
Diagnostics, Resource and Mechanics

of materials and structures

Editor-in-Chief: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**, **Sergey V. Gladkovsky**

Editorial Council

Chairman: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Kononov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Evgenii Yu. Prosviryaov (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation

Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts

Anna V. Garieva, maker-up

Galina V. Torlopova, associate editor

Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н.
Заместители главного редактора: Сергей Витальевич Смирнов, д.т.н.; Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – Гладковский Сергей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазиский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)
Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Просвириков Евгений Юрьевич, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

Valiev E. Z. and Bobrovskii V. I. On the search of new magnetic materials for cryogenics	6
Kazakov A. L. On the analytical construction of a heat wave for the nonlinear heat equation with a source in polar coordinates	16
Stolbovsky A. V., Popov V. V., Popova E. N. and Murzinova S. A. Specific features of the grain structure in Ni-Cu alloys at the saturation stage under high-pressure torsion	26
Danilov S. E. and Arbuzov V. L. Obtaining pure carbon-alloyed nickel	38
Privalova V. V. and Prosviryakov E. Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of a viscous fluid layer under the lower boundary heating condition	44

СОДЕРЖАНИЕ

Валиев Э. З., Бобровский В. И. Поиск новых магнитных материалов для криогенной техники	6
Казаков А. Л. Об аналитическом построении тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности с источником в полярных координатах	16
Столбовский А. В., Попов В. В., Попова Е. Н., Мурзинова С. А. Особенности зеренной структуры на стадии насыщения после кручения под высоким давлением в сплавах системы никель–медь	26
Данилов С. Е., Арбузов В. Л. Получение чистых сплавов никеля, легированных углеродом	38
Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Влияние касательных граничных напряжений на конвективное однонаправленное течение слоя вязкой жидкости при условии нагрева нижней границы	44

Received: 26.07.2019
Revised: 17.08.2019
Accepted: 30.08.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.006-015

ON THE SEARCH OF NEW MAGNETIC MATERIALS FOR CRYOGENICS

E. Z. Valiev^{a)*} and V. I. Bobrovskii^{b)}

*M.N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-0760-0370>  valiev@imp.uran.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-4692-8889>  bobrovskii@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: valiev@imp.uran.ru

Address for correspondence: ul. S. Kovalevskoy, 18, 620108, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 374 00 03

Due to the latest achievements and potential practical applicability, magnetic refrigeration is currently of great interest. For the search of new effective materials for refrigerators with magnetic cooling, we obtain and analyze the governing equations enabling one to calculate the basic characteristics of the magnetocaloric effect (MCE) in magnetically ordered materials (temperature and entropy changes under on/off switching of the magnetic field). Recommendations and demands for the characteristics of promising ferro- and ferrimagnets in search are proposed on the basis of a joint analysis of these formula and experimental results.

Keywords: magnetic refrigeration, ferromagnets, antiferromagnets, ferrimagnets, magnetic phase transitions, magnetocaloric effect.

Acknowledgment

The work was performed with the use of IMP Neutron Material Science Complex within the state assignment for IPM UB RAS (theme Flux) and supported by the Basic Research Program of UB RAS, grant No. 18-10-2-22.

References

- 1 Franco V., Blázquez J.S., Ipus J.J., Law J.Y., Moreno-Ramírez L.M., Conde A. Magnetocaloric effect: From materials research to refrigeration device. *Progress in Materials Science*, 2018, vol. 93, pp. 112–232. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.005.
- 2 Zimm C., Jastrab A., Sternberg A., Pecharsky V., Gschneidner K., Osborne M., Anderson I. Description and performance of a near-room temperature magnetic refrigerator. In: Kittel P., ed. *Advances in Cryogenic Engineering Book Series* (ACRE, vol. 43), Springer, Boston, MA, 1998, pp. 1759–1766. DOI: 10.1007/978-1-4757-9047-4_222. Online ISBN: 978-1-4757-9047-4.
- 3 Bean C.P., Rotbell D.C. Magnetic disorder as first-order phase transition. *Phys. Rev.*, 1962, vol. 126, pp. 104–115. DOI: 10.1103/PhysRev.126.104.
- 4 Kittel C. Model of exchange-inversion magnetization. *Phys. Rev.*, 1960, vol. 120, pp. 335–342. DOI: 10.1103/PhysRev.120.335.
- 5 Valiev E.Z., Kazantsev V. A. Magnetocaloric effect in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ ferromagnets. *Physics of Metals and Metallography*, 2011, vol. 113, no. 6, pp. 1000–1005. DOI: 10.1134/S1063776111150118.
- 6 Valiev E.Z. Isotropic Magnetoelastic Interaction in Two-Sublattice Ferri- and Antiferromagnets: Mean-Field Approximation for the Heisenberg Model. *Physics of Metals and Metallography*, 2003, vol. 96, no. 2, pp.121–127.

- 7 Valiev E.Z. Entropy and Magnetocaloric Effect in Ferrimagnets RCo_2 . *Physics of Metals and Metallography*, 2017, vol. 124, no. 6, pp. 968–974. DOI: 10.1134/S1063776117060048.
- 8 Valiev E., Gimaev R., Zverev V., Kamilov K., Pyatakov A., Kovalev B., Tishin A. Application of the exchange-striction model for the calculation of the FeRh alloys magnetic properties. *Intermetallics*, 2019, vol. 108, pp. 81–86. DOI: 10.1016/j.intermet.2019.02.015.
- 9 Valiev E.Z. Entropy and Magnetocaloric Effect in Ferromagnets and Antiferromagnets. *Physics of Metals and Metallography*, 2007, vol. 104, no. 1, pp. 8–12. DOI: 10.1134/S0031918X07070022.
- 10 Valiev E.Z. Entropy and magnetocaloric effects in ferromagnets undergoing first- and second-order magnetic phase transitions. *JETP*, 2009, vol. 108, no. 2, pp. 279–285. DOI: 10.1134/S1063776109020101.
- 11 Fujita A., Akamatsu Y., Fukamishi K. Itinerant-electron metamagnetic transition in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ intermetallic compounds. *J. Appl. Phys.*, 1999, vol. 85, pp. 4756–4758. DOI: 10.1063/1.370471.
- 12 Fujita A., Fujieda S., Hasegawa Y., Fukamishi K. Itinerant-electron metamagnetic transition and large magnetocaloric effect in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ compounds and their hydrides. *Phys. Rev. B*, 2003, vol. 67, no 10, pp. 104416. DOI:10.1103/PhysRevB.67.104416.

Подана в журнал: 26.07.2019
УДК 537.622.6:537.634.2
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.006-015

ПОИСК НОВЫХ МАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ КРИОГЕННОЙ ТЕХНИКИ

Э. З. Валиев^{а)*}, В. И. Бобровский^{б)}

*ФГБУН Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-0760-0370>  valiev@imp.uran.ru;
^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-4692-8889>  bobrovskii@imp.uran.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: valiev@imp.uran.ru
Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, 620108, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 374-00-03

Благодаря последним достижениям и потенциальным возможностям практического применения в настоящее время возник большой интерес к магнитной криогенике. Для поиска новых эффективных материалов для систем магнитного охлаждения получены формулы, позволяющие рассчитывать основные характеристики магнитокалорического эффекта (МКЭ) в магнитоупорядоченных веществах (адиабатическое изменение температуры и изотермическое изменение энтропии магнетика, при включении и выключении магнитного поля). На основе анализа этих теоретических выражений и накопленных экспериментальных данных предложены рекомендации и требования, которым должны удовлетворять перспективные ферро- и ферримагнетики для того, чтобы их характеристики МКЭ принимали максимальные значения.

Ключевые слова: магнитное охлаждение, ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики, магнитные фазовые переходы, магнитокалорический эффект.

1. Введение

В обеспечении функционирования современного общества большую роль играет производство холода, основанное на использовании рефрижераторов различного типа, являющееся весьма энергозатратным и часто не вполне экологически безопасным в силу использования в этих машинах специфических хладагентов. Поэтому большой интерес вызывают альтернативные методы получения низких температур. Уже более 100 лет известен магнитокалорический эффект (МКЭ), проявляющийся в изменении температуры вещества при изменении приложенного магнитного поля. Весьма ярко он проявляется в условиях тепловой изоляции материалов при выключении (или включении) внешнего магнитного поля, влекущем за собой перестройку состояния магнитной подсистемы. Наиболее универсальным мериллом таких перестроек является величина изменения энтропии этой подсистемы. В адиабатических условиях сохранения полной энтропии материала это означает соответствующее изменение (только с противоположным знаком) энтропии кристаллической решетки и, как следствие, температуры:

$$\Delta T = - \frac{T}{C_{p,H}} \Delta S_M, \quad (1)$$

где $C_{p,H}$ и ΔS_M – теплоемкость материала и изменение энтропии магнитной подсистемы соответственно.

МКЭ наблюдается в различных магнитных материалах (парамагнетиках, ферро- и ферримагнетиках) и уже достаточно давно используется в экзотических устройствах для получения сверхнизких температур. Но в последние годы прогресс в теоретическом и экспериментальном исследовании магнитотепловых свойств материалов вызвал новый интерес к МКЭ. Так, впервые удалось сконструировать магнитный холодильник, работоспособный при комнатной температуре [1]. В настоящее время технология производства магнитных рефрижераторов стремительно развивается.

Однако соединения со значительными величинами МКЭ не слишком многочисленны. Соответственно большой интерес представляет разработка методик их осознанного поиска или синтеза. Обычно при определении характеристик МКЭ (адиабатического изменения температуры ΔT_{ad} и изотермического изменения энтропии ΔS_M) используют общие термодинамические соотношения [1, 2] и экспериментальные данные. При этом не удается выяснить зависимость характеристик МКЭ от ряда физических величин. Особенно это касается большого (гигантского), $\Delta T_{ad} \approx 10$ К; $\Delta S_M \approx 30$ Дж/кг · К) МКЭ, проявляющегося в некоторых материалах. Для решения этой проблемы необходимо привлечение продвинутых моделей описания магнетиков.

Мы покажем, что несмотря на существенные отличия всех этих систем для описания их термодинамических свойств можно предложить универсальный феноменологический подход, являющийся обобщением теорий Бина–Ротбелла [3] и Киттеля [4]. При этом важными элементами усовершенствования теории является включение в рассмотрение эффектов теплового расширения решетки. Будут получены термодинамические соотношения для максимальных значений ΔT_{ad} и ΔS_M и проведено их обсуждение и сравнение с экспериментом для ферромагнетиков (железо, никель гадолиний) с магнитными фазовыми переходами II рода, ферро- и ферримагнетиков $\text{La}(\text{FeSi})_{13}$ и RCO_2 , испытывающих магнитный фазовый переход I рода, и для отличающегося рекордными характеристиками МКЭ эквиатомного сплава Fe-Rh, в котором происходит переход I рода между ферромагнитным и антиферромагнитным состояниями. В заключение приведены требования, каким должны удовлетворять ферромагнетики для того чтобы магнитотепловые эффекты в них были максимальными.

2. Постановка задачи и методы решения

На примере ферромагнетика с одним сортом магнитных атомов, руководствуясь основными идеями обменно-стрикционной модели [4, 5], получим выражения для основных характеристик МКЭ. Обсуждение особенностей МКЭ в антиферромагнетиках и ферримагнетиках для конкретных соединений можно найти в наших работах [6–8].

Выражение для термодинамического потенциала (свободной энергии) ферромагнетика запишем в виде [5]:

$$F = NJs^2m^2 - Nk_B T \ln Z(x) + \frac{1}{2} K^{-1} \omega^2 + P\omega + Nk_B T \left[3 \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\Theta}{T} \right) \right) - D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right], \quad (2)$$

где введены обозначения:

$$\begin{cases} x = \frac{2\mu_B s H + 2s^2 J m}{k_B T} \\ J = J_0 + \gamma \omega \\ Z(x) = \frac{\text{sh} \left(x + \frac{x}{2s} \right)}{\text{sh} \left(\frac{x}{2s} \right)} \\ \Theta = \Theta_0 + \Gamma \omega \end{cases} \quad (3)$$

Здесь N – число магнитных атомов в единице объема; J – обменный интеграл между выделенным атомом и всеми атомами его окружения с учетом в линейном приближении сжимаемости решетки; μ_B – магнетон Бора; s – спин атома; H – внешнее магнитное поле; k_B – постоянная Больцмана; γ – постоянная обменно-упругого взаимодействия (магнитная константа Грюнайзена); K – сжимаемость; P – давление; m – приведенная намагниченность; $\omega = \Delta V/V$ – относительное изменение объема; Θ – температура Дебая; Γ – постоянная Грюнайзена; $D(\Theta/T)$ – функция Дебая.

В уравнении (2) первые два слагаемых представляют вклад обменного взаимодействия в приближении молекулярного поля [6, 7], третье и четвертое слагаемые – вклад энергии объемных деформаций. Пятое слагаемое – вклад решетки в приближении Дебая – Грюнайзена. Основная идея теорий Бина–Родбелла и Киттеля сводилась к учету зависимости обменного интеграла от объема (в частности, от теплового расширения решетки). В выражении для термодинамического потенциала (2) мы дополнили ее учетом зависимости температуры Дебая от объема.

Из условия минимума свободной энергии по m и ω следуют равновесные уравнения состояния для магнитной подсистемы и решетки:

$$\begin{cases} m = B_s(x) \\ \omega = \left(N\gamma s^2 m^2 + 3Nk_B \frac{T}{\Theta} \Gamma \cdot D\left(\frac{\Theta}{T}\right) - P \right) K. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $B_s(x)$ – функция Бриллюэна для спина s ; ω при $P = 0$ есть спонтанная объемная магнитострикция плюс обычное тепловое расширение решетки. Отметим, что второе слагаемое в выражении (4) для ω оказывается важным только при обсуждении причины фазового перехода антиферромагнетик – ферромагнетик в сплаве Fe-Rh [8]. В остальных случаях им можно пренебречь.

Для магнитной энтропии из (2, 4) следует

$$S_M = Nk_B [\ln Z(x) - mx]. \quad (5)$$

Согласно экспериментам максимальные значения МКЭ наблюдаются в точке Кюри, что позволяет при вычислении изменения энтропии в магнитном поле использовать выражение (5) в приближении $x \ll 1$. В результате

$$\Delta S_M^{max} = S_M(H) - S_M(0) = -Nk_B \frac{3s}{2s+2} m^2. \quad (6)$$

Как следует из (4) и (5), зависимость энтропии от внешних условий определяется величиной намагниченности. Для адиабатического изменения температуры тогда немедленно получаем:

$$\Delta T_{ad}^{max} \approx - \frac{\Delta S_M^{max} T_C}{C} = \frac{1}{C} Nk_B T_C m^2 \frac{3s}{2s+2}, \quad (7)$$

где C – теплоемкость, а T_C – температура Кюри.

3. Результаты и обсуждение

Формулы (1)–(7) позволяют проводить расчет термодинамических свойств ферромагнетиков с магнитными фазовыми переходами I и II рода, в зависимости от величины константы магнитоупругого взаимодействия γ . Если величина постоянной γ меньше критического значения γ_{CR} , то переход будет фазовым переходом II рода. Если же $\gamma > \gamma_{CR}$, то возникает

магнитный фазовый переход I рода [8]. Изменение рода фазового перехода происходит в трикритической точке при $\gamma = \gamma_{CR}$. Выражение для γ_{CR} можно найти в работе [6].

Для $T = T_C$ в области магнитного фазового перехода II рода (т. е. $\gamma \ll \gamma_{CR}$) легко получить с использованием (4) и (6):

$$\Delta S_M^{max} \approx (2\mu_B s H / k_B T_C)^{2/3}. \quad (8)$$

То есть в магнитном поле максимальное значение изменения энтропии (5) определяется отношением зеемановской и обменной энергий в степени 2/3. Из формулы (8) следует, что наибольшие значения ΔS_M^{max} и ΔT_{ad}^{max} следует ожидать в ферромагнетиках с большими магнитными моментами и малыми значениями температуры Кюри. Этот вывод подтверждается расчетом и экспериментальными данными для никеля ($s = 1/2$, $T_C = 631$ K), железа ($s = 1$, $T_C = 1043$ K) и гадолиния ($s = 7/2$, $T_C = 293$ K). В [9] показано, что ΔS_M^{max} и ΔT_{ad}^{max} для гадолиния в 3–5 раз больше, чем для никеля и железа (для гадолиния $\Delta S_M^{max} \approx 15$ J/kg K; $\Delta T_{ad}^{max} \approx 10$ K при $H = 5$ T [9]).

Весьма интересные результаты можно получить, если проследить, как изменяются величины ΔS_M^{max} и ΔT_{ad}^{max} с ростом постоянной γ при изменении рода магнитного фазового перехода со II на I, которое происходит в трикритической точке, т. е. при $\gamma = \gamma_{CR}$; $T = T_{tr} = T_C$. В этой точке зависимость ΔS_M^{max} от магнитного поля имеет вид [10]:

$$\Delta S_M^{max} \approx (2\mu_B s H / k_B T_C)^{2/5}. \quad (9)$$

Сравнение численных значений величин приращения энтропии, описываемых формулами (8) и (9) для одних и тех же s , H и T_C показывает, что величина (9) почти на порядок больше, чем (8), т. е. максимальное значение изменения энтропии значительно возрастает для ферромагнетиков в окрестности именно магнитного фазового перехода I рода.

Этот вывод подтверждает и результат модельного расчета по формуле (4) для ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$. Действительно, согласно экспериментальным данным работ [11, 12], для ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$ наблюдалось: $N = 6,07 \cdot 10^{22}$ см⁻³; $K = 1,1 \cdot 10^{12}$ эрг/см³; $s = 1$; $T_C = 195$ K; $\Theta = 400$ K. С этими значениями физических величин, как следует из [10], $\gamma_{CR} = 3,67 \cdot 10^{-13}$ эрг. Так как данный ферромагнетик испытывает фазовый переход I рода, то характеризующее его значение γ получается больше, чем γ_{CR} : $\gamma = 4,89 \cdot 10^{-13}$ эрг.

