
Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

Editor-in-Chief: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**, **Sergey V. Gladkovsky**

Editorial Council

Chairman: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Konvalov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Evgenii Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Elena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н.
Заместители главного редактора: **Сергей Витальевич Смирнов**, д.т.н.; **Сергей Викторович Гладковский**, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – **Горкунов Эдуард Степанович**, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Смирнов Сергей Витальевич**, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Гладковский Сергей Викторович**, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазиский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)
Мионов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Просвиряков Евгений Юрьевич, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

Khalevitsky Yu. V., Konovalov A. V. and Partin A. S. Convergence patterns of krylov subspace solvers in the simulation of large elastic-plastic deformations of heterophase media ..	6
Khakimov A. G. Determining the parameters of a pipe system containing fluid flow by natural frequencies of flexural vibrations	15
Prosviryakov E. Yu. Asufficient condition for the absence of strong and weak discontinuities in gas flows in flat channels	24
Stolbovsky A. V., Popov V. V., Falakhutdinov R. M., Murzinova S. A., Shorokhov E. V., Zavyalov Z. I., Degtyarev A. A. Evolution of the structure of tin bronze and copper after dynamic compression by the kolsky method using a split hopkinson pressure bar	40
Vlasov I. V., Panin S. V., Marushchak P. O., Eremin A. V., Byakov A. V. Influence of long-term operation on the structure and impact toughness of the 09Mn2Si pipe steel	51

СОДЕРЖАНИЕ

Халевицкий Ю. В., Коновалов А. В., Партин А. С. Паттерны сходимости крыловских методов в моделировании больших упругопластических деформаций гетерофазной среды	6
Хакимов А. Г. Определение параметров трубопровода с жидкостью по собственным частотам изгибных колебаний	15
Просвиряков Е. Ю. Достаточное условие отсутствия сильных и слабых разрывов при течении газа в плоских каналах	24
Столбовский А. В., Попов В. В., Фалахутдинов Р. М., Мурзинова С. А., Шорохов Е. В., Завьялов З. И., Дегтярев А. А. Эволюция структуры оловянистой бронзы и меди после динамического сжатия по методу кольского с использованием разрезного стержня гопкинсона	40

Received: 06.08.2018

Revised: 10.06.2019

Accepted: 28.06.2019

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.006-015

CONVERGENCE PATTERNS OF KRYLOV SUBSPACE SOLVERS IN THE SIMULATION OF LARGE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS OF HETEROPHASE MEDIA

Yu. V. Khalevitsky^{a)*}, A. V. Konovalov^{b)} and A. S. Partin^{c)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-8176-9871>  me@dijkstra.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0001-9131-8636>  avk@imach.uran.ru;

^{c)}  <https://orcid.org/0000-0002-9279-9213>  imd@imach.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: me@dijkstra.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 26

Simulating the process of heterophase medium deformation is essential for the scientific substantiation of composite material forming. Representative-volume models of composite materials are generally represented as a conglomerate of elastic and elastic-plastic bodies. Usually, composite deformations are numerically simulated by the finite element method, which requires solving a series of simultaneous linear equations. When applying a fine mesh, an iterative Krylov subspace solver is usually used.

We present a comparison of convergence for several iterative solvers in a two-dimensional finite-element model problem on the deformation of a heterophase representative volume of a composite. The volume contains 13,000 three-node triangular finite elements. The composite is based on the AMg6 alloy, and it contains 10 vol% of silicon carbide reinforcement.

Six methods are compared within the scope of the article: the biconjugate gradient stabilized method (BiCGStab), the generalized minimal residual method (GMRES), the conjugate gradient squared method (CGS), the quasi minimal residual method (QMR) and variants of the BiCGStab and QMR methods, namely BiCGStab(L) and TFQMR. The best timing is shown by a relatively rare QMR method.

Keywords: linear solver, finite element method, Krylov subspace solver, elastic-plastic deformation, composite material, representative volume.

Acknowledgments

The work was supported from the federal budget (government registration No. AAAA-A18-118020790140-5) in terms of studying linear solver convergence in elastoplastic problems and partially supported by the Russian Science Foundation (Project 14-19-01358) in the part of developing a finite element suite for simulating composite structure deformation.

References

1. Mishnaevsky L. *Computational mesomechanics of composites: Numerical analysis of the effect of microstructures of composites of strength and damage resistance*. London, John Wiley and Sons, 2007, 294 p. ISBN: 978-0-470-02764-6.

