <sub>1</sub> )	175	Сорбитообразный перлит, 1-й балл, межпластинчатое расстояние менее 0,20 мкм
	Переходная зона (ЗТВ <sub>2</sub> )	200	Перлитно-ферритная структура с соотношением п/ф = 85/15, 3-й балл
	Основа стали	>400	Перлитно-ферритная структура с соотношением п/ф = 20/80, 8-й балл
36	Край реза	10	Бесструктурный мартенсит
	Внешняя часть ЗТВ <sub>1</sub>	390	Среднепластинчатый перлит, 7-й балл, межпластинчатое расстояние менее 1,20 мкм
	Переходная зона ЗТВ <sub>2</sub>	800	Перлитно-ферритная структура с соотношением п/ф = 95/5, 2-й балл
	Основа стали	>1200	Перлитно-ферритная структура с соотношением п/ф = 20/80

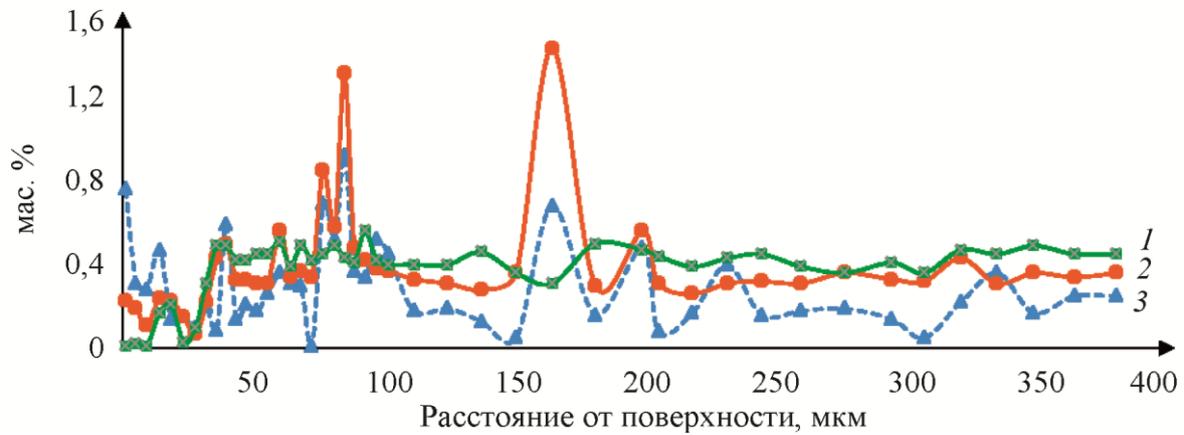
Подобные особенности структурообразования определяются главным образом различиями скоростей охлаждения поверхностных слоев углеродистой стали при отличающихся режимах резки. Влияние оказало и перераспределение легирующих элементов и углерода в разделочных швах в процессе энергетической обработки. Микрорентгеноспектральный анализ показал (рис. 9), что в результате диффузионного перераспределения углерода повысилась его концентрация в зоне реза. Из приведенных графиков распределения видно, что повышение концентрации углерода в различных зонах реза носит нерегулярный характер. Максимальное повышение наблюдается в зоне оплавления вблизи кромки реза, затем в зоне оплавления несколько снижается и к концу переходной зоны количество углерода выравнивается в соответствии с химическим составом основы. Все это в полной мере отражает характер образовавшихся структур в различных зонах реза по мере удаления от кромки.

Особо следует отметить, что степень науглероживания при резке толстой пластины с малой скоростью оказалась значительно выше и достигла значений в кромке реза 0,76 мас. % С, в то время как в тонкой пластине при высокой скорости реза не превысила 0,25 мас. % С, при усредненной концентрации углерода в основе 0,14 мас. % С. При этом в зоне оплавления в результате сильной энергетической обработки в зоне реза толстого листа за счет выгорания значительно снизилась массовая доля марганца и кремния, что в тонком листе по всей толщине практически не наблюдалось.

Изменение концентрации углерода в поверхностных слоях привело к измельчению перлитно-ферритной структуры и повышению твердости приповерхностных слоев стали в зоне плазменной резки (рис. 10). В наиболее явной форме это заметно для малой скорости реза, при которой в поверхности за счет диффузионных процессов сформировалось высокоуглеродистое состояние стали.