На рис. 1 и 2 показаны результаты расчета по формулам (2, 4) температурной зависимости изменения энтропии в магнитном поле при различных значениях отношения γ/γ_{CR} . Численные значения всех остальных физических величин (за исключением γ), которые входят в расчетные формулы, приняты такими же, как для ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$. Как видно, максимальное значение изменения энтропии и пропорционального ей адиабатического изменения температуры наблюдается в точке Кюри. Из результатов расчета следует сильная зависимость величины МКЭ от значений постоянной магнитоупругого взаимодействия.

Вывод о том, что в большом числе магнитоупорядоченных соединений наивысшие значения МКЭ достигаются в образцах с магнитными фазовыми переходами I рода, подтверждают и результаты работы [7]. Причиной больших величин МКЭ в RCO_2 является сильная зависимость намагниченности от температуры и магнитного поля в окрестности магнитного фазового перехода I рода, который имеет место в этих соединениях. Постепенное уменьшение величины МКЭ в ряду соединений RCO_2 ($R = \text{Er, Ho, Dy, Tb}$) связано с ослаблением резкости перехода I рода в этом ряду и его исчезновением для TbCo_2 .

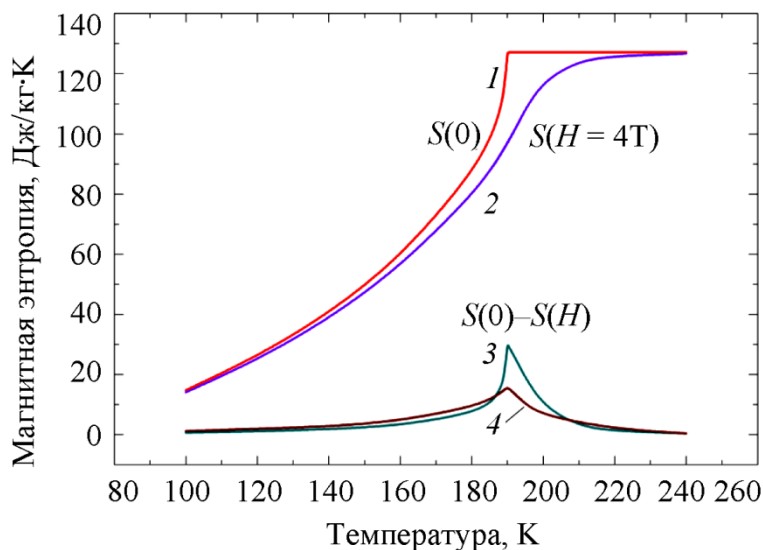


Рис. 1. Температурная зависимость магнитной энтропии при различных значениях магнитного поля $H = 0$ и $H = 4$ тесла. Расчет по формулам (4, 5). Кривые 1, 2, 3 – результат расчета для $\gamma/\gamma_{кр} = 1$. Кривая 4 – для $\gamma/\gamma_{кр} = 0,67$

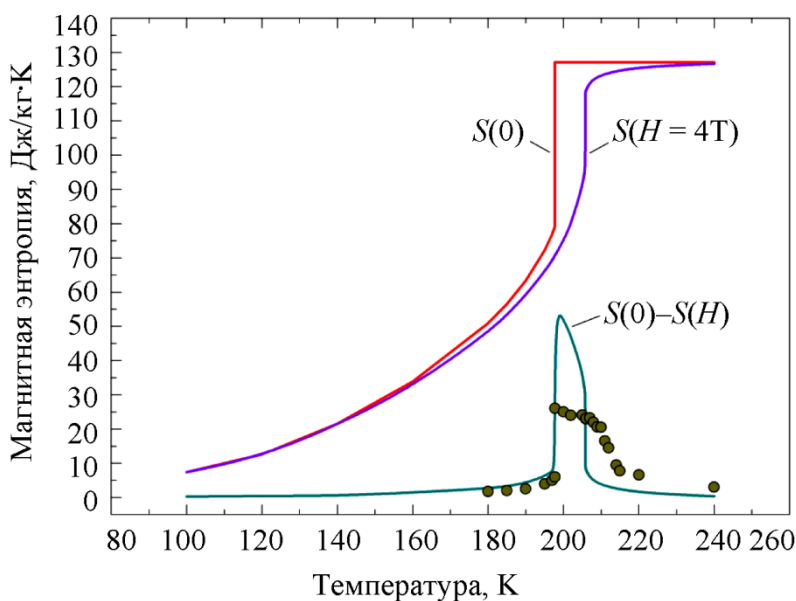


Рис. 2. Температурная зависимость магнитной энтропии при магнитном фазовом переходе I рода для ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$. *Сплошные кривые* – расчет по формулам в тексте статьи. *Кружки* – эксперимент из [11]

Увеличение абсолютных величин ΔS_M^{max} и ΔT_{ad}^{max} в ферромагнетиках с магнитными фазовыми переходами I рода, по сравнению с теми, которые имеются в точке Кюри при фазовых переходах II рода, сопровождается изменением характера температурной зависимости этих величин (рис. 1 и 2). Для ферромагнетиков с переходом II рода имеется один фазовый переход в точке Кюри ($H = 0$). В этом случае намагниченность при T_C изменяется непрерывно, как при отсутствии магнитного поля, так и в магнитном поле. Соответственно температурная зависимость $\Delta S_M^{max}(T)$ демонстрирует лишь один острый пик [9] (рис. 1).

Для ферромагнетиков с магнитным фазовым переходом I его проявления наблюдаются в виде скачков намагниченности при температуре $T_C(H = 0)$, а также в точке $T_C(H \neq 0)$. Причем $T_C(H \neq 0) > T_C(H = 0)$. Поэтому в температурной зависимости $\Delta S_M^{max}(T)$ наблюдается

П-образная кривая с двумя точками резкого изменения этой величины при указанных выше температурах (рис. 2). Величина скачка энтропии в точке $T_C(H = 0)$ составляет $\approx 50 \text{ J/kg K}$, что соответствует величине разрыва намагниченности $\Delta m \approx 0,7$. Экспериментальные данные подтверждают эти выводы. При сравнении рисунков 1 и 2 необходимо также обратить внимание на резкое возрастание численных значений $\Delta S_M^{max}(T_C)$ при фазовых переходах I рода.

Из формулы для термодинамического потенциала (2) следует также выражение для решеточной части энтропии [5]:

$$S_F = -Nk_B \left[3 \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\Theta}{T} \right) \right) - 4D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right]. \quad (10)$$

С помощью формул (5) и (10) можно вычислить величину ΔT_{ad}^{max} . Она определяется из условия адиабатичности:

$$S_M^{max}(T, 0) + S_F(T, 0) = S_M^{max}(T + \Delta T_{ad}^{max}, H) + S_F(T + \Delta T_{ad}^{max}, H). \quad (11)$$

Здесь предполагается, что электронный вклад в полную энтропию ферромагнетика мал.

Результат расчета адиабатического изменения температуры ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$ при включении магнитного поля $H = 4 \text{ Т}$ представлен на рис. 3, он удовлетворительно согласуется с экспериментом.

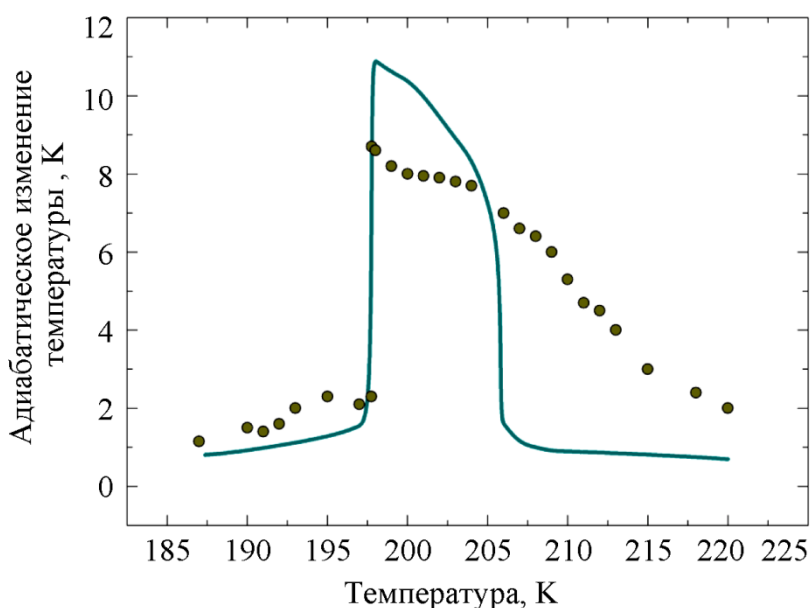


Рис. 3. Адиабатическое изменение температуры при включении магнитного поля 4Тл в зависимости от исходной температуры ферромагнетика $\text{La}(\text{Fe}_{0,88}\text{Si}_{0,12})_{13}$. Сплошная линия – результат расчета по формуле (9). Кружки – экспериментальные данные работы [11]

В работе [8] также показано, что применение обменно-стрикционной модели и модели Киттеля позволяет количественно объяснить основные магнитные свойства (температурной зависимости намагниченности и относительного изменения объема, зависимости T_N и T_C от давления) антиферромагнитной и ферромагнитной фаз сплава Fe-Rh. В этой работе продемонстрировано, что предположение об отрицательной самопроизвольной объемной магнитострикции в антиферромагнитном состоянии и положительном – в ферромагнитной фазе приводит к теоретическим результатам, воспроизводящим экспериментальные данные. Причем наличие сильной зависимости обменных интегралов антиферромагнитной и ферромаг-

нитной фаз сплава Fe-Rh от объема (давления и температуры) являются важными моментами при анализе рекордного МКЭ этого сплава.

4. Выводы

Таким образом, наш анализ и экспериментальные данные свидетельствуют, что большая величина МКЭ наблюдается в том случае, когда при магнитном фазовом переходе объем немагнитной и магнитоупорядоченной фаз заметно различается. Так, для соединений $(\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}; \text{RCO}_2$ и Fe-Rh спонтанная объемная магнитострикция $\omega \sim 10^{-2}$ и $\gamma \approx 10^{-12}$ эрг (10^{-19} Дж) [5–8]. Эти численные значения ω и γ можно принять за ориентир при поиске новых соединений с большим МКЭ.

Анализ особенностей зависимости $\Delta S_M^{\max}$ от магнитного поля для ферромагнетиков с фазовыми переходами первого и II рода, выполненный в рамках предлагаемого обобщенного феноменологического подхода, показывает, что рекордные значения $\Delta S_M^{\max}$ порядка (20–40) J/kg K и значения $\Delta T_{ad}^{\max}$ порядка 10 K требуют использования соединений с магнитными моментами 5–10 μ_B на атом и T_C примерно 300 K. При этом для магнетиков с фазовыми переходами I рода величина скачка намагниченности должна быть порядка 1 μ_B в точке Кюри.

Благодарность

Работа выполнена с использованием УНУ «НМК ИФМ» в рамках Госзадания ИФМ УрО РАН (тема «ПОТОК») при поддержке гранта № 18-10-2-22 программы фундаментальных исследований УрО РАН.

Литература

1. Magnetocaloric effect: From materials research to refrigeration device / V. Franco, J. S. Blázquez, J. J. Ipus, J. Y. Law, L. M. Moreno-Ramírez, A. Conde // Progress in Materials Science. – 2018. – Vol. 93, pp. 112–232. – DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.005.
2. Description and performance of a near-room temperature magnetic refrigerator / C. Zimm, A. Jastrab, A. Sternberg, V. Pecharsky, K. Gschneidner, M. Osborne, I. Anderson // Advances in cryogenic engineering book series (ACRE, vol. 43) / ed. by P. Kittel. – Boston : Springer, MA, 1998. – Vol. 43. – P. 1759–1766. – DOI: 10.1007/978-1-4757-9047-4_222. – Online ISBN: 978-1-4757-9047-4.
3. Bean C. P., Rotbell D. C. Magnetic disorder as first-order phase transition // Phys. Rev. – 1962. – Vol. 126. – P. 104–115. – DOI: 10.1103/PhysRev.126.104.
4. Kittel C. Model of exchange-inversion magnetization // Phys. Rev. – 1960. – Vol. 120. – P. 335–342. – DOI: 10.1103/PhysRev.120.335.
5. Valiev E. Z., Kazantsev V. A. Magnetocaloric effect in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ ferromagnets // Physics of Metals and Metallography. – 2011. – Vol. 113, no. 6. – P. 1000–1005. – DOI: 10.1134/S1063776111150118.
6. Valiev E. Z. Isotropic Magnetoelastic Interaction in Two-Sublattice Ferri- and Antiferromagnets: Mean-Field Approximation for the Heisenberg Model // Physics of Metals and Metallography. – 2003. – Vol. 96, no. 2. – P. 121–127.
7. Valiev E. Z. Entropy and Magnetocaloric Effect in Ferrimagnets RCO_2 // Physics of Metals and Metallography. – 2017. – Vol. 124, no. 6. – P. 968–974. – DOI: 10.1134/S1063776117060048.
8. Application of the exchange-striction model for the calculation of the FeRh alloys magnetic properties / E. Valiev, R. Gimaev, V. Zverev, K. Kamilov, A. Pyatakov, B. Kovalev, A. Tishin // Intermetallics. – 2019. – Vol. 108. – P. 81–86. – DOI: 10.1016/j.intermet.2019.02.015.

9. Valiev E. Z. Entropy and Magnetocaloric Effect in Ferromagnets and Antiferromagnets // Physics of Metals and Metallography. – 2007. – Vol. 104, no. 1. – P. 8–12. – DOI: 10.1134/S0031918X07070022.
10. Valiev E. Z. Entropy and magnetocaloric effects in ferromagnets undergoing first- and second-order magnetic phase transitions // JETP. – 2009. – Vol. 108, no. 2. – P. 279–285. – DOI: 10.1134/S1063776109020101.
11. Fujita A., Akamatsu Y., Fukamishi K. Itinerant-electron metamagnetic transition in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ intermetallic compounds // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 85. – P. 4756–4758. – DOI: 10.1063/1.370471.
12. Itinerant-electron metamagnetic transition and large magnetocaloric effect in $\text{La}(\text{Fe}_x\text{Si}_{1-x})_{13}$ compounds and their hydrides / A. Fujita, S. Fujieda, Y. Hasegawa, K. Fukamishi // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 67, no. 10. – P. 104416. – DOI: 10.1103/PhysRevB.67.104416.

Received: 16.08.2019

Revised: 24.08.2019

Accepted: 30.08.2019

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.016-025

ON THE ANALYTICAL CONSTRUCTION OF A HEAT WAVE FOR THE NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A SOURCE IN POLAR COORDINATES

A. L. Kazakov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a__kazakov@mail.ru

Corresponding author. E-mail: a__kazakov@mail.ru

Address for correspondence: 34, ul. Komsomolskaya, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 22; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper is devoted to the study of a nonlinear second-order parabolic equation, which in the literature is called the heat equation with a source or the generalized porous medium equation. We construct specialized solutions that describe disturbances propagating over the zero background at a finite velocity (heat waves). Previously, we studied such problems without a source. In this paper, we extend the known results to a more general case. The theorem of the existence and uniqueness of a solution having the form of a heat wave in polar coordinates is proved. A heat wave is constructed in the form of a convergent multiple power series, the coefficients of which are determined when solving systems of linear algebraic equations. We give an example where the conditions of the theorem are not satisfied. It shows that the solution, in this case, has the form of a stable heat wave.

Keywords: nonlinear heat conduction equation, heat wave, power series, convergence, existence and uniqueness theorem.

Acknowledgment

The work was partially supported by the Complex Program of UB RAS, project No. 18-1-1-5.

References

1. Samarsky A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Blow-Up in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 476 p. (In Russian).
2. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p. ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
3. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh efektov* [Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena], Moscow, Fizmatlit Publ., 1966, 687 p. (In Russian).
4. Kovalev V.A., Kurkina E.S., Kuretova E.D. Thermal self-focusing during solar flares. *Plasma Physics Reports*, 2017, vol. 43, no. 5, pp. 583–587. DOI: 10.1134/S1063780X17050063.
5. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhydkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Flow of Liquids and Gases in Natural Reservoirs]. Moscow, Nedra Publ., 1984, 211 p. (In Russian).
6. Sidorov A.F. *Izbrannye Trudy. Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics, Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian). ISBN 5-9221-0103-X.

7. Leont'ev N.E., Tatarenkova D.A. Exact solutions to nonlinear equations of suspension flow through a porous medium. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2015, vol. 70, no. 3, pp. 61–65. DOI: 10.3103/S0027133015030024.
8. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 107–117. DOI: 10.1134/S0965542507010113.
9. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem with Applications]. Novosibirsk, Nauka, 2006, 399 p. (In Russian). ISBN 5-02-032540-6.
10. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129. (In Russian).
11. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Study of the Boundary-Value Problem of Nonlinear Filtration with Degeneration. *Vychisl. Tekhnol.*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68. (In Russian).
12. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary element method and power series method for one-dimensional non-linear filtration problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, iss. 2, pp. 2–17. (In Russian).
13. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 10–11, pp. 6918–6928. DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
14. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On one boundary value problem for a nonlinear heat equation in the case of two space variables. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 12, no. 2, pp. 1–11. DOI: 10.1134/S1990478914020094.
15. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the Analytic Solutions of a Special Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Polar Coordinates. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 1–11. DOI: 10.1134/S1990478918020060.
16. Kazakov A.L. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 114–122. (In Russian).
17. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a.
18. Filimonov M.Yu. Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations. *AIP Conference Proceeding*, 2014, vol. 1631, pp. 218–223. DOI: 10.1063/1.4902479.
19. Courant R., Hilbert D. In *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: Partial Differential Equations, New York, Wiley, 2008, 852 p. ISBN: 978-3-527-61724-1.
20. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A. Solution of the Problem of Initiating the Heat Wave for a Nonlinear Heat Conduction Equation Using the Boundary Element Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.