2. Schmauder S., Mishnaevsky L. *Micromechanics and nanosimulation of metals and composites: Advanced methods and theoretical concepts*. Heidelberg, Springer, 2008, 420 p., ISBN 978-3-540-78678-8.
3. Pugacheva N.B., Michurov N.S., Bykova T.M. The structure and properties of the 30AL-70SiC metal matrix composite material. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 6, pp. 6–18. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.6.006-018.
4. Smirnov S.V., Konovalov A.V., Myasnikova M.V., Khalevitskiy Yu.V., Smirnov A.S., Igumnov A.S. A Computational Model of V95/SiCp (7075/ SiCp) Aluminum Matrix Composite Applied to Stress-Strain State Simulation under Tensile, Compressive and Shear Loading Conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 6, pp. 16–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.016-027.
5. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large elasticplastic deformation: theory, algorithms and applications]. Moscow, Nauka, 1986, 232 p. (In Russian).
6. Yousef S. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Second Edition. SIAM Publishing, 2003, 547 p. DOI: 10.1137/1.9780898718003.
7. Driscoll Tobin A., Chuan Toh Kim, Trefethen Lloyd Nicholas. *Matrix iterations: the six gaps between potential theory and convergence*. Theory Center technical report. Cornell Theory Center, Cornell University, 1996. (<https://books.google.ru/books?id=HbFQAAAAYAAJ>).
8. Khalevitskiy Yu.V., Konovalov A.V., and Partin A.S. On convergence of various iterative linear solvers in heterophase elastoplastic media deformation models. In: *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2053, pp. 030026. DOI: 10.1063/1.5084387.
9. Noël M.N., Satish C.R., Lloyd N.T. How Fast are Nonsymmetric Matrix Iterations? *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1992, vol. 13, no. 3, pp. 778–795. DOI: 10.1137/0613049.
10. Ilyin V.P. Finite Element Methods and Technologies. In: *Parallelnye vychislitelnye tekhnologii (PaVT'2009): trudy mezhdunarodnoy konferentsii* [Parallel Computational Technologies: International Conference Proceedings]. Novosibirsk, ICM&MG Publ., 2007. (In Russian).
11. Smirnov A.S., Shveikin V.P., Smirnova E.O., Belozarov G.A., Konovalov Anatoly V., Vichuzhanin Dmitry I., Muizemnek Olga Yu. Effect of silicon carbide particles on the mechanical and plastic properties of the AlMg6/10% SiC metal matrix composite. *Journal of Composite Materials*, 2018, vol. 52 (24), pp. 3351–3363. DOI: 10.1177/0021998318765622.
12. Askeland D., Fulay P., Wright W. *The Science and Engineering of Materials*. Cengage Learning, 2010. ISBN 978-1-4899-2895-5.
13. Van der Vorst H.A. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 1992, vol. 13, iss. 2, pp. 631–644. DOI: 10.1137/0913035.
14. Youcef S., Martin H.S. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 1986, vol. 7, iss. 3, pp. 856–869. DOI: 10.1137/0907058.
15. Freund R.W., Nachtigal N.M. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numerische Mathematik*, 1991, vol. 60, iss. 1, pp. 315–339. DOI: 10.1007/BF01385726.
16. Sonneveld Peter. CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1989, vol. 10, no. 1, pp. 36–52.
17. Sleijpen G.L.G., Fokkema D.R. BiCGstab(L) for linear equations involving matrices with complex spectrum. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 1993, no 1, pp. 11–32.
18. Freund R.W. A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1993, vol. 14, pp. 470–482.

19. Zhang J. Preconditioned Krylov subspace methods for solving nonsymmetric matrices from CFD applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol. 189, iss. 3, pp. 825–840.
20. Khalevitsky Yu.V., Burmasheva N.V., Konovalov A.V., and Partin A.S. Comparative study of Krylov Subspace method implementations for a GPU cluster in elastoplastic problems. In: *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1785, pp. 040024. DOI: 10.1063/1.4967081.

Подана в журнал: 06.08.2019

УДК 519.683:539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.006-015

ПАТТЕРНЫ СХОДИМОСТИ КРЫЛОВСКИХ МЕТОДОВ В МОДЕЛИРОВАНИИ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГЕТЕРОФАЗНОЙ СРЕДЫ

Ю. В. Халевицкий^{а)*}, А. В. Коновалов^{б)}, А. С. Партин^{в)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0001-8176-9871>  me@dijkstra.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0001-9131-8636>  avk@imach.uran.ru;

^{в)}  <https://orcid.org/0000-0002-9279-9213>  imd@imach.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: me@dijkstra.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049 г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 362–30–26

Моделирование процесса деформации гетерофазных сред необходимо для научного обоснования технологических процессов обработки давлением композиционных материалов. Модели представительных объемов этих материалов представляют собой конгломерат упругих и упругопластических тел. Численное моделирование деформирования заготовок из композиционных материалов осуществляется методом конечных элементов, при использовании которого необходимо многократно решать ряд систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При решении задач с мелкой сеткой, как правило, используются итерационные методы решения СЛАУ, основанные на подпространствах Крылова.