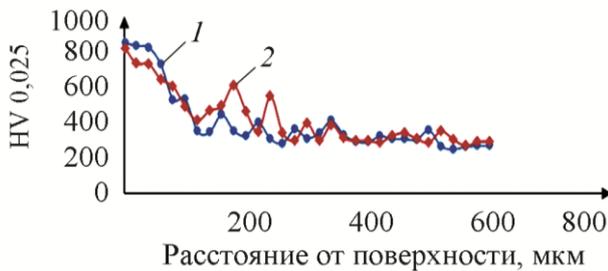


*a*

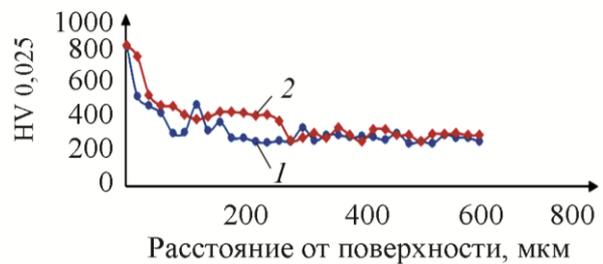


*б*

Рис. 9. Распределение легирующих элементов исследуемой стали в зоне термического влияния плазменной резки: *a* – толщина листа 10 мм; *б* – толщина листа 36 мм; 1 – Mn; 2 – Si; 3 – C



*a*



*б*

Рис. 10. Графики распределения твердости в образцах: *a* – толщина листа 10 мм; *б* – толщина листа 36 мм; 1 – нижняя кромка; 2 – верхняя кромка

Весьма важно отметить практически одинаковый характер распределения твердости на верхней и нижней кромках реза исследованных образцов, что обусловлено конструктивными особенностями разработанного узкоструйного плазмотрона.

Большое значение при оценке качества плазменной резки отводится изучению шероховатости поверхности по критериям микрогеометрии рельефа линии реза. Результаты исследования представлены на рис. 11 и приведены в табл. 2.

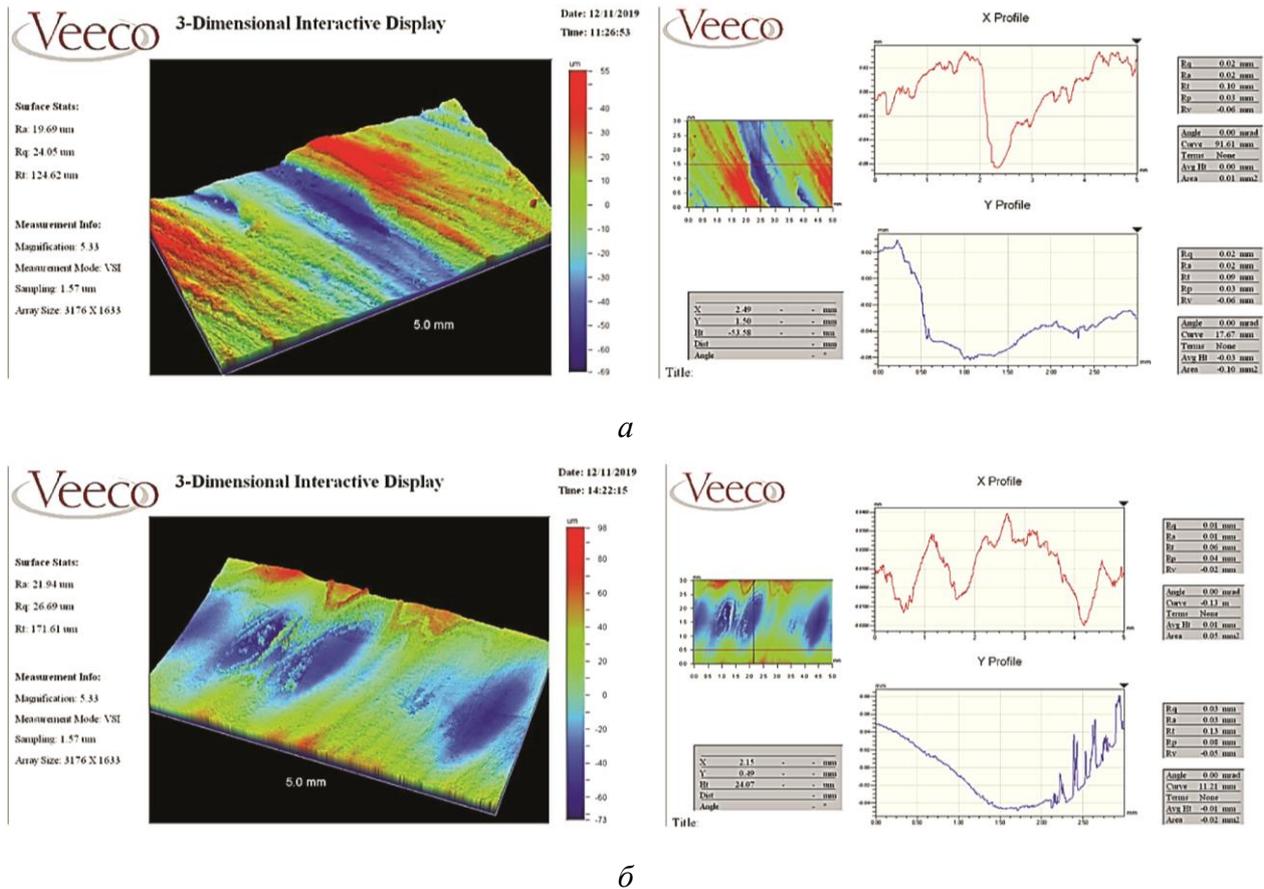


Рис. 11. Анализ рельефа поверхности исследованных образцов: *а* – толщина листа 10 мм; *б* – толщина листа 36 мм