Подана в журнал: 16.08.2019

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.016-025

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

А. Л. Казаков

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, 620049, Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a__kazakov@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: a__kazakov@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 362–30–22; факс: +7 (343) 374–53–30

Работа посвящена исследованию нелинейного параболического уравнения второго порядка, которое в литературе называют уравнением теплопроводности с источником или «generalized porous medium equation». Для него строятся решения специального вида, которые описывают возмущения, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью (тепловые волны). Ранее такие задачи рассматривались в отсутствии источника. В настоящей работе известные научные результаты переносятся на более общий случай. Производится переход в полярную систему координат, доказывается теорема существования и единственности решения, имеющего вид тепловой волны. Она строится в виде сходящегося кратного степенного ряда, коэффициенты которого определяются при решении систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен пример, в котором условия теоремы не выполнены, и показано, что решение в этом случае имеет вид остановившейся (неподвижной) тепловой волны.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, тепловая волна, степенной ряд, сходимости, теорема существования и единственности.

1. Введение

Нелинейное уравнение теплопроводности с источником [1], которое также называют «generalized porous medium equation» [2], является одним из наиболее известных объектов математической физики. Оно имеет многочисленные приложения и используется при описании высокотемпературной плазмы [3, 4], процессов лучистой теплопроводности [1], фильтрации газа в пористом грунте [5] и т. д.

Существует большое количество публикаций, посвященных разностороннему исследованию этого уравнения, его аналогов и обобщений. Объясняется это, помимо уже упомянутых приложений, его нетривиальными математическими свойствами. Известно, например, что скорость распространения возмущений, им описываемых, может быть конечной [6]. Именно такого рода решения рассматриваются в настоящей статье. Обзор исследований в данном направлении не входит в цели настоящей работы, однако упомянем публикации, посвященные построению точных [7] и приближенных решений [8], а также работы автора, посвященные доказательству аналогов и обобщений [9] теоремы Коши-Ковалевской в многомерном случае [10], построению приближенных решений разностными методами [11], методами степенных рядов и граничных элементов [10, 12, 13].

2. Постановка задачи и начальные допущения

Одна из форм записи нелинейного уравнения теплопроводности с источником имеет вид

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + \alpha u^\beta. \quad (1)$$

Здесь $F(u) = \alpha u^\beta$ – функция источника ($\alpha > 0$) или стока ($\beta < 0$). Рассмотрим (1) в случае двух пространственных переменных [14]. Перейдем к полярным координатам. Пусть x – пространственная переменная; $\varphi \in (-\pi, \pi]$ – полярный угол; t – время (как и ранее). Получим уравнение

$$u_t = uu_{xx} + \frac{uu_{\varphi\varphi}}{x^2} + \frac{u_x^2}{\sigma} + \frac{u u_x}{x} + \frac{u_\varphi^2}{\sigma x^2} + \alpha u^\beta. \quad (2)$$

Для уравнения (2) рассмотрим краевое условие

$$u(t, x, \varphi)|_{x=R(t, \varphi)} = f(t, \varphi). \quad (3)$$

Пусть кривая $\rho = R(t, \varphi)$ замкнута и ограничивает в R^2 звездную область (в области имеется полюс, который можно соединить с любой другой точкой области отрезком, целиком ей принадлежащим). Гладкие функции $R(t, \varphi) > 0$ и $f(t, \varphi)$ удовлетворяют неравенствам $R_t|_{t=0} \geq 0$, $f_t|_{t=0} \geq 0$ и

$$(R_t|_{t=0})^2 + (f_t|_{t=0})^2 > 0. \quad (4)$$

Пусть также $f(0, \varphi) = 0$ и $F(0) = 0$. Ранее задача (2), (3) исследовалась нами в случае, когда $\alpha = 0$, т. е. без источника (стока) [15].

3. Основной результат

Сформулируем и докажем теорему существования и единственности решения задачи (2), (3), которая является основным результатом настоящего исследования. Под *аналитической* далее понимается функция, совпадающая в некоторой области со своим тейлоровским разложением.

Теорема. Пусть $R(t, \varphi)$ и $f(t, \varphi)$ – функции, аналитические в некоторой окрестности $t = 0$; $\beta \in \mathbb{N}$, и выполнено неравенство (4). Тогда задача (2), (3) имеет /в окрестности $t = 0$; $\rho = R(t, \varphi)$ ненулевое аналитическое решение, единственное при выборе направления движения тепловой волны.

Доказательство проводится в два этапа. 1. Построение решения в виде степенного [16] (специального [17, 18]) ряда. 2. Доказательство сходимости методом мажорант [19]. Отметим, что разработка методики построения решений нелинейных краевых задач математической физики в виде специальных (характеристических) рядов является одним из важных достижений научной школы А.Ф. Сидорова [6], к которой принадлежит автор [16].

Для удобства дальнейших выкладок введем новую независимую переменную $r = x - R(t, \varphi)$. Задача (2), (3) примет вид:

$$u_t - R_t u_r = \left(u u_{rr} + \frac{1}{\sigma} u_r^2 \right) g + G, \quad (5)$$

$$u(t, r, \varphi) \big|_{r=0} = f(t, \varphi), \quad (6)$$

$$\text{где } G = u \left[\frac{u_r}{r+R} + \frac{u_{\varphi\varphi} - 2R_\varphi u_{\varphi r} - R_{\varphi\varphi} u_r}{(r+R)^2} \right] + \frac{u_\varphi^2 - 2R_\varphi u_r u_\varphi}{\sigma(r+R)^2} + \alpha u^\beta, \quad g(t, r, \varphi) = 1 + \left(\frac{R_\varphi}{r+R} \right)^2.$$

Решение будем строить в виде двойного ряда:

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi) \frac{t^n}{n!} \frac{r^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi) \frac{t^n}{n!} \frac{[x - R(t, \varphi)]^m}{m!}, \quad (7)$$

коэффициенты которого определяются при последовательном решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с неограниченно возрастающей размерностью. Отметим, что такого рода конструкции обычно характерны для уравнений и систем гиперболического типа [9].

По условию теоремы R и f – аналитические функции. Следовательно, для них справедливы разложения:

$$R(t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\varphi) \frac{t^n}{n!}, \quad R_n = \left. \frac{\partial^n R}{\partial t^n} \right|_{t=0}; \quad f(t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varphi) \frac{t^n}{n!}, \quad f_n = \left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

Из краевого условия (6) следует, что $u_{n,0} = f_n$, причем $u_{0,0} = f_0 = 0$. Остальные коэффициенты определяются индукцией по сумме индексов. Пусть сумма индексов равна 1. Известно, что $u_{1,0} = f_1$. Коэффициент $u_{0,1}$ найдем, положив $t = r = 0$ в уравнении (5). С учетом равенства $u(0, 0, \varphi) = 0$ получим квадратное уравнение, корни которого имеют вид

$$u_{0,1} = \frac{-\sigma R_1 \pm \sqrt{(\sigma R_1)^2 + 4\sigma g_{0,0} f_1}}{2g_{0,0}},$$

где $g_{0,0}(\varphi) = g(0, 0, \varphi)$. Выбор знака перед корнем определяет направление движения тепловой волны. При этом условие (4) обеспечивает наличие хотя бы одного ненулевого корня. База индукции установлена.

Пусть найдены коэффициенты $u_{i,j}$, $i+j \leq n$ (до порядка n включительно).

Воспользуемся дифференциальным оператором $L_{n-k,k}[\cdot] = \left. \frac{\partial^n [\cdot]}{\partial^{n-k} t \partial^k r} \right|_{t=r=0}$, $n \geq 2, 0 \leq k \leq n$.

Применяя его к уравнению (4), получим равенство

$$u_{n-k+1,k} + A_k u_{n-k,k+1} + B_{n-k} u_{n-k-1,k+2} = C_{n-k,k}, \quad (8)$$

где $A_i = -R_i - g_{0,0} u_{0,1}(i+2/\sigma)$, $B_i = -i f_1$. При этом все искомые величины (сумма нижних индексов у них равна $n+1$) находятся в левой части уравнения (8). Значения $C_{n-k,k}$ зависят от коэффициентов порядка не выше n , т. е. известны (соответствующие формулы здесь

не приводятся из-за громоздкости). Полагая в (8) $k = 0, 1, \dots, n$, получаем СЛАУ с квадратной трехдиагональной матрицей, для которой, как можно убедиться, не выполнено условие диагонального преобладания. Тем не менее, используя ранее доказанное авторами утверждение [15], можно показать, что она невырожденная. Следовательно, система (8) однозначно разрешима и производные порядка $n + 1$, а, значит, и все коэффициенты ряда (7), определяются единственным образом.

Особого обсуждения заслуживает применение оператора $L_{n-k,k}$ к функции источника (стока). Поскольку, в соответствии с условием теоремы, $\beta \in \mathbb{R}$, то производные любого порядка здесь определяются однозначно, однако сама процедура дифференцирования является весьма громоздкой, так как необходимо многократно дифференцировать сложную функцию $F(u(t, r, \phi))$. В частности:

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= 0, F_{1,0} = \alpha\beta u^{\beta-1} u_{1,0}, F_{0,1} = \alpha\beta u^{\beta-1} u_{0,1}, F_{2,0} = \alpha\beta(\beta-1)u^{\beta-1} u_{1,0}^2 + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{2,0}, \\ F_{1,1} &= \alpha\beta(\beta-1)u^{\beta-1} u_{1,0} u_{0,1} + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{1,1}, F_{0,2} = \alpha\beta(\beta-1)u^{\beta-1} u_{0,1}^2 + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{0,2}, \dots \end{aligned}$$

Указанное обстоятельство имеет важное значение, если необходимо выписать явные формулы коэффициентов – появление источника (стока) значительно повышает громоздкость процедуры. Исключением является случай, когда $\beta = 1$: здесь $F_{i,j} = \alpha u_{i,j}$.

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства. Перед построением мажорантной задачи последовательно сделаем в (5), (6) несколько невырожденных замен.

Из постановки задачи следует, что существует фронт тепловой волны ([15]), т. е. замкнутая аналитическая кривая $x = a(t, \phi)$, которая неявно задается равенствами

$$u(t, r, \phi)|_{r=a(t, \phi)} = 0, a(0, \phi) = R(0, \phi). \quad (9)$$

Пусть $b(t, \phi) = a(t, \phi) - R(t, \phi)$ – расстояние от линии $x = R(t, \phi)$ до фронта тепловой волны. Введем новые независимые переменные τ, s, ϕ_1

$$\tau = t, s = r - b(t, \phi), \phi_1 = \phi. \quad (10)$$

Задача (5), (6), (9) после замены (10) примет вид (индекс у третьей независимой переменной далее для простоты опущен):

$$u_\tau - b_\tau u_s - R_\tau u_s = \left(uu_{ss} + \frac{1}{\sigma} u_s^2 \right) g + G, \quad (11)$$

$$u(\tau, s, \phi)|_{s=-b(\tau, \phi)} = f(\tau, \phi), \quad (12)$$

$$u(\tau, s, \phi)|_{s=0} = 0, \quad (13)$$

Краевые условия (6) и (9) преобразуются в равенства (12) и (13) соответственно. В задаче появилась дополнительная функция b . Чтобы избавиться от нее, сделаем замену

$$s = s(\tau, u, \phi) \quad (14)$$

которая является аналогом преобразования годографа. Подобные замены неоднократно применялись в работах А.Ф. Сидорова и его учеников [6]. Можно видеть, что (14) меняет ролями неизвестную функцию u и независимую переменную s . Краевые условия (12) и (13) примут вид:

$$s(\tau, u, \varphi) \big|_{u=f(\tau, \varphi)} = -b(\tau, \varphi), \quad (15)$$

$$s(\tau, u, \varphi) \big|_{u=0} = 0. \quad (16)$$

Из равенства (15) можно выразить неизвестную функцию b и подставить в уравнение (11), исключив тем самым данную функцию из рассмотрения.

Далее введем новую независимую переменную $w = u - f$, в результате чего линия $u = f$ становится новой координатной осью. Чтобы выразить τ через новые переменные, используем теорему о неявной функции и представим искомую функцию в виде частичного разложения в ряд Тейлора по степеням u :

$$s(u, w, \varphi) = s_0(w, \varphi) + u s_1(w, \varphi) + u^2 p(u, w, \varphi).$$

Здесь $s_0 \equiv 0$ (16); s_1 – известная аналитическая функция, вид которой несущественен для целей доказательства, а p – новая искомая функция. В итоге задача сводится к одному уравнению вида

$$\begin{aligned} \frac{2(1+\sigma)}{\sigma} p + \frac{4\sigma+1}{\sigma} u p_u + u^2 p_{uu} + c_0(w, \varphi) p \big|_{w=0} + c_1(w, \varphi) u (p_u \big|_{w=0}) + c_2(w, \varphi) u^2 (p_{uu} \big|_{w=0}) = \\ = h_0 + u h_1 + u^2 h_2 + u^3 h_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции c_i , $i = 0, 1, 2$ и h_j , $j = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям леммы 2 из статьи [15]. Следовательно, уравнение (17) имеет единственное нетривиальное решение в виде формального ряда по степеням u . Можно показать, что при выполнении мажорантных оценок $P_0 \ll S_0$, $P_1 \ll c_1$, $c^* \ll c_0 + c_1 + c_2$ и $H_j \ll h_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, задача

$$P_{uu} = (1 + c^*) \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial u^2} + \frac{\partial H_1}{\partial u} + H_2 + u H_3 \right), \quad P \big|_{u=0} = P_0, \quad P_u \big|_{u=0} = P_1 \quad (18)$$

является мажорантной для уравнения (17). Положив в уравнении (18) $u = 0$, найдем $P_2 = P_{uu} \big|_{u=0}$. Далее, продифференцировав (18) по u и разрешив выражение относительно P_{uuu} , получим задачу типа Ковалевской с аналитическими входными данными, которая по теореме Коши-Ковалевской [19] имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана.

Замечание 1. При $f(t, \varphi) \equiv 0$ исследование задачи существенно упрощается. В частности, решение в этом случае можно построить в виде ряда по степеням одной переменной r , а для построения мажорантной задачи достаточно сделать одну замену $u(t, r, \varphi) = r u_1(t, \varphi) + r^2 U(t, r, \varphi)$, где u_1 – некоторая известная функция.

Замечание 2. Поскольку рекуррентная процедура, использованная в ходе доказательства, вполне конструктивна, теорема не только обеспечивает существование аналитического решения рассмотренной задачи, но и доставляет алгоритм построения приближенных решений в виде отрезков ряда (7), которые, в частности, можно использовать в качестве тестовых примеров при проверке корректности результатов расчетов, выполненных другими методами [20].

4. Остановившаяся тепловая волна

Условие (4) играет существенную роль при доказательстве теоремы и носит принципиальный характер, однако его невыполнение не обязательно влечет неразрешимость задачи. Покажем на конкретном примере, что может происходить в случае, когда оно не выполняется. Рассмотрим уравнение (1) в случае плоской симметрии:

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + \alpha u^\beta, \quad (19)$$

Граничное условие (3) также упростим:

$$u(t, x)|_{x=R} = 0. \quad (20)$$

Несложно убедиться, что стандартная процедура построения решения в виде ряда возможна лишь при введении дополнительного краевого условия $u|_{t=0} = q(x) \neq 0$, $q(0) = q'(0) = 0$. Вопрос о сходимости ряда, который получается в этом случае, пока открыт. Тем не менее можно утверждать, что задача (19), (20) имеет некоторые частные точные аналитические решения.

Утверждение. Задача (19), (20) имеет следующие нетривиальные точные решения вида остановившейся (неподвижной) тепловой волны:

1. При $\alpha = 0$: $u(t, x) = \frac{C_1(x - R)^2}{(2 + 4/\sigma)(C_2 - C_1 t)}$.
2. При $\beta = 1, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$: $u(t, x) = \frac{C_1(x - R)^2}{(2 + 4/\sigma)(C_2 \exp(-\alpha t) - C_1/\alpha)}$.

Здесь $C_1, C_2 \neq 0 - \text{const}$.

Доказательство. Утверждение доказывается с помощью представления $u(t, x) = v_1(t)v_2(x)$ (методом Фурье), после подстановки которого в исходную задачу получается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование последней дает искомые решения.

Таким образом показано, что невыполнение условий теоремы может привести к тому, что фронт тепловой волны будет неподвижен. Подобные решения рассматривались, в частности, в работе [1].

5. Заключение

Подводя итог исследования отметим, что в ходе него была доказана новая теорема существования и единственности решений типа тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности с источником, которая обобщила ранее полученные результаты автора. Важной отличительной чертой теоремы является то, что она, помимо установления факта существования решения при выполнении определенных предположений, сформулированных

в условии, также позволяет строить приближенные решения по конструктивной рекуррентной процедуре. Рассмотрен также пример, который показывает, что при невыполнении условий доказанной теоремы возможна ситуация, когда тепловая волна существует, однако она не движется (остановившаяся тепловая волна).

Благодарность

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН, проект № 18-1-1-5.

Литература

1. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 476 с.
2. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М. : Физматлит, 1966. – 687 с.
4. Kovalev V. A., Kurkina E. S., Kuretova E. D. Thermal self-focusing during solar flares / Plasma Physics Reports. – 2017. – Vol. 43, no. 5. – P. 583–587. – DOI: 10.1134/S1063780X17050063.
5. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М. : Недра, 1984. – 211 с.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.
7. Леонтьев Н. Е., Татаренкова Д. А. Точные решения нелинейных уравнений течения суспензии в пористой среде // Вестник Московского университета. Серия 1 «Математика. Механика». – 2015. – № 3. – С. 49–54. – DOI: 10.3103/S0027133015030024.
8. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.
9. Баутин С. П., Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. – Новосибирск : Наука, 2006. – 399 с. – ISBN 5-02-032540-6.
10. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
11. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
12. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия ИГУ. Серия «Математика». – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
13. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
14. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сибирский журнал промышленной математики. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 46–54.
15. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сибирский журнал промышленной математики. – 2018. – Т. 21, № 2. – С. 56–65. – DOI: 10.17377/SIBJIM.2018.21.205.

16. Казаков А. Л. Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 114–122.
17. Филимонов М. Ю. Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1100–1107.
18. Filimonov M. Yu. Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations // AIP Conference Proceeding. – 2014. – Vol. 1631, iss. 1 –. P. 218–223. – DOI: 10.1063/1.4902479.
19. Курант Р. Уравнения с частными производными / пер. с англ. – М. : Мир, 1964. – 830 с.
20. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. Solution of the Problem of Initiating the Heat Wave for a Nonlinear Heat Conduction Equation Using the Boundary Element Method / Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 59, no. 6. – P. 1015–1029. – DOI: 10.1134/S0965542519060083.

Received: 30.05.2019
Revised: 26.07.2019
Accepted: 09.08.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.026-037

SPECIFIC FEATURES OF THE GRAIN STRUCTURE IN Ni-Cu ALLOYS AT THE SATURATION STAGE UNDER HIGH-PRESSURE TORSION

A. V. Stolbovsky^{a)*}, V. V. Popov^{b)}, E. N. Popova^{c)} and S. A. Murzinova^{d)}

*M. N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, Russian Federation*

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;
^{b)}  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;
^{c)}  <http://orcid.org/0000-0002-4814-4420>  popova@imp.uran.ru;
^{d)}  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

*Corresponding author: E-mail: stolbovsky@imp.uran.ru

Address for correspondence: ul. S. Kovalevskoy, 18, 620990, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 343 378 35 74; fax: +7 343 374 52 44

Effect of doping in the Ni-Cu system on the structure formed under room-temperature high-pressure torsion is studied, and the statistical analysis of the grain structure under steady-state deformation (saturation stage) is done. It is demonstrated that in all the alloys considered (with 10, 34, and 90 at. % of Cu) there are two groups of crystallites, in one of which a pronounced effect of relaxation processes is observed, whereas in the other one they are not revealed. The ratio of the volume fractions of these groups depends on the alloy composition and, correspondingly, on its melting temperature. It is shown that the final average grain size is formed under the effect of dominating crystallite group depending on the alloy melting temperature. The non-linearity in the crystallite sizes and volume fractions of the crystallite groups dependently on the alloy composition is observed, indicating the noticeable effect of stacking-fault energy on the structure forming under the deformation.

Keywords: copper, Ni-Cu alloys, stacking-fault energy, high-pressure torsion, submicrocrystalline structure, statistical analysis.

Acknowledgment

The work was performed within the state assignment on the theme Function, No. g/r AAAA-A19-119012990095-0 and supported by the Basic Research Program of UB RAS, project No. 18-10-2-37.

References

1. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure. *Acta Mater.*, 2000, vol. 48, no. 1, pp. 1–29. DOI: 10.1016/S1359-6454(99)00285-2.
2. Valiev R.Z., Zhilyaev A.P., Langdon T.G. *Bulk nanostructured materials: Fundamentals and applications*, TMS, Wiley, Hoboken, New Jersey, USA, 2013, 440 p. DOI: 10.1002/9781118742679.
3. Pippin R., Scheriau S., Hohenwarter A., Hafok M. Advantages and limitations of HPT: a review. *Mater. Sci. Forum*, 2008, vol. 584–586, pp. 16–21. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.584-586.16.
4. Korznikov A.V., Tyumentsev A.N., Ditenberg I.A. On the limiting minimum size of grains formed in metallic materials produced by high-pressure torsion. *Phys. Met. Metallogr.*, 2008, vol. 106, no. 4, pp. 418–423. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.584-586.16.

5. Pippan R., Scheriau S., Taylor A., Hafok M., Hohenwarter A., Bachmaier A. Saturation of fragmentation during severe plastic deformation. *Ann. Rev. Mater. Res.*, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 319–343. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070909-104445.
6. Zhao Y.H., Liao X.Z., Zhu Y.T., Horita Z., Langdon T.G. Influence of stacking fault energy on nanostructure formation under high pressure torsion. *Mater. Sci. Eng. A*, 2005, vol. 410–411, pp. 188–193. DOI: 10.1016/j.msea.2005.08.074.
7. Hebesberger T., Stuwe H.P., Vorhauer A., Wetscher F., Pippan R. Structure of Cu deformed by high pressure torsion. *Acta Mater.*, 2005, vol. 53, pp. 393–402. DOI: 10.1016/j.actamat.2004.09.043.
8. Kon'kova T.N., Mironov S.Y., Korznikov A.V. Severe cryogenic deformation of copper. *Phys. Met. Metallogr.*, 2010, vol. 109, no. 2, pp. 171–176. DOI: 10.1134/S0031918X1002009.
9. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Pilyugin V.P. Structure, thermal stability, and state of grain boundaries of copper subjected to high-pressure torsion at cryogenic temperatures. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2014, vol. 78, pp. 908–916. DOI: 10.3103/S1062873814090299.
10. Popov V.V., Popova E.N., Kuznetsov D.D., Stolbovskii A.V., Pilyugin V.P. Thermal Stability of Nickel Structure Obtained by High Pressure Torsion in Liquid Nitrogen. *Physics of Metals and Metallography*, 2014, vol. 115, pp. 682–691. DOI: 10.1134/S0031918X14070060.
11. Pilyugin V.P., Gapontseva T.M., Chashchukhina T.I., Voronova L.M., Shchinova L.I., Degtyarev M.V. Evolution of the structure and hardness of nickel upon cold and low-temperature deformation under pressure. *The Physics of Metals and Metallography*, 2008, vol. 105, no. 4, pp. 409–419. DOI: 10.1134/S0031918X08040157.
12. Zhang H.W., Huang X., Pippan R., Hansen N. Thermal behavior of Ni (99.967 % and 99.5 % purity) deformed to an ultra-high strain by high pressure torsion. *Acta Mater.*, 2010, vol. 58, pp. 1698–1707. DOI: 10.1016/j.actamat.2009.11.012.
13. Zhang H.W., Lu K., Pippan R., Huang X., Hansen N. Enhancement of strength and stability of nanostructured Ni by small amounts of solutes. *Scripta Mater.*, 2011, vol. 65, pp. 481–484. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2011.06.003.
14. Popov V.V., Stolbovsky A.V., Popova E.N., Pilyugin V.P. Structure and thermal stability of Cu after severe plastic deformation. *Def. Diff. Forum*, 2010, vol. 297–301, pp. 1312–1321. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297–301.1312.
15. Edalati K., Fujioka T., Horita Z. Microstructure and mechanical properties of pure Cu processed by high-pressure torsion. *Mater. Sci. Eng. A*, 2008, vol. 497, pp. 168–173. DOI: 10.1016/j.msea.2008.06.039.
16. Zhao Y.H., Zhu Y.T., Liao X.Z., Horita Z., Langdon T.G. Tailoring stacking fault energy for high ductility and high strength in ultrafine grained Cu and its alloy. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, vol. 89, no. 1, pp. 121906. DOI: 10.1063/1.2356310.
17. Zhu Y.T., Huang J.Y., Gubicza J., Ungar T., Wang Y.M., Ma E., Valiev R.Z. Nanostructures in Ti processed by severe plastic deformation. *J. Mater. Res.*, 2003, vol. 18, pp. 1908–1917. DOI: 10.1557/JMR.2003.0267.
18. Dobatkin S.V., Bastarache E.N., Sakai G., Fujita T., Horita Z., Langdon T.G. Grain refinement and superplastic flow in an aluminum alloy processed by high-pressure torsion. *Mater. Sci. Eng. A*, 2005, vol. 408, pp. 141–146. DOI: 10.1016/j.msea.2005.07.023.
19. Qu S., An X.H., Yang H.J., Huang C.X., Yang G., Zang Q.S., Wang Z.G., Wu S.D., Zhang Z.F. Microstructural evolution and mechanical properties of Cu–Al alloys subjected to equal channel angular pressing. *Acta Mater.*, 2009, vol. 57, no. 5, pp. 1586–1601. DOI: 10.1016/j.actamat.2008.12.002.
20. Valiev R.Z., Gertsman V.Y., Kaibyshev O.A. Grain boundary structure and properties under external influences. *Phys. Stat. Sol.*, 1986, vol. 97, no. 1, pp. 11–56. DOI: 10.1002/psa.2210970102.
21. Horita Z., Smith D.J., Furukawa M., Nemoto M. An investigation of grain boundaries in submicrometer-grained Al–Mg solid solution alloys using high-resolution electron microscopy. *J. Mater. Research*, 1996, vol. 11, no. 8, pp. 1880–1890. DOI: 10.1557/JMR.1996.0239.

22. Popov V.V. Mossbauer investigations of grain-boundary diffusion and segregation. *Def. Diff. Forum*, 2007, vol. 263, pp. 69–74. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.258–260.497.
23. Sauvage X., Wilde G., Divinski S.V., Horita Z., Valiev R.Z. Grain boundaries in ultrafine grained materials processed by severe plastic deformation and related phenomena. *Mater. Sci. Eng. A*, 2012, vol. 540, pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.msea.2012.01.080.
24. Popov V.V. Mossbauer Spectroscopy of Interfaces in Metals. *Phys. Met. Metallogr.*, 2012, vol. 113, no. 13, pp. 1257–1289. DOI: 10.1134/S0031918X12130029.
25. Popov V.V., Sergeev A.V., Stolbovsky A.V. Emission Mossbauer spectroscopy of grain boundaries in ultrafine-grained W and Mo produced by severe plastic deformation. *Physics of Metals and Metallography*, 2017, vol. 118, pp. 354–361. DOI: 10.1134/S0031918X17040081.
26. Stolbovsky A., Farafontova E. Statistical analysis method of the grain structure of nanostructured single phase metal materials processed by high-pressure torsion. *Sol. Stat. Phenomena*, 2018, vol. 284, pp. 425–430. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.284.425.
27. Stolbovsky A., Farafontova E. Statistical analysis of histograms of grain size distribution in nanostructured materials processed by severe plastic deformation. *Sol. Stat. Phenomena*, 2018, vol. 284, pp. 431–435. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.284.431.
28. Popov V.V., Stolbovsky A.V., Popova E.N. Structure of nickel-copper alloys subjected to high-pressure torsion to saturation stage. *Phys. Met. Metallogr.*, 2017, vol. 118, pp. 1073–1080. DOI: 10.1134/S0031918X17110114.
29. Emeis F., Peterlechner M., Divinski S.V., Wilde G. Grain boundary engineering parameters for ultrafine grained microstructures: Proof of principles by a systematic composition variation in the Cu–Ni system. *Acta Mater.*, 2018, vol. 50, pp. 262–272. DOI: 10.1016/j.actamat.2018.02.054.
30. Valiev R.Z., Rauch E.F., Baudelet B., Ivanishenko Yu.V. Structure and deformation behaviour of Armco iron subjected to severe plastic deformation. *Acta Mater.*, 1996, vol. 44, no. 12, pp. 4705–4712. DOI: 10.1016/S1359-6454(96)00156-5.
31. Horita Z., Smith D.J., Nemoto M., Valiev R.Z., Langdon T.G. Observations of grain boundary structure in submicrometer-grained Cu and Ni using high-resolution electron microscopy. *J. Mater. Res.*, 1998, vol. 13, no. 2, pp. 446–450. DOI: 10.1557/JMR.1998.0057.
32. Zhilyaev A.P., Nurislamova G.V., Kim B.K., Baro M.D., Szpunar J.A., Langdon T.G. Experimental parameters influencing grain refinement and microstructural evolution during high-pressure torsion. *Acta Mater.*, 2003, vol. 51, pp. 753–765. DOI: 10.1016/S1359-6454(02)00466-4. Zhilyaev A.P., Ohishi K., Langdon T.G., McNelley T.R. Microstructural evolution in commercial purity aluminum during high-pressure torsion. *Mater. Sci. Eng. A*, 2005, vol. 410–411, pp. 277–280. DOI: 10.1016/j.msea.2005.08.044.

Подана в журнал: 30.05.2019
УДК 669.293:539.89:536.425
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.026-037

ОСОБЕННОСТИ ЗЕРЕННОЙ СТРУКТУРЫ НА СТАДИИ НАСЫЩЕНИЯ ПОСЛЕ КРУЧЕНИЯ ПОД ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ В СПЛАВАХ СИСТЕМЫ НИКЕЛЬ–МЕДЬ

А. В. Столбовский^{а)*}, В. В. Попов^{б)}, Е. Н. Попова^{в)}, С. А. Мурзинова^{г)}

*Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,
18, ул. С. Ковалевской, 620108, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;
^{б)}  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;
^{в)}  <http://orcid.org/0000-0002-4814-4420>  popova@imp.uran.ru;
^{г)}  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: stolbovsky@imp.uran.ru
Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620108, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 378–35–74; факс: (343) 374–52–44

Исследовано влияние легирования в системе Ni-Cu на структуру при кручении под высоким давлением при комнатной температуре и произведен статистический анализ зеренной структуры в стадии установившейся деформации (насыщения). Показано, что в сплавах всех рассмотренных составов (10, 34 и 90 ат. % Cu) присутствуют две группы кристаллитов, в одной из которых видно значительное влияние релаксационных процессов, а в другой они не проявляются. Соотношение объемных долей этих групп зависит от состава, и от температуры плавления. Определено, что итоговый средний размер формируется под влиянием доминирующей группы кристаллитов в зависимости от температуры плавления конкретного состава. Отмечена нелинейность в изменении размеров кристаллитов и объемных долей выделенных групп в зависимости от состава сплава, что указывает на существенное влияние ЭДУ на формирующуюся при деформации структуру.

Ключевые слова: медь; сплавы Ni-Cu, энергия дефектов упаковки, кручение под высоким давлением, субмикроструктурная структура, статистический анализ.

1. Введение

В настоящее время объемные металлические материалы с ультрамелкозернистой (УМЗ) структурой, полученной в результате интенсивной пластической деформации (ИПД), привлекают большое внимание исследователей, поскольку они обладают уникальными прочностными, пластическими, диффузионными и другими характеристиками [1, 2].

Одним из наиболее эффективных и широко используемых методов ИПД является кручение под высоким давлением (КВД) [3]. В то же время достижение наноструктурного состояния, в котором преобладают кристаллиты, разделенные высокоугловыми границами, с размерами менее 100 нм, не всегда реализуемо, поскольку наступает стадия насыщения, при которой рост степени деформации уже не приводит ни к дальнейшему измельчению структуры, ни к упрочнению материала [4, 5]. На стадии насыщения наступает равновесие между процессами генерации и аннигиляции дефектов кристаллической решетки. Ключевым процессом, ограничивающим измельчение кристаллической структуры, является миграция границ зерен [5], а наименьшие размеры зерен, достижимые при КВД, определяются прежде всего самим материалом – его кристаллической решеткой, температурой плавления и энергией дефектов упаковки (ЭДУ) [4, 6].

В многочисленных публикациях об эволюции структуры меди и никеля при КВД [7–15] представлено, что эти металлы способны деформироваться без разрушения даже при очень больших степенях деформации, в том числе в условиях низких температур. При этом авторы отмечают значительное влияние температуры на возможность формирования нанокристаллической структуры [9–11]. Другим фактором помимо температуры деформирования, оказывающим существенное влияние на результирующую структуру при ИПД, является энергия дефектов упаковки (ЭДУ) [6, 16]. При высоких значениях ЭДУ доминирующую роль при формировании структуры играют дислокации и их подвижность [17, 18]. В материалах с низкой ЭДУ преобладает двойникование, и меньший размер зерна в одинаковых условиях ИПД наблюдается при более низкой ЭДУ [6, 16, 19].

Наряду с ультрамелкозернистой структурой еще одним важнейшим фактором, влияющим на результирующие свойства материалов, полученных ИПД, является присутствие в них так называемых «неравновесных» границ зерен, которые характеризуются избыточной энергией, повышенным свободным объемом и следовательно, дальнедействующими полями напряжений [20]. В ряде работ подтверждается, что состояние «неравновесных» (деформационно-модифицированных) границ зерен после ИПД отличается от состояния границ рекристаллизационного происхождения в крупнозернистых материалах [21–25].

В недавних работах [26, 27] предложены новые подходы на основе аппарата математической статистики для анализа зеренной структуры в материалах, полученных ИПД, где показано, что наблюдаемые распределения могут содержать несколько наборов зерен с различными характеристиками. Это позволяет проводить глубокий анализ поведения выделенных групп кристаллитов при изменении условий наблюдений, например при нагреве или изменении химического состава.

Цель настоящей работы – расширить имеющиеся представления [28, 29] о сплавах системы Cu-Ni на основе анализа структуры, сформировавшейся на стадии насыщения.

2. Материал и методика исследования

Для исследований использовались сплавы системы Ni-Cu трех составов (10, 34 и 90 ат. % Cu), а также поликристаллический никель чистотой 99,6 % и поликристаллическая медь марки М1, подвергнутые интенсивной пластической деформации. Исходные образцы диаметром 10 мм и толщиной 0,5 мм деформировались на 5 оборотов методом кручения под высоким давлением в наковальнях Бриджмена при комнатной температуре. Среднее давление осевого сжатия дисковых образцов составляло 6 ГПа, что надежно исключало проскальзывание при кручении; угловая скорость вращения наковален 0,3 об./мин. Предварительные исследования показали, что при деформации на 5 об. для всех исследуемых сплавов достигается стадия насыщения.