Таблица 2 – Результаты исследования рельефа поверхности

Толщина листа, мм	Средняя шероховатость $R_a$ , мкм	Средняя квадратичная шероховатость $R_q$ , мкм	Максимальная высота поверхности $R_t$ , мкм
10	19,69	24,05	124,62
36	21,94	26,69	171,61

Видно, что по всем оцениваемым показателям качество поверхности реза толстого листа при медленной скорости перемещения плазматрона оказалось несколько хуже, чем при резке тонкого листа. Особенно это заметно по величине максимальной высоты поверхности (вертикальное расстояние между самой высокой и самой низкой точкой рельефа), что говорит о большей волнистости линии реза в этом случае.

#### 4. Выводы

Таким образом, по результатам выполненных исследований можно заключить, что разработанный плазматрон ПМВР-9.1 по своим техническим возможностям за счет использования новой системы ГВС с двумя завихрителями (формирующим и стабилизирующим), двумя расширительными камерами и симметричной подачей ПОГ, позволяет произвести

достаточно качественный раскрой листовой стали в условиях узкоструйной воздушно-плазменной резки в довольно широком диапазоне толщин вплоть до 40 мм и более. Однако необходимо учитывать, что сварку заготовок без предварительной механической обработки можно производить при толщине реза 10 мм. При больших толщинах в разделочном шве формируется ЗТВ со значительными изменениями в структуре основного металла и ряда других показателей, что предполагает снятие фаски с поверхности реза на глубину не менее 0,5 мм.

### Благодарность

*Работа выполнена при поддержке Госзадания Минобрнауки РФ на 2018–2019 гг. № 13.10317.2018/11.12 (Рег. № НИОКТР АААА-А18-118110790009-3)*

### Литература

1. Кайдалов А. А. Современные технологии термической и дистанционной резки конструкционных материалов. – Киев : Экотехнология, 2007. – 456 с.
2. Лашенко Г. И. Плазменная резка металлов и сплавов. – К. : Экотехнология, 2003. – 64 с.
3. Коротеев А. С., Миронов В. М., Свирчук Ю. С. Плазмотроны. Конструкции, характеристики, расчет. – М. : Машиностроение, 1993. – 296 с.
4. Жуков М. Ф., Аньшаков А. С. Основы расчета плазмотронов линейной схемы. – Новосибирск : Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979. – 146 с.
5. Донской А. В., Клубникин В. С. Электроплазменные процессы и установки в машиностроении. – Л. : Машиностроение, 1979. – 221 с.
6. Анахов С. В., Пыкин Ю. А. Плазмотроны: проблема акустической безопасности. Теплофизические и газодинамические принципы проектирования малозумных плазмотронов. – Екатеринбург : РИО УрО РАН, 2012. – 224 с.
7. Чиеу Куанг Фи. Исследование эффективности технологии узкоструйной плазменной резки металлов ... дис. канд. техн. наук. – С.-Петербург : С.-Пб. ГМТУ, 2008. – 143 с.
8. Оценка эффективности газовихревой стабилизации в плазмотронах для резки металлов / М. П. Шалимов, С. В. Анахов, Ю. А. Пыкин, А. В. Матушкин, И. Ю. Матушкина // Сварка и диагностика. – 2018. – № 2. – С. 57–61.
9. Анахов С. В. Принципы и методы проектирования плазмотронов. – Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2018. – 165 с.
10. Анахов С. В., Пыкин Ю. А., Матушкин А. В. Повышение эффективности системы газовихревой стабилизации в плазмотронах для высокоточной резки металлов // Сварочное производство. – 2019. – № 4. – С. 27–30.
11. Влияние конструктивных особенностей плазмотрона на качество реза при прецизионной воздушно-плазменной разделке металла / С. В. Анахов, Б. Н. Гузанов, А. В. Матушкин, Н. Б. Пугачева, Ю. А. Пыкин // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2020. – Т. 63, № 2. – С. 155–162. – DOI: 10.17073/0368-0797-2020-2-155-162.
12. ГОСТ 8233-56. Сталь. Эталоны микроструктуры. – Москва : ИПК Издательство стандартов, 2004.