Структуру деформированных образцов изучали в просвечивающих электронных микроскопах JEM-200CX и Philips CM30 с последующей обработкой снимков с помощью программного комплекса SIAMS-600. При этом строились гистограммы распределения кристаллитов по размерам. Число кристаллитов, по которым строились гистограммы, было не менее 250, и погрешность определения среднего размера кристаллитов составляет при этом доли процента.

3. Результаты исследования и их обсуждение

Формирование структуры при ИПД, в том числе при использовании метода КВД, согласно многочисленным исследованиям [30–33], проходит по следующему механизму: с увеличением величины деформации происходит накопление дислокаций и их локализация в стенках ячеек с дальнейшим увеличением углов разориентации, что в дальнейшем приводит к образованию УМЗ-структуры. Дальнейшая деформация ведет к активации ротационных мод, что обеспечивает наступление стадии насыщения, когда дальнейшее возрастание

величины деформации уже не приводит к существенным изменениям структуры. При этом определяющим фактором для фрагментации структуры является подвижность дислокаций, которая зависит от температуры деформации и ЭДУ. Для понижения температуры используют деформирование в жидком азоте [10, 11, 14], а для изменения ЭДУ, как правило, прибегают к легированию [28, 29].

Ранее в работе [28] было рассмотрено формирование структуры на стадии насыщения в системе Cu-Ni в общем и не затрагивался детальный анализ формирующихся структур. В то же время в работах [26, 27] предложены подходы, позволяющие выделять отдельные группы кристаллитов, обобщенные определенными признаками, такими как средний размер зерна и величина разброса значений относительно его среднего значения. Было показано, что материалы, наноструктурированные методом КВД, в результирующей структуре могут иметь несколько групп кристаллитов с отличным друг от друга поведением при нагреве. Следовательно, можно говорить о различном состоянии границ зерен для данных групп кристаллитов, поскольку именно их подвижность и определяет характер поведения кристаллитов при дальнейшем нагреве. Кроме того, в работе [3] показано, что при ИПД методом КВД на стадии насыщения возможна реализация механизма релаксации, заключающегося в перестройке зеренной структуры путем движения уже сформированных межкристаллитных границ непосредственно в процессе деформации.

На рис. 1 представлены гистограммы распределения зерен по размерам для сплавов системы Ni-Cu с разложением на отдельные группы кристаллитов.

Разделение по группам производилось на основе подхода, представленного в работе [27]. Группы кристаллитов аппроксимировались моделью, представленной в работе [26], следующего вида:

$$f(x) = A \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} + B \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} \cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2S^2}}, \quad (1)$$

где $M = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ – среднее значение для компоненты модели нормального распределения, рассчитанное из соответствующей величины для логарифмического нормального распределения; S – стандартное отклонение, также рассчитанное из соответствующей величины для логарифмического нормального распределения; μ и σ – соответственно среднее значение и стандартное отклонение для логнормального распределения; A и B – размерные факторы, определяющие вклад соответствующей компоненты.

Результаты расчетов представлены на рис. 2. Обобщение выделенных распределений кристаллитов с отнесением к той или иной группе производилось из принципа плавного изменения всех определяемых характеристик в совокупности.

При анализе полученных результатов необходимо учесть два важных фактора, влияющих на результирующую структуру исследуемых составов. Так, при легировании никеля медью можно ожидать образование менее дисперсной структуры, поскольку гомологическая температура такого сплава повышается за счет значительно более низкой температуры плавления легирующего элемента. В то же время с увеличением содержания меди ЭДУ сплава понижается, поскольку у меди ЭДУ почти в два раза ниже, чем у никеля, что должно влиять в противоположном направлении в сравнении с влиянием гомологической температуры. Таким образом, результирующая структура будет зависеть от совокупности влияния обоих факторов.

По результатам разложения можно выделить две отдельные группы кристаллитов, которые можно охарактеризовать не только разной объемной долей и средним размером для разных составов, но и характером их изменения в зависимости от состава.

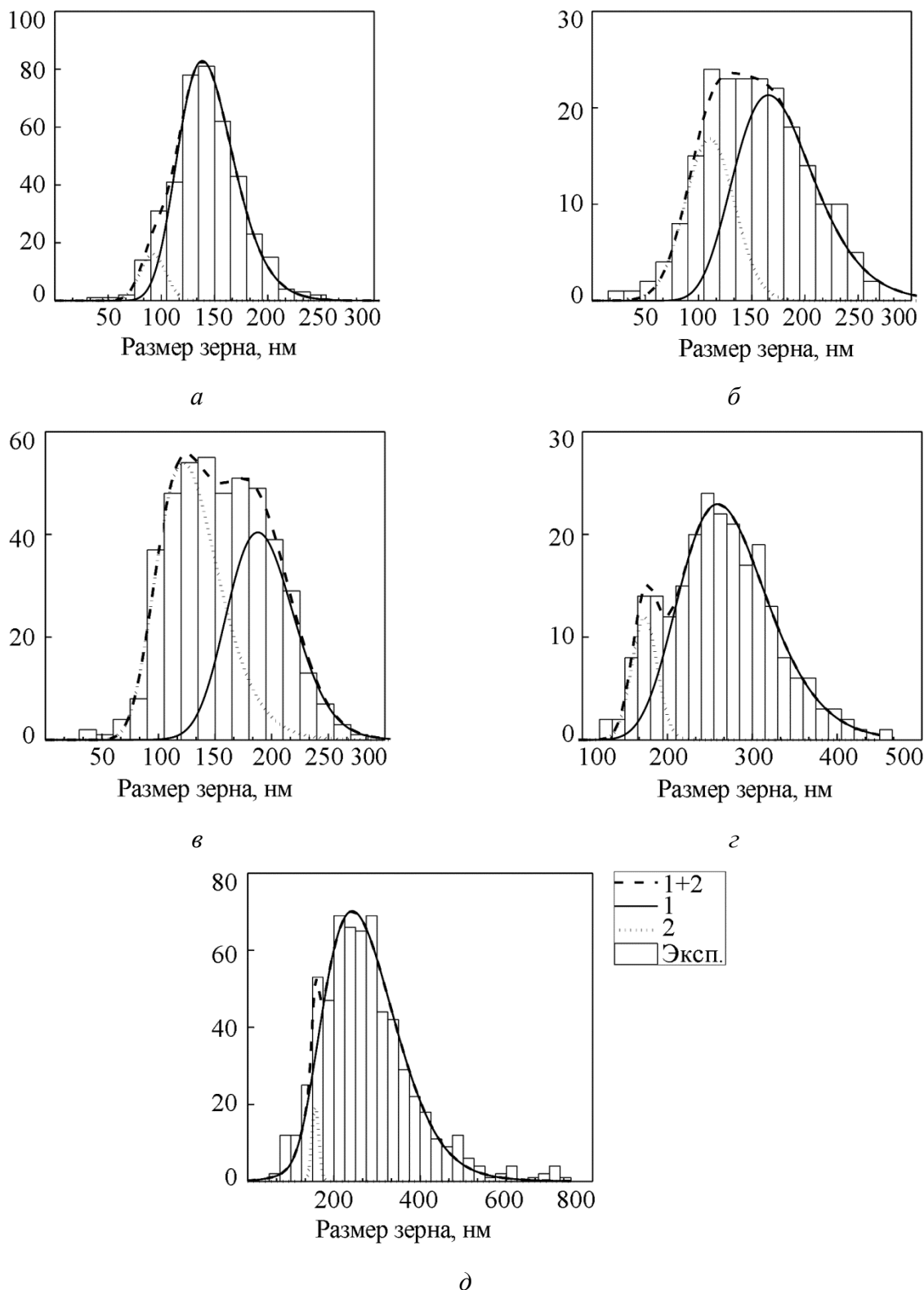


Рис. 1. Гистограммы распределения зерен по размерам для различных составов системы Cu-Ni после КВД на 5 оборотов при комнатной температуре с выделением отдельных групп зерен: *a* – Ni; *б* – Ni-10Cu; *в* – Ni-34Cu; *г* – Cu-10Ni; *д* – Cu

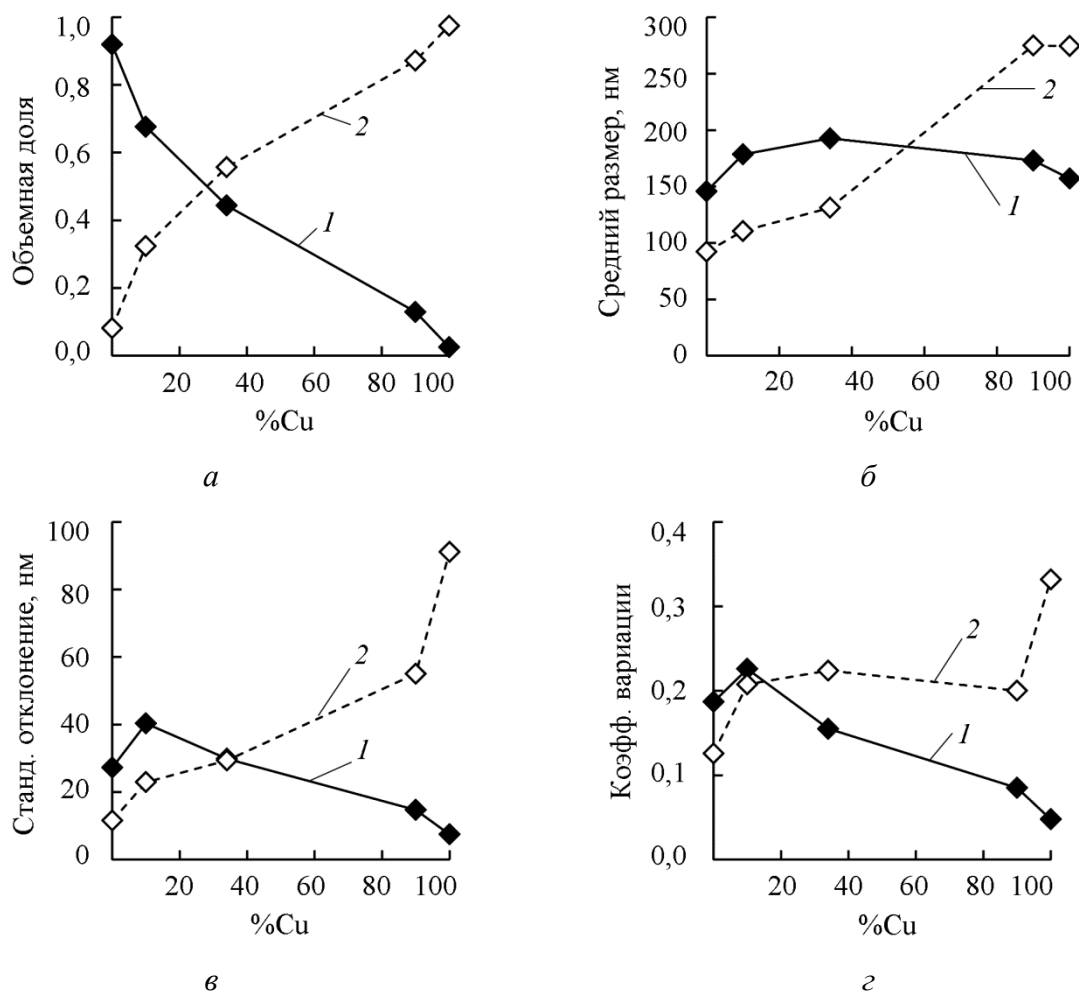


Рис. 2. Результаты расчетов величин модели, полученных из обработки гистограмм распределения зерен по размерам для сплавов различного состава системы Ni-Cu: где 1 и 2 – группы кристаллитов

Если проследить изменения объемных долей групп от состава (рис. 2), то видно, что для крайней левой точки, отвечающей чистому Ni, отмечается доминирование группы 1 со средним размером кристаллитов 145 нм и небольшая доля группы 2 с размером кристаллитов около 90 нм. Для другой крайней точки, отвечающей чистой Cu, уже фиксируется доминирование группы 2, в то же время группы меняются местами по положению на графике зависимости среднего размера кристаллитов от состава. Средний размер кристаллитов группы 1 меняется незначительно и в крайней правой точке составляет 157 нм, в то время как для группы 2 средний размер значительно возрастает и составляет 274 нм.

Это можно объяснить, если взять в рассмотрение склонность сплавов разного состава к прохождению релаксационных процессов. Так, для чистого Ni, имеющего значительно большую температуру плавления, проявление релаксационных процессов как во время деформации, так и после нее, как правило, не наблюдается [10–13]. В то же время для чистой Cu наблюдается существенное влияние релаксационных процессов на результирующую структуру [14]. В результате доминирующей для чистого Ni будет группа кристаллитов, не претерпевших релаксационных процессов, в то время как для чистой Cu доминирующей является группа кристаллитов, сформированных под влиянием релаксационных процессов, что согласуется с данными, полученными в работах [7, 14, 15 и др.]. Следовательно, выделенную группу 1 можно охарактеризовать как совокупность кристаллитов, не претерпевших релак-

сационные процессы, а группу 2 – как кристаллиты, сформированные под существенным влиянием релаксационных процессов. При этом объемные доли этих групп изменяются в зависимости от состава и температуры плавления, что можно наблюдать на полученных зависимостях (рис. 2).

Другую особенность, указывающую на различие выделенных групп кристаллитов, можно наблюдать на зависимостях среднего размера зерна. Для группы 2 характерно планомерное увеличение среднего размера кристаллитов с ростом содержания Cu , и, соответственно, снижения температуры плавления, в то время как для группы 1, сформированной кристаллитами без существенного влияния релаксационных процессов, отмечается незначительное изменение среднего размера вне зависимости от исследуемого состава.

Также необходимо отметить нелинейность в изменении размера кристаллитов и объемных долей выделенных групп кристаллитов в зависимости от состава. Как отмечалось ранее [28], если бы на результирующие параметры структуры влиял только один параметр, например гомологическая температура, то средний размер и микротвердость изменялись бы в зависимости от состава линейно (по правилу смесей). Тот факт, что этого не происходит, свидетельствует о том, что на структуру влияет не только температура, но и ЭДУ, изменение которой в зависимости от состава может не подчиняться правилу смесей и быть нелинейным [29].

4. Заключение

Исследовано влияние легирования в системе Ni-Cu на структуру, формирующуюся при кручении под высоким давлением в условиях комнатной температуры, и произведен статистический анализ зеренной структуры в стадии установившейся деформации (насыщения).

Показано, что во всех рассмотренных составах присутствуют две группы кристаллитов, одна из которых сформирована из кристаллитов при значительном влиянии релаксационных процессов, а другая – зернами без значительного влияния релаксационных процессов. Соотношение объемных долей этих групп зависит от состава и, следовательно, от температуры плавления.

Установлено, что итоговый средний размер формируется под влиянием доминирующей группы кристаллитов в зависимости от температуры плавления конкретного состава. Чем ниже температура плавления, тем больше объемная доля, сформированная кристаллитами при значительном влиянии релаксационных процессов, и тем больше итоговый средний размер, рассчитанный по всем кристаллитам.

Отмечена нелинейность в изменении как размера кристаллитов, так и объемных долей выделенных групп кристаллитов в зависимости от состава сплава. Это указывает не только на влияние температуры плавления, но и существенное влияние ЭДУ, изменение которой в зависимости от состава может не подчиняться правилу смесей и быть нелинейным, что следует учитывать при создании сплавов с заданным комплексом свойств.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Функция» № г/р АААА-А19-119012990095-0 при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 18-10-2-37).

Литература

1. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure // *Acta Mater.* – 2000. – Vol. 48, no. 1. – P. 1–29. – DOI: 10.1016/S1359-6454(99)00285-2.
2. Valiev R. Z., Zhilyaev A. P., Langdon T. G. Bulk nanostructured materials: Fundamentals and applications. – TMS, Wiley : Hoboken, New Jersey, USA, 2013. – P. 440. – DOI: 10.1002/9781118742679.
3. Advantages and limitations of HPT: a review / R. Pippan, S. Scheriau, A. Hohenwarter, M. Hafok // *Mater. Sci. Forum.* – 2008. – Vol. 584–586. – P. 16–21. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.584-586.16.
4. Korznikov A. V., Tyumentsev A. N., Ditenberg I. A. On the limiting minimum size of grains formed in metallic materials produced by high–pressure torsion // *Phys. Met. Metallogr.* – 2008. – Vol. 106, no. 4. – P. 418–423. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.584-586.16.
5. Saturation of fragmentation during severe plastic deformation / R. Pippan, S. Scheriau, A. Taylor, M. Hafok, A. Hohenwarter, A. Bachmaier // *Ann. Rev. Mater. Res.* – 2010. – Vol. 40, no. 1. – P. 319–343. – DOI: 10.1146/annurev-matsci-070909-104445.
6. Influence of stacking fault energy on nanostructure formation under high pressure torsion / Y. H. Zhao, X. Z. Liao, Y. T. Zhu, Z. Horita, T. G. Langdon // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – Vol. 410–411. – P. 188–193. – DOI: 10.1016/j.msea.2005.08.074.
7. Structure of Cu deformed by high pressure torsion / T. Hebesberger, H. P. Stuwe, A. Vorhauer, F. Wetscher, R. Pippan // *Acta Mater.* – 2005. – Vol. 53. – P. 393–402. – DOI: 10.1016/j.actamat.2004.09.043.
8. Kon'kova T. N., Mironov S. Y., Korznikov A. V. Severe cryogenic deformation of copper // *Phys. Met. Metallogr.* – 2010. – Vol. 109, no. 2. – P. 171–176. – DOI: 10.1134/S0031918X1002009.
9. Structure, thermal stability, and state of grain boundaries of copper subjected to high–pressure torsion at cryogenic temperatures / A. V. Stolbovsky, V. V. Popov, E. N. Popova, V. P. Pilyugin // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2014. – Vol. 78. – P. 908–916. – DOI: 10.3103/S1062873814090299.
10. Thermal Stability of Nickel Structure Obtained by High Pressure Torsion in Liquid Nitrogen / V. V. Popov, E. N. Popova, D. D. Kuznetsov, A. V. Stolbovskii, V. P. Pilyugin // *Physics of Metals and Metallography.* – 2014. – Vol. 115. – P. 682–691. – DOI: 10.1134/S0031918X14070060.
11. Evolution of the structure and hardness of nickel upon cold and low–temperature deformation under pressure / V. P. Pilyugin, T. M. Gapontseva, T. I. Chashchukhina, L. M. Voronova, L. I. Shchinova, M. V. Degtyarev // *The Physics of Metals and Metallography.* – 2008. – Vol. 105, no. 4. – P. 409–419. – DOI: 10.1134/S0031918X08040157.
12. Thermal behavior of Ni (99.967% and 99.5% purity) deformed to an ultra–high strain by high pressure torsion / H. W. Zhang, X. Huang, R. Pippan, N. Hansen // *Acta Mater.* – 2010. – Vol. 58. – P. 1698–1707. – DOI: 10.1016/j.actamat.2009.11.012.
13. Enhancement of strength and stability of nanostructured Ni by small amounts of solutes / H. W. Zhang, K. Lu, R. Pippan, X. Huang, N. Hansen // *Scripta Mater.* – 2011. – Vol. 65. – P. 481–484. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2011.06.003.
14. Structure and thermal stability of Cu after severe plastic deformation / V. V. Popov, A. V. Stolbovsky, E. N. Popova, V. P. Pilyugin // *Def. Diff. Forum.* – 2010. – Vol. 297–301. – P. 1312–1321. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297–301.1312.

15. Edalati K., Fujioka T., Horita Z. Microstructure and mechanical properties of pure Cu processed by high-pressure torsion // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2008. – Vol. 497. – P. 168–173. – DOI: 10.1016/j.msea.2008.06.039.
16. Tailoring stacking fault energy for high ductility and high strength in ultrafine grained Cu and its alloy / Y. H. Zhao, Y. T. Zhu, X. Z. Liao, Z. Horita, T. G. Langdon // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – Vol. 89, no. 12. – P. 121906. – DOI: 10.1063/1.2356310.
17. Nanostructures in Ti processed by severe plastic deformation / Y. T. Zhu, J. Y. Huang, J. Gubicza, T. Ungar, Y. M. Wang, E. Ma, R. Z. Valiev // *J. Mater. Res.* – 2003. – Vol. 18. – P. 1908–1917. – DOI: 10.1557/JMR.2003.0267.
18. Grain refinement and superplastic flow in an aluminum alloy processed by high-pressure torsion / S. V. Dobatkin, E. N. Bastarache, G. Sakai, T. Fujita, Z. Horita, T. G. Langdon // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – Vol. 408. – P. 141–146. – DOI: 10.1016/j.msea.2005.07.023.
19. Microstructural evolution and mechanical properties of Cu–Al alloys subjected to equal channel angular pressing / S. Qu, X. H. An, H. J. Yang, C. X. Huang, G. Yang, Q. S. Zang, Z. G. Wang, S. D. Wu, Z. F. Zhang // *Acta Mater.* – 2009. – Vol. 57, no. 5. – P. 1586–1601. – DOI: 10.1016/j.actamat.2008.12.002.
20. Valiev R. Z., Gertsman V. Y., Kaibyshev O. A. Grain boundary structure and properties under external influences // *Phys. Stat. Sol.* – 1986. – Vol. 97, no. 1. – P. 11–56. – DOI: 10.1002/pssa.2210970102.
21. An investigation of grain boundaries in submicrometer-grained Al–Mg solid solution alloys using high-resolution electron microscopy / Z. Horita, D. J. Smith, M. Furukawa, M. Nemoto // *J. Mater. Research.* – 1996. – Vol. 11, no. 8. – P. 1880–1890. – DOI: 10.1557/JMR.1996.0239.
22. Popov V. V. Müssbauer investigations of grain-boundary diffusion and segregation // *Def. Diff. Forum.* – 2007. – Vol. 263. – P. 69–74. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.258-260.497.
23. Grain boundaries in ultrafine grained materials processed by severe plastic deformation and related phenomena / X. Sauvage, G. Wilde, S. V. Divinski, Z. Horita, R. Z. Valiev // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2012. – Vol. 540. – P. 1–12. – DOI: 10.1016/j.msea.2012.01.080.
24. Popov V. V. Mossbauer Spectroscopy of Interfaces in Metals // *Phys. Met. Metallogr.* – 2012. – Vol. 113, no. 13. – P. 1257–1289. – DOI: 10.1134/S0031918X12130029.
25. Popov V. V., Sergeev A. V., Stolbovsky A. V. Emission Müssbauer spectroscopy of grain boundaries in ultrafine-grained W and Mo produced by severe plastic deformation // *Physics of Metals and Metallography.* – 2017. – Vol. 118. – P. 354–361. – DOI: 10.1134/S0031918X17040081.
26. Stolbovsky A., Farafontova E. Statistical analysis method of the grain structure of nanostructured single phase metal materials processed by high-pressure torsion // *Sol. Stat. Phenomena.* – 2018. – Vol. 284. – P. 425–430. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.284.425.
27. Stolbovsky A., Farafontova E. Statistical analysis of histograms of grain size distribution in nanostructured materials processed by severe plastic deformation // *Sol. Stat. Phenomena.* – 2018. – Vol. 284. – P. 431–435. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.284.431.
28. Popov V. V., Stolbovsky A. V., Popova E. N. Structure of nickel–copper alloys subjected to high-pressure torsion to saturation stage // *Phys. Met. Metallogr.* – 2017. – Vol. 118. – P. 1073–1080. – DOI: 10.1134/S0031918X17110114.
29. Grain boundary engineering parameters for ultrafine grained microstructures: Proof of principles by a systematic composition variation in the Cu–Ni system / F. Emeis, M. Peterlechner, S. V. Divinski, G. Wilde. // *Acta Mater.* – 2018. – Vol. 150. – P. 262–272. – DOI: 10.1016/j.actamat.2018.02.054.

30. Structure and deformation behaviour of Armco iron subjected to severe plastic deformation / R. Z. Valiev, E. F. Rauch, B. Baudalet, Yu. V. Ivanishenko // *Acta Mater.* – 1996. – Vol. 44, no. 12. – P. 4705–4712. – DOI: 10.1016/S1359-6454(96)00156-5.
31. Observations of grain boundary structure in submicrometer-grained Cu and Ni using high-resolution electron microscopy / Z. Horita, D. J. Smith, M. Nemoto, R. Z. Valiev, T. G. Langdon // *J. Mater. Res.* – 1998. – Vol. 13, no. 2. – P. 446–450. – DOI: 10.1557/JMR.1998.0057.
32. Experimental parameters influencing grain refinement and microstructural evolution during high-pressure torsion / A. P. Zhilyaev, G. V. Nurislamova, B. K. Kim, M. D. Baro, J. A. Szpunar, T. G. Langdon // *Acta Mater.* – 2003. – Vol. 51. – P. 753–765. – DOI: 10.1016/S1359-6454(02)00466-4.
33. Microstructural evolution in commercial purity aluminum during high-pressure torsion / A. P. Zhilyaev, K. Ohishi, T. G. Langdon, T. R. McNelley // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – Vol. 410–411. – P. 277–280. – DOI: 10.1016/j.msea.2005.08.044.

Received: 24.07.2019
Revised: 06.08.2019
Accepted: 30.08.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.038-043

OBTAINING PURE CARBON-ALLOYED NICKEL

S. E. Danilov^{a)*} and V. L. Arbuzov^{b)}

*M. N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620990, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-9815-8196>  danilov@imp.uran.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-0334-7459>  arbuzov@inm.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: danilov@imp.uran.ru

Address for correspondence: ul. S. Kovalevskoy, 18, Ekaterinburg, 620990, Russian Federation
Tel.: +7 343 3783850

The preparation of alloys with different carbon concentrations by diffusion annealing in a carburizing atmosphere using pure nickel (RRR at a level of 400) and homogenizing annealing in high vacuum is discussed. The installation scheme is described. The possibility of uniform carbon doping of samples and material in the form of 0.2 to 0.5 mm thick foils is shown in a wide range of concentrations (0.005 to 0.5 at. %).

Carburizing annealing is carried out in an atmosphere of pure helium passed through a titanium getter with the addition of acetone vapor, which decomposes in the furnace and leads to coating the surface of the samples with carbon, which is a diffusion source. By choosing different temperatures and annealing times, various carbon concentrations or diffusion zones with known parameters can be obtained. The removal of surface layers in a polishing etchant after saturation and subsequent homogenizing annealing at high temperatures in high vacuum allow one to obtain a uniform distribution of carbon and a selected concentration.

Keywords: alloying, carbon, nickel, diffusion, carburization, homogenization.

Acknowledgment

The work was subsidized by the Complex Program of UB RAS, project No. 15-9-2-30.

References

1. Sorensen S.M., Chen C.W. The effect of carbon on void formation in neutron-irradiated nickel. *Radiation Effects*, 1977, vol. 33, pp. 109–118.
2. Begak O.Y., Fedorov V.V. Mass-spectrometric determination of low sulfur contents in metals by heterogeneous isotope equilibration. *Journal of Analytical Chemistry of the USSR*, vol. 37, iss. 5, pp. 661–664.
3. Shwerer F.C. Curie Temperatures and Residual Resistivity of Nickel-Carbon Solid Solution. *J. Appl. Phys.*, 1969, vol. 40, no. 7, pp. 2705–2707. DOI: 10.1063/1.1658065.

Подана в журнал: 24.07.2019

УДК 53.089

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.038-043

ПОЛУЧЕНИЕ ЧИСТЫХ СПЛАВОВ НИКЕЛЯ, ЛЕГИРОВАННЫХ УГЛЕРОДОМ

С. Е. Данилов^{а)*}, В. Л. Арбузов^{б)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук,
д. 18, ул. С. Ковалевской, Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0001-9815-8196>  danilov@imp.uran.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-0334-7459>  arbuzov@inm.uran.ru

* Ответственный автор. E-mail: danilov@imp.uran.ru

Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, 620990, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 378–38–50

Описано получение сплавов с различной концентрацией углерода путем проведения диффузионных легирующих отжигов в карбюризирующей атмосфере на примере чистого никеля (RRR на уровне 400) и гомогенизирующих отжигов в высоком вакууме. Описана схема установки. Показана возможность равномерного легирования углеродом образцов и материала в виде фольг толщиной на уровне 0,2–0,5 мм в широком диапазоне концентраций – (0,005–0,5) ат. %.

Карбюрирующий отжиг проводится в атмосфере чистого гелия пропущенного через титановый геттер с добавлением паров ацетона, разлагающегося в печи и приводящего к покрытию поверхности образцов углеродом, который является диффузионным источником. За счет выбора различных температур и времени отжига можно получать различные концентрации углерода получать диффузионные зоны с известными параметрами. Удаление поверхностных слоев в полирующем травителе после насыщения и последующий гомогенизирующий отжиг при высоких температурах в высоком вакууме позволяют получать равномерное распределение углерода и выбранную концентрацию.

Ключевые слова: легирование, углерод, никель, диффузия, карбюризация, гомогенизация.

1. Введение

При проведении исследований на сталях и сплавах по определению роли примесей в различных процессах, идущих при внешних воздействиях (облучение, деформация, термические процедуры и др.), часто возникает необходимость использовать образцы с известной концентрацией легирующей примеси при ее варьировании в широких пределах. При получении таких сплавов для чистоты эксперимента необходимо избежать или уменьшить до минимума проникновение в исследуемые образцы других примесей. Углерод является широко распространенной примесью в сталях и сплавах на основе никеля и железа и проникает в металл под действием различных термических процедур благодаря высокой диффузионной подвижности и хорошей растворимости. Поэтому часто возникает вопрос о его влиянии на изучаемые процессы.

В работе описана методика диффузионного приготовления сплавов Ni-C из чистого никеля (RRR на уровне 400) в виде фольг толщиной 0,2–0,5 мм в широком диапазоне концентраций (0,005–0,5) ат. %. При этом проводится отжиг в карбюризирующей атмосфере, позволяющий провести легирование образцов до уровня предела растворимости углерода либо получение вблизи поверхности образцов диффузионной зоны, насыщенной углеродом,

с последующим удалением части этой зоны и гомогенизацией оставшегося углерода в объеме образца путем отжига в высоком вакууме.

2. Установка для легирования

Установка для насыщения углеродом путем его осаждения на поверхности образцов при термическом разложении паров ацетона представлена схематически на рис. 1.

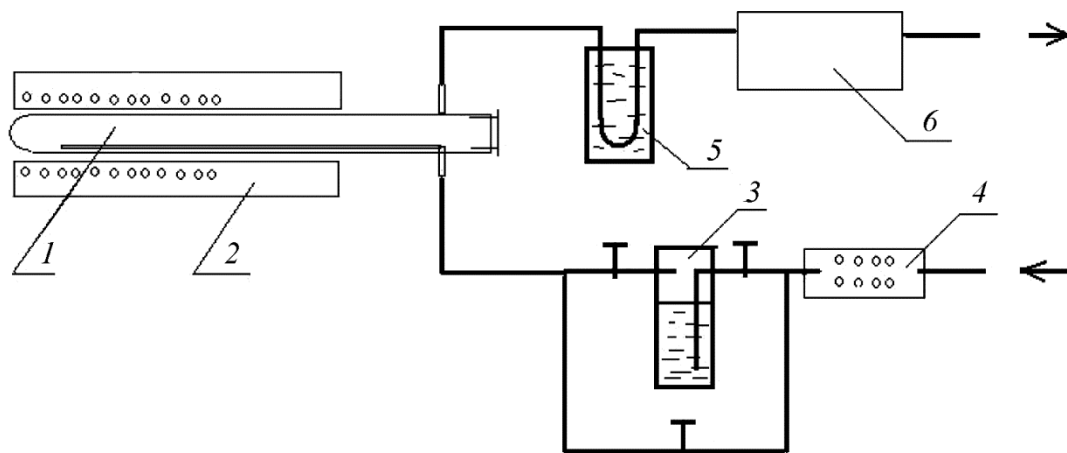


Рис. 1. Схема установки для карбюризирующего отжига. Кварцевая труба (1); печь (2); склянка Тищенко с ацетоном (3); титановый геттер (4); азотная ловушка (5); кислородомер (6)

Она представляет кварцевую трубу (1) с размещенными в ней образцами или пластинами исследуемого материала, помещенную в печь (2), с подведенной магистралью гелия или другого инертного газа, очищенного титановым геттером (4). Газ проходит через склянку Тищенко с ацетоном (3) либо мимо нее. Это определяется системой вентилях. На выходе из кварцевой трубы газ проходит через азотную ловушку (5) для отделения остатков углеводородов и кислородомер «Циркон–М» (6) для контроля работы титанового геттера. Первоначально гелий направляется по байпасной линии (мимо склянки Тищенко) до установления режима работы геттера очищающего гелий от кислорода и других газов, что контролируется по концентрации кислорода в пропускаемом газе. Скорость прокачки гелия около 0,5 л/мин. При нагревании кварцевой трубы до необходимой температуры (выше температуры разложения ацетона, около 870 К) с помощью вентилях поток очищенного газа перенаправляется через склянку Тищенко, где насыщается парами ацетона. Попадая в кварцевую трубу, ацетон разлагается с образованием мелкодисперсного углерода (сажи), который оседает на стенках трубы и на легируемых образцах, образуя тем самым углеродное покрытие, которое является диффузионным источником, по всей их поверхности. После окончания отжига оставшийся на поверхности образцов углерод легко удалить водой с моющим средством. Последующее электрохимическое удаление поверхностных слоев завершает очистку поверхности.

3. Эксперименты и результаты

Легирование может быть проведено двумя способами.

1. Насыщение углеродом до уровня равновесной концентрации, который определяется температурой отжига. При этом предел растворимости углерода в никеле, согласно выражению [1]:

$$C_c(\text{ат. \%}) = 60,657 \exp\left(-\frac{5160}{T}\right), \quad (1)$$

где C_C – предел растворимости углерода в никеле при температуре T . Длительность отжига определяется из условия приблизительного завершения равномерного распределения углерода по образцу:

$$\sqrt{Dt} > l, \quad (2)$$

где l – толщина образца; t – время легирующего отжига; D – коэффициент диффузии углерода в никеле при температуре T , согласно выражению [2] ($\text{см}^2/\text{сек}$):

$$D = 2,5 \exp\left(-\frac{20\,100}{T}\right). \quad (3)$$

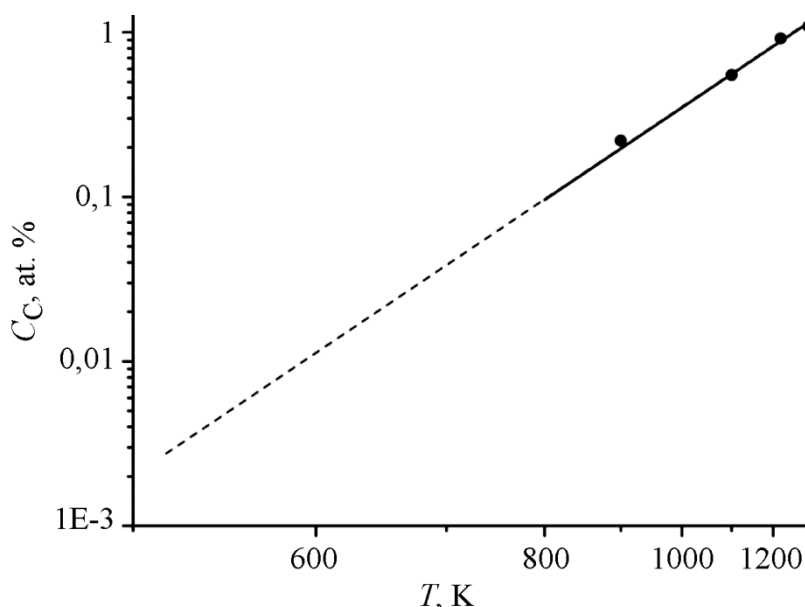


Рис. 2. Зависимость растворимости углерода в никеле [1] (сплошная линия); и экспериментально полученные значения (круглые точки) при насыщении первым способом; экстраполяция зависимости к низким температурам (пунктирная линия)

На основании этой зависимости был построен график (рис. 2).

Например, для получения концентрации углерода 0,5 % по этому способу образцы толщиной около 200 мкм насыщались углеродом при температуре 1090 К в течении 5 ч.

Для получения низких концентраций углерода этот способ мало пригоден, поскольку соответствующие температуры отжига существенно ниже и при этом сильно увеличивается необходимое время отжига.

2. Для приготовления сплавов с более низкими концентрациями (меньше 0,1 %) насыщение проводилось вторым способом, который заключается в создании диффузионной зоны углерода в районе поверхности образца при карбюризирующем отжиге выше 870 К с последующим удалением поверхностного слоя рассчитанной толщины путем полирующего электрохимического травления.

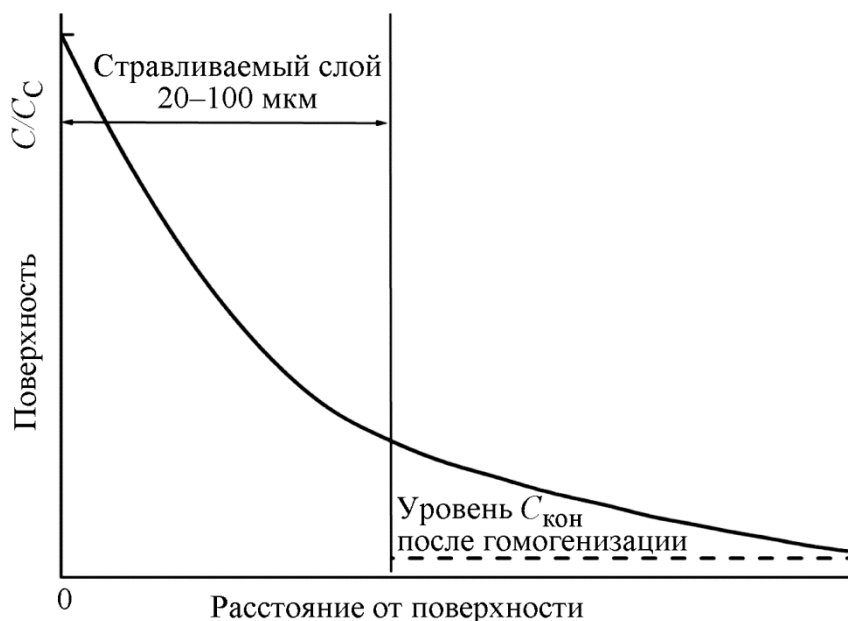


Рис. 3. Схематическое изображение получающегося при насыщении углеродом диффузионного профиля у поверхности никеля и удаляемого травлением поверхностного слоя

При этом в образцах оставалось некоторое количество углерода в приповерхностных областях. В дальнейшем образцы отжигались при температурах в интервале 1000–1100 К в безмасляном вакууме лучше чем 10^{-5} Па для создания гомогенного распределения углерода. На рис. 3 представлен график получающегося при насыщении углеродом диффузионного профиля. На поверхности образцов концентрация углерода равна пределу растворимости C_c при температуре отжига. Варьируя температуру и время легирующего отжига, можно получать различные диффузионные зоны у поверхности. Диффузионный профиль для одномерной диффузии из плоского источника легко получить из известных формул. Изменяя толщину стравливаемого с поверхности слоя и производя после этого гомогенизирующий отжиг в вакууме, можно получать различные концентрации углерода $C_{кон}$. Так, например, для получения сплава Ni + 0,05 ат. % C образцы толщиной 350 мкм отжигали в установке (рис. 1) при $T = 910$ К, 15 мин, а толщина удаляемого после этого слоя путем электрохимического травления составляла 100 мкм. Скорость удаления слоев при травлении легко оценить из результатов предварительных оценочных опытов конкретно на имеющейся электрохимической ячейке.

В данной работе концентрация углерода в никеле после гомогенизации определялась методом измерения остаточного электросопротивления. В работе [3] был определен вклад углерода в электросопротивление никеля при гелиевой температуре как $(3,48 \pm 0,06)$ мкОм·см. Для оценок, при условии отсутствия загрязнения, это позволяет успешно и оперативно контролировать процессы насыщения. Для более точного установления концентрации углерода необходимо учитывать отклонение от правила Матиссена [3]. Естественно, что для корректных процедур насыщения необходимо проведение контрольных отжигов, исключая этап насыщения углеродом. Такие отжики в нашем случае для чистого никеля давали отношение электросопротивлений на уровне 200–300, что соответствует отсутствию загрязнений выше 0,005 ат. % углерода.

Метод применим для насыщения углеродом также и других металлов и сплавов, в которых углерод достаточно подвижен и известны параметры диффузии и растворимость углерода.

Благодарность

Работа выполнена на средства субсидии, выделенной на финансирование проекта Комплексной программы Уральского отделения РАН 15-9-2-30.

Литература

1. Sorensen S. M., Chen C. W. The effect of carbon on void formation in neutron-irradiated nickel // Radiation Effects. – 1977. – Vol. 33. – P. 109–118.
2. Begak O. Y., Fedorov V. V. Mass-spectrometric determination of low sulfur contents in metals by heterogeneous isotope equilibration // Journal of Analytical Chemistry of the USSR. – Vol. 37, iss. 5. – P. 661–664.
3. Shwerer F. C. Curie Temperatures and Residual Resistivity of Nickel-Carbon Solid Solution // J. Appl. Phys. – 1969. – Vol. 40, no. 7. – P. 2705–2707. – DOI: 10.1063/1.1658065.

Received: 13.08.2019
Revised: 18.08.2019
Accepted: 30.08.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055

THE EFFECT OF TANGENTIAL BOUNDARY STRESSES ON THE CONVECTIVE UNIDIRECTIONAL FLOW OF A VISCOUS FLUID LAYER UNDER THE LOWER BOUNDARY HEATING CONDITION

V. V. Privalova^{a)*} and E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-8648-0900>  valentprival@gmail.com;
^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: valentprival@gmail.com
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: 374 53 30

An exact solution describing a convective unidirectional flow of a viscous incompressible fluid is obtained. The motion takes place in an infinite layer of some finite thickness. The fields of velocity, temperature, and pressure are time-independent. The resulting exact solution is a polynomial of various orders along the vertical (transverse) coordinate. A boundary value problem is formulated for the exact solution constructed. On the absolutely solid lower boundary of the fluid layer, the Navier slip condition and heating are specified. On the upper (free) surface, nonzero tangential stresses and pressure along the longitudinal coordinate are set. The temperature at the upper boundary is assumed to be zero. The obtained particular exact solution of the boundary value problem for the velocity function is analyzed. It is shown that, in the fluid layer under consideration, the velocity can have up to two stagnation points, which indicates the occurrence of countercurrent zones. The nonzero component of the vorticity vector and the tangential stress are analyzed. It is shown that the vorticity vector can change its sign in the fluid layer up to two times and that the tangential stress can change from tensile to compressive as many times.

Keywords: exact solution, counterflow, stagnation point, Navier slip condition, vorticity vector.

References

1. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*, Hermosa Publs, Albuquerque, 1976, 446 p.
2. Fletcher C.A.J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988. DOI: 10.1007/978-3-642-97035-1.
3. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker Inc., New York, 2001, 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518.
4. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
5. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
6. Aristov S.N. and Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchetsya sloe zhidkosti* [Advective Eddy Flows in a Rotating Liquid Layer]. Perm, Permskiy Un-t. Publ., 2006. (In Russian).
7. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004.

8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
9. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 1840, vol. 11, pp. 961–967, pp. 1041–1048.
10. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite). *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 1841, vol. 12, pp. 112–115.
11. Aristov S.N., Knyazev D.V. New exact solution of the problem of rotationally symmetric Couette-Poiseuille flow. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 680–685. DOI: 10.1007/s10808-007-0087-7.
12. Regirer S.A. On the movement of fluid in a tube with a deforming wall. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1968, no. 4, pp. 202–204.
13. Regirer, S.A. Quasi-one-dimensional theory of peristaltic flows. *Fluid Dyn.*, 1984, vol. 19, no. 5, pp. 747–754. DOI: 10.1007/BF01093542.
14. Takagi D., Balmforth N.J. Peristaltic pumping of rigid objects in an elastic tube. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 672, pp. 219–244. DOI: 10.1017/S0022112010005926.
15. Yin F.C.P., Fung Y.C. Peristaltic waves in circular cylindrical tubes. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, pp. 579–587.
16. Pedley T. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels* (Cambridge Monographs on Mechanics), Cambridge University Press, Cambridge, 1980. DOI: 10.1017/CBO9780511896996.
17. Medvedev A.E. Three-dimensional motion of a viscous incompressible fluid in a narrow tube. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 4, pp. 566–569. DOI: 10.1007/s10808-009-0076-0.
18. Medvedev A.E. Unsteady motion of a viscous incompressible fluid in a tube with a deformable wall. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 552–560. DOI: 10.1134/S0021894413040056.
19. Tverier V.M., Gladysheva O.S. A biomechanical model of the mammary gland. *Master's Journal*, 2013, no. 2, pp. 240–252. (In Russian).
20. Gavrilenko S.L., Vasin R.A., and Shilko S.V. A method for determining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials. Part 1. *Russian Journal of Biomechanics*, 2002, vol. 6, no. 3, pp. 92–99. (In Russian).
21. Shil'ko S.V., Gavrilenko S.L., Khizhenok V.F., Stakan I.N., and Salivonchik S.P. A method for defining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials. Part 2. *Russian Journal of Biomechanics*, 2003, vol. 7, no. 2, pp. 79–84. (In Russian).
22. Goldstein S. *Modern Developments in Fluid Mechanics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1938.
23. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, vol. 39, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
24. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P., Glot I.O., Shakirov N.V. *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techeniye polimerov v kanalakh* [Processing of fiber-forming polymers. Bases of polymer rheology and polymer flow in channels]. Moscow-Izhevsk, RKhD Publ., 2008, 264 p. (In Russian).
25. Vinogradova O.I., Belyaev A.V. Wetting, roughness and flow boundary conditions. *J. Phys. Condens. Matter*, 2011, vol. 23, pp. 184104 (1–15). DOI: 10.1088/0953-8984/23/18/184104.
26. Belyaev A.V., Vinogradova O.I. Effective slip in pressure-driven flow past super-hydrophobic stripes. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 652, pp. 489–499. DOI: 10.1017/S0022112010000741.
27. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, no. 2 (28), pp. 35–44. (In Russian).

28. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces. *J. Math, Fluid Mech.*, 2003, vol. 5, pp. 275–301. DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.
29. Beirao da Veiga H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, 2004, vol. 9, no. 9–10, pp. 1079–1114.
30. Fugita H. Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type. *J. Comput. Math.*, 2001, vol. 19, no. 1, pp. 1–8.
31. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 p.
32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527. (In Russian).
33. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Couette–Hiemenz Exact Solutions for the Steady Creeping Convective Flow of a Viscous Incompressible Fluid, with Allowance Made for Heat Recovery. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 1–17. DOI: 10.14498/vsgtu1638.
34. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for the convective creep Couette–Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 2, pp. 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109.
35. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
36. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. *M'em. Acad. Sci. Inst. de France*, 1822, vol. 2, no. 6, pp. 389–440.
37. Navier C.L.M.H. Sur les lois du mouvement des fluids. *M'em. Acad. R. Sci. Inst.*, 1827, fr. 6, pp. 389–440.

Подана в журнал: 13.08.2019

УДК 532.51

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055

ВЛИЯНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНВЕКТИВНОЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСЛОВИИ НАГРЕВА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ

В. В. Привалова^{а)*}, Е. Ю. Просвирыков^{б)}

*Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
д. 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-8648-0900>  valentprival@gmail.com;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: valentprival@gmail.com

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

Получено точное решение, описывающее конвективное однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости. Движение происходит в бесконечном слое некоторой конечной толщины. Поля скорости, температуры и давления не зависят от времени. Полученное точное решение представляет собой полиномы различных порядков по вертикальной (поперечной) координате. Для построенного точного решения сформулирована краевая задача. На нижней, абсолютно твердой границе слоя жидкости задается условие проскальзывания Навье и нагрев. На верхней (свободной) поверхности задаются ненулевые касательные напряжения и переменное по продольной координате давление. Температура на верхней границе полагается равной нулю. Проанализировано полученное частное точное решение краевой задачи для функции скорости. В рассматриваемом слое жидкости скорость может иметь до двух застойных точек, что говорит о возникновении зон противотечений. Проанализированы ненулевая компонента вектора завихренности и касательное напряжение. Показано, что вектор завихренности может менять свой знак в слое жидкости до двух раз, а касательное напряжение столько же раз может меняться с растягивающего на сжимающее.

Ключевые слова: точное решение, противотечение, застойная точка, условие проскальзывания Навье, вектор завихренности.

1. Введение

При моделировании технологических процессов, включающих движение сплошных сред, возникает потребность в описании течения жидкостей и газов. В случае, когда исследуемые среды можно считать несжимаемыми, удобным инструментом описания движения является уравнение Навье-Стокса и его приближения. Эти уравнения весьма сложны для интегрирования по причине сильной нелинейности, что влечет за собой наиболее частое использование аппарата численных методов нахождения решений [1–3]. Тем актуальнее становится задача отыскания точных решений для описания движения вязких несжимаемых сред. Не стоит также забывать, что именно точные решения позволяют наиболее результативно оценивать области применимости гидродинамических моделей и являются необходимым инструментом для апробации и тестирования асимптотических, приближенных и численных методов.

В свое время для интегрирования уравнений Навье-Стокса были предложены классы точных решений [4]. Одним из наиболее часто используемых классов является класс решений Линя [5]. Изначально эта методика была предложена для решения задач магнитной гид-

родинамики. В этом семействе решений гидродинамические поля описываются функциями, линейными по части горизонтальных координат. В дальнейшем класс Линя дал возможность строить классы решений также для конвективных [6, 7] и термодиффузионных [8] задач.

Отдельный интерес при изучении движения вязкой несжимаемой жидкости вызывают градиентные течения, или течения Пуазейля [9, 10] с различными модификациями [11–15]. Это связано с достаточно высоким практическим применением такой модели в науке, технике, медицине и биологии. В частности, продольным изменением давления в канале или между плоскостями сопровождаются такие процессы, как движение крови по сосудам [16–18], процесс функционирования молочной железы в период лактации [19], а также для идентификации моделей биотканей [20, 21].

При рассмотрении классов решений, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости, отдельным важным моментом является выбор граничных условий для формулирования краевых задач, возникающих в каждой отдельной модели течения сред. Длительное время при задании поля скорости жидкости на границе соприкосновения с твердой стенкой было принято задавать условие прилипания (нулевых скоростей) [22]. В последние десятилетия эта тенденция стала стремительно меняться в связи с развитием технологий, основанных на более микроскопическом уровне изучения области соприкосновения жидкости и ограничивающей ее поверхности [23–26]. Таким образом, все чаще в практических задачах стали рассматриваться условие проскальзывания и, как частный идеализированный случай, условие идеального скольжения [23, 27–30].

В работе предложено точное решение, относящее к классу, линейно зависящих от части координат. Краевая задача описывает конвективное однонаправленное течение слоя вязкой несжимаемой жидкости и включает задание условия проскальзывания на поверхности контакта жидкости с твердой поверхностью, а также ненулевых касательных напряжений на свободной поверхности.

2. Постановка задачи

Рассматриваем конвективное однонаправленное течение бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости. Система уравнений, описывающая такое движение в векторном виде, включает уравнение Навье-Стокса в приближении Буссинеска, уравнение теплопроводности и уравнение несжимаемости [31]:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{g} \beta T; \quad (1)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla T = \chi \Delta T; \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, 0, 0)$ – вектор скорости и его проекции на оси декартовой системы координат; P – отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости ρ ; $\mathbf{g}$ – вектор ускорения свободного падения; β – температурный коэффициент объемного расширения жидкости; T – отклонение от средней температуры; ν , χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно. Оси декартовой системы координат расположены таким образом, что течение жидкости происходит в направлении оси Ox . Ось Oz направлена перпендикулярно направлению движения от нижней твердой границе слоя к верхней свободной поверхности.

Полагаем, что движение жидкости установившееся, т. е. поля скорости, температуры и давления не зависят от времени. Таким образом, система уравнений (1)–(3) в проекциях на оси декартовой системы координат с учетом принятых допущений принимает вид:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T; \\ V_x \frac{\partial T}{\partial x} &= \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы уравнений (4) ищем в следующем виде [32–35]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z); \quad V_y = 0; \quad V_z = 0; \\ P &= P_0(z) + \chi P_1(z); \quad T = T_0(z) + \chi T_1(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем класс точных решений (5) в систему уравнений (4). С учетом того, что все искомые функции U , P_0 , P_1 , T_0 , T_1 , в принятом виде решения (5) зависят только от вертикальной (поперечной) координаты z , будем обозначать все производные по этой переменной штрихом. Используем метод неопределенных коэффициентов и получаем следующую систему уравнений записанную в порядке дальнейшего интегрирования:

$$T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad vU'' = P_1; \quad \chi T_0'' = UT_1, \quad P_0' = g\beta T_0. \quad (6)$$

Система (6) состоит из пяти дифференциальных уравнений для определения пяти неизвестных функций.

3. Общее решение системы уравнений

Общее решение системы уравнений (6) записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1 z + C_2; \quad P_1 = \frac{g\beta}{2} (zC_1 + 2C_2)z + C_3; \\ U &= \frac{g\beta z^3}{4!v} (zC_1 + 4C_2) + \frac{z^2}{2v} C_3 + zC_4 + C_5; \\ T_0 &= \frac{g\beta z^5}{7!v\chi} (5z^2C_1^2 + 35zC_1C_2 + 42C_2^2) + \frac{z^4C_3}{5!v\chi} (3zC_1 + 5C_2) + \\ &+ \frac{2z^2}{4!\chi} [z^2C_1C_4 + 6C_2C_5 + 2z(C_2C_4 + C_1C_5)] + zC_6 + C_7; \\ P_0 &= \frac{g^2\beta^2 z^6}{8!v\chi} (5z^2C_1^2 + 40zC_1C_2 + 56C_2^2) + g\beta \left\{ \frac{3z^5C_3}{6!v\chi} (zC_1 + 2C_2) + \right. \\ &+ \left. \frac{z^3}{5!\chi} [2z^2C_1C_4 + 20C_2C_5 + 5z(C_2C_4 + C_1C_5)] + \frac{1}{2} z^2C_6 + zC_7 \right\} + C_8. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь постоянные интегрирования C_i ($i = \overline{1,8}$) определяются заданием граничных условий.

4. Точное решение краевой задачи с условием проскальзывания Навье и нагревом на нижней границе

Находим частное точное решение для системы уравнений (6). Для этого записываем граничные условия для рассматриваемого слоя жидкости. Полагаем нижнюю границу бесконечного горизонтального слоя жидкости, задаваемого уравнением $z = 0$, абсолютно твердой и неподвижной. На нижней границе задан нагрев и условие проскальзывания Навье [23, 24, 27, 36, 37]. На верхней (свободной) поверхности, определяемой уравнением $z = h$, заданы ненулевые касательные напряжения и переменное по продольной координате x давление. Температура на верхней границе равна отсчетному нулевому значению. Таким образом, граничные условия можно записать в следующем виде:

$$T(0) = Ax; \quad \alpha \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_x(0); \quad T(h) = 0; \quad P(h) = S_0 + S_1 x; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=h} = \tau. \quad (8)$$

С учетом структуры (5) выбранного обобщенного класса решений граничные условия (8) для решения краевой задачи можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_0(0) = 0; \quad T_1(0) = A; \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = U(0); \\ T_0(h) = T_1(h) = 0; \quad P_0(h) = S_0; \quad P_1(h) = S_1; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=h} = \tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь α – размерный коэффициент проскальзывания (длина проскальзывания).

С учетом граничных условий (9) постоянные интегрирования C_i ($i = \overline{1,8}$) для общего решения (7) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{A}{h}; \quad C_2 = A; \quad C_3 = -\frac{1}{2} Ag h \beta + S_1; \\ C_4 = \frac{1}{6\nu} (Ah^2 g \beta - 6\tau - 6hS_1); \quad C_5 = \frac{\alpha}{6\nu} (Ah^2 g \beta - 6\tau - 6hS_1); \\ C_6 = \frac{A^2 h^3 g \beta}{126\nu \chi} (h + 7\alpha) + \frac{Ah\alpha}{3\nu \chi} (\tau + hS_1) + \frac{Ah^2}{1260\nu \chi} (105\tau + 84hS_1); \quad C_7 = 0; \\ C_8 = S_0 + \frac{A^2 h^5 g^2 \beta^2}{8064\nu \chi} (11h + 56\alpha) - \frac{Ah^3 g \beta}{24\nu \chi} \left[\alpha(\tau + hS_1) + \frac{h}{10} (4\tau + 3hS_1) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляем полученные выражения постоянных интегрирования (10) в общее решение (7) и получаем частное точное решение краевой задачи (6), (9) в виде полиномов:

$$\begin{aligned} T_1 = A \left(1 - \frac{z}{h} \right); \quad P_1 = S_1 - \frac{Ag\beta}{2h} (z^2 - 2hz + h^2); \\ U = \frac{S_1}{2\nu} [z^2 - 2h(z + \alpha)] - \frac{Ag\beta}{24h\nu} [z^4 - 4hz^3 + 6h^2 z^2 - 4h^3 (z + \alpha)] - \frac{\tau}{\nu} (z + \alpha); \\ T_0 = \frac{Az}{1008h^2\nu \chi} (2h^2 - 3hz + z^2) \left\{ Ag\beta [z^4 - 4hz^3 + 7h^2 z^2 - 2h^3 (3z + 14\alpha)] - 4h^4 \right\} + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+168h\alpha(\tau + hS_1)\} + \frac{A}{12hv\chi} \left[z(h^3 - 2hz^2 + z^3)\tau + \frac{S_1}{10}(8h^4z - 20h^2z^3 + 15hz^4 - 3z^5) \right];$$

$$P_0 = S_0 + \frac{A^2g^2\beta^2}{8064h^2v\chi} (11h^8 - 32h^6z^2 + 56h^4z^4 - 56h^3z^5 + 28h^2z^6 - 8hz^7 + z^8) +$$

$$+ \frac{A\alpha g\beta}{144hv\chi} (h-z)^2 (h^2 + 2hz - z^2) (Agh^2\beta - 6\tau - 6hS_1) -$$

$$- \frac{Ag\beta}{240hv\chi} (h-z)^2 \left[2(2h^3 + 4h^2z + hz^2 - 2z^3)\tau + (3h^4 + 6h^3z + h^2z^2 - 4hz^3 + z^4)S_1 \right].$$

Полученные полиномы имеют степени от первой (функция T_1 – частная производная от температуры по продольной координате x) до восьмой (функция P_0 – однородная составляющая давления).

5. Анализ поля скоростей

Проведем анализ полученной компоненты скорости U . Исследуем возможность существования нулевых (застойных) точек функции скорости U и их количество в слое жидкости при изменении вертикальной переменной $z \in (0; h)$.

Скорость определяется взаимодействием трех потоков: потока, вызванного перепадом давления (пуазейлевского потока); потока, вызванного нагревом/охлаждением и действием силы тяготения (термогравитационного потока); потока, возникающего под действием касательного напряжения на верхней границе слоя жидкости (ветровой поток).

Представим функцию скорости U в следующем виде:

$$U = \frac{S_1}{2v} f_1 - \frac{Ag\beta}{24hv} f_2 - \frac{\tau}{v} f_3. \quad (12)$$

Здесь исследуемые функции f_1 , f_2 и f_3 , зависящие от переменной выражают следующие полиномы:

$$f_1 = z^2 - 2h(z + \alpha);$$

$$f_2 = z^4 - 4hz^3 + 6h^2z^2 - 4h^3(z + \alpha);$$

$$f_3 = z + \alpha.$$

Для нахождения застойных точек скорости U в рассматриваемом слое жидкости проанализируем сначала возможность существования нулевых точек у составляющих f_1 , f_2 и f_3 . Функция f_1 обращается в нуль при $z = h \pm \sqrt{h^2 + 2h\alpha}$. Для того чтобы найденные нулевые точки принадлежали рассматриваемому слою, необходимо выполнение следующего двойного неравенства:

$$0 < h \pm h\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{h}} < h. \quad (13)$$

Полученное неравенство (13) не выполняется ни при каких положительных α и h . Следовательно, функция f_1 не имеет корней на интервале $(0; h)$.

Аналогично исследуем возможность существования корней у функции f_2 . Функция f_2 обращается в нуль при $z = h \pm \sqrt[4]{h^4 + 4h^3\alpha}$. Найденные значения переменной z принадлежат интервалу $(0; h)$ при выполнении следующего двойного неравенства:

$$0 < h \pm h^4 \sqrt[4]{1 + \frac{4\alpha}{h}} < h. \quad (14)$$

Полученное неравенство (14) также не выполняется ни при каких положительных α и h . Следовательно, функция f_2 не имеет корней на интервале $(0; h)$.

Функция f_3 на интервале $(0; h)$ всюду положительна и не принимает нулевых значений.

Исследуя совместное влияние трех потоков, вызванных перепадом давления, нагревом/охлаждением и действием касательного напряжения на функцию скорости получено, что функция скорости U при определенном подборе параметров, заданных на границе, может иметь до двух застойных точек на рассматриваемом интервале $(0; h)$. Профиль функции скорости U при двух застойных точках представлен на рис. 1.

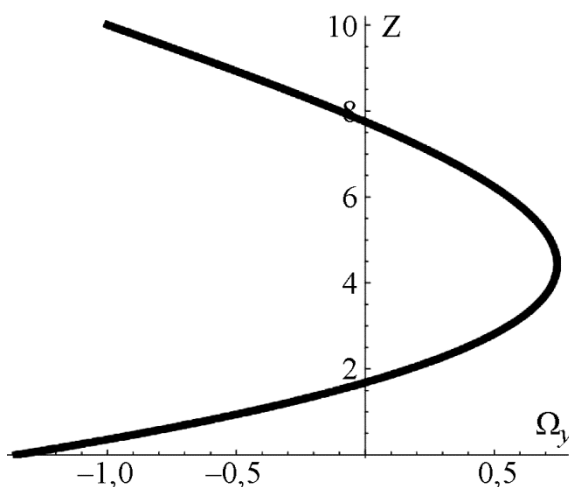


Рис. 1. Профиль функции скорости U при следующих значениях параметров:

$$\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2; \beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/\text{К}; h = 10 \text{ м}; A = -1,7 \cdot 10^{-4};$$

$$\tau = 10^{-6} \text{ м}/\text{с}^2; S_1 = -4,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}/\text{с}^2$$

5. Исследование касательных напряжений и завихренности

Исследуем вектор завихренности $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ и касательные напряжения полученного частного точного решения (11). В случае однонаправленного течения только одна компонента вектора завихренности отлична от нуля. Записываем выражение ненулевой компоненты Ω_y и соответствующее ей касательное напряжение, определяемые частной производной компоненты скорости:

$$\Omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} = \tau_{xz}. \quad (15)$$

Таким образом, для полученного частного точного решения ненулевая компонента вектора завихренности Ω_y имеет вид:

$$\Omega_y = \frac{1}{\nu} \left[\frac{Ag\beta}{24h} (4h^3 - 12h^2z + 12hz^2 - 4z^3) - \tau + (z-h)S_1 \right].$$

На рис. 2 представлен профиль компоненты завихренности Ω_y при тех же значениях параметров, при которых на рис. 1 изображен профиль скорости с двумя застойными точками на интервале $(0;h)$. Как видно, компонента завихренности Ω_y дважды в слое жидкости меняет знак на противоположный.

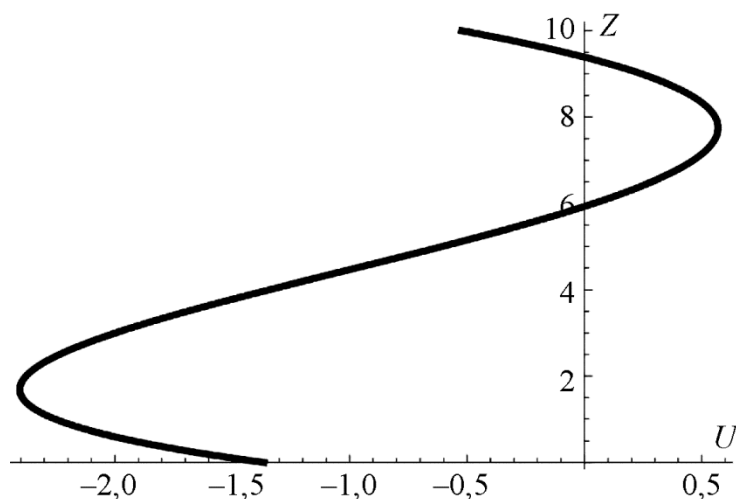


Рис. 2. Профиль компоненты завихренности Ω_y при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \nu &= 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2; \quad \beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/\text{К}; \quad h = 10 \text{ м}; \quad A = -1,7 \cdot 10^{-4}; \\ \tau &= 10^{-6} \text{ м}/\text{с}^2; \quad S_1 = -4,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}/\text{с}^2 \end{aligned}$$

Учитывая зависимость (15) можно сделать заключение о том, что касательное напряжение τ_{xz} на интервале $(0;h)$ может меняться с растягивающего на сжимающее до двух раз.

6. Заключение

Получено точное решение для конвективного однонаправленного течения вязкой несжимаемой жидкости. В предложенном решении поле скорости рассматривалось как однородный по продольным координатам полином, зависящий только от вертикальной (поперечной) координаты. Поля температуры и давления представлены полиномами с неоднородной частью по горизонтальной (продольной) координате. Для предложенного вида точного решения решена краевая задача и проанализировано полученное поле скоростей. Показано, что в рассматриваемом слое жидкости скорость может иметь до двух застойных точек. В этих же точках вектор завихренности меняет знак на противоположный, а касательное напряжение трансформируется из растягивающего в сжимающее или наоборот.

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М. : Мир, 1980. – 616 с.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей : в двух томах / пер. с англ. – М. : Мир, 1991.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
4. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyandin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. Chem. Eng. – 2009. – Vol. 43, no. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
5. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics// Arch. Rational Mech. Anal. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Пермский ун-т, 2006. – 155 с.
7. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2013. – Vol. 9, no. 4. – P. 651–657. – DOI: 10.20537/nd1304004.
8. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theor. Found. Chem. Eng. – 2016. – Vol. 50, no. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
9. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 961–967. – P. 1041–1048.
10. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite) // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – 1841. – Vol. 12. – P. 112–115.
11. Aristov S. N., Knyazev D. V. New exact solution of the problem of rotationally symmetric Couette-Poiseuille flow // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2007. – Vol. 48, no. 5. – P. 680–685. – DOI: 10.1007/s10808-007-0087-7.
12. Регирер С. А. О движении жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – № 4. – С. 202–204.
13. Регирер С. А. Квазиодномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – № 5. – С. 89–97.
14. Takagi D., Balmforth N. J. Peristaltic pumping of rigid objects in an elastic tube // J. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 672. – P. 219–244. – DOI: 10.1017/S0022112010005926.
15. Yin F. C. P., Fung Y. C. Peristaltic waves in circular cylindrical tubes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36. – P. 579–587.
16. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М. : Мир, 1983. – 400 с.
17. Медведев А. Е. Трехмерное движение вязкой несжимаемой жидкости в узкой трубке // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 4 (296). – С. 28–32.
18. Медведев А. Е. Нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 4 (320). – С. 45–54.
19. Тверье В. М., Гладышева О. С. Биомеханическая модель молочной железы // Master's Journal. – 2013. – № 2. – С. 240–252.
20. Гавриленко С. Л., Васин Р. А., Шилько С. В. Метод описания течения и определения реологических констант вязкопластических биоматериалов. Ч. 1 // Российский журнал биомеханики. – 2002. – Т. 6, № 3. – С. 92–99.
21. Метод описания течения и определения реологических констант вязкопластических биоматериалов. Ч. 2 \ С. В. Шилько, С. Л. Гавриленко, В. Ф. Хиженок, И. Н. Стакан, С. П. Саливончик // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 2. – С. 79–84.

22. Goldstein S. Modern Developments in Fluid Mechanics. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1938.
23. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 39. – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
24. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах / В. И. Янков, В. И. Боярченко, В. П. Перевадчук, И. О. Глот, Н. В. Шакиров. – М.–Ижевск : Изд-во «ПХД», 2008. – 264 с.
25. Vinogradova O. I., Belyaev A. V. Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Condens. Matter. – 2011. – Vol. 23. – P. 184104 (1–15).
26. Belyaev A. V., Vinogradova O. I. Effective slip in pressure-driven flow past super-hydrophobic stripes // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 652. – P. 489–499. – DOI: 10.1017/S0022112010000741.
27. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник ТГУ. Механика. – 2014. – № 2 (28). – С. 35–44.
28. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces // J. Math, Fluid, Mech. – 2003. – Vol. 5. – P. 275–301. – DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.
29. Beirao da Veiga H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions // Advances in Differential Equations. – 2004. – Vol. 9, nos. 9–10. – P. 1079–1114.
30. Fugita H. Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type // J. Comput. Math. – 2001. – Vol. 19, № 1. – P. 1–8.
31. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – Москва : Наука, 1972. – 392 с.
32. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-в. Сер. физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 180–196. – DOI: 10.14498/vsgtu1527.
33. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Couette–Hiemenz Exact Solutions for the Steady Creeping Convective Flow of a Viscous Incompressible Fluid, with Allowance Made for Heat Recovery // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. – 2018. – Vol. 22, no. 3. – P. 1–17. – DOI: 10.14498/vsgtu1638.
34. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the convective creep Couette–Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109.
35. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, no. 2. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
36. Navier C. L. M. H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides // M'em. Acad. Sci. Inst. de France. – 1822. – Vol. 2, no. 6. – P. 389–440.
37. Navier C. L. M. H. Sur les lois du mouvement des fluids // M'em. Acad. R. Sci. inst. – 1827. – Fr. 6. – P. 389–440.