В работе для сетки, содержащей 13 тыс. треугольных трехузловых конечных элементов, получена СЛАУ в двумерной модельной конечно-элементной задаче деформирования гетерофазного представительного объема металломатричного композита на основе сплава АМг6 и 10 об. % частиц карбида кремния.

Проведены численные эксперименты решения данной СЛАУ шестью итерационными методами: стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab), обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), методом квазиминимальных невязок (QMR), методом квадратичных сопряженных градиентов (CGS), вариантом метода BiCGStab – BiCGStab(L) и вариантом метода QMR – TFQMR. Сравнение времени решения СЛАУ этими методами показывает, что наилучшие результаты достигаются при использовании метода QMR.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, метод конечных элементов, метод подпространств Крылова, упругопластическая деформация, композит, представительный объем.

1. Введение

Разработка технологических процессов обработки давлением металломатричных композиционных материалов (ММК) является новой и актуальной задачей для инженеров. Назначение научно обоснованных режимов технологического процесса должно опираться на результаты компьютерного моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния металломатричного композита в процессе его деформирования как на макроуровне, так и на уровне представительного микрообъема [1, 2]. В силу наличия в металлической матрице

композита упрочняющих частиц напряженно-деформированное состояние в микрообъеме внутри компонентов его внутренней структуры существенно неоднородно [3], хотя на макроуровне оно может быть однородным [4].

В статье рассмотрена модель металломатричного композита АМг6/10 % SiC с матрицей из сплава АМг6 и 10 об. % содержанием упрочняющих частиц карбида кремния SiC, изготовленного по порошковой технологии. Микроструктура композита содержит гранулы пластичного материала матрицы, окруженные конгломератом из частиц карбида кремния и оплавленного металла (рис. 1 а). Такой конгломерат называется далее прослойкой.

Эффективным инструментом компьютерного моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния представительного объема ММК при развитых пластических деформациях является метод конечных элементов, основанный на принципе виртуальной мощности в скоростной форме [5].

Метод подразумевает многократное решение ряда систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), причем каждая следующая система зависит от предыдущей. Для рассматриваемой модели материала матрицы коэффициентов СЛАУ несимметричные (имеют симметричный портрет), разреженные, ленточные (значительно разрежены внутри ленты), блочные (с размером блока, соответствующим размерности задачи) имеют значительную размерность и плохо обусловлены. Несимметричность матриц возникает в результате использования в определяющих соотношениях для упругопластической среды ковариантной производной тензора напряжений Коши. Портрет и структура матрицы типичны для метода конечных элементов. Размерность матрицы определяется количеством узлов пространственной дискретизации. Моделирование деформации представительного объема рассмотренного композита (с тонкой прослойкой) требует использования миллионов конечных элементов, при этом матрица имеет размерность порядка миллионов. Для такой размерности матрицы и принятых свойств материала ММК число ее обусловленности имеет порядок 10^6 . Количество СЛАУ, которые необходимо решить в рамках одной задачи, определяется временной дискретизацией. Шаг по времени достаточно мал и выбирается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость решения упругопластической задачи при больших искажениях формы сетки в процессе изменения нагрузки во времени. Поэтому в рассматриваемой задаче необходимо решить в общей сложности порядка 10^4 систем. Каждая следующая СЛАУ формируется с использованием предыдущего решения, поэтому параллельное решение нескольких систем не представляется возможным, однако системы, возникающие в рамках одного шага по нагрузке, имеют одинаковую матрицу жесткости. Это позволяет повторно использовать предобуславливатели или даже полную факторизацию матрицы системы.

В силу большой разреженности внутри ленты, программы, основанные на прямых методах решения СЛАУ, быстро исчерпывают оперативную память компьютера. Даже если система обладает достаточным объемом памяти, решение прямым методом происходит значительно медленнее, чем итерационным, несмотря на возможность повторного использования факторизации. Поэтому для решения систем уравнений с такими матрицами, как правило, применяются современные итерационные методы решения СЛАУ, основанные на подпространствах Крылова [6]. Сходимость таких методов определяется спектральными свойствами матрицы [7, 8], которые в свою очередь зависят от используемой модели материала. В силу сложности построения аналитических оценок для комбинации множества численных методов, использующихся при решении задачи, выбор наиболее подходящего метода решения СЛАУ для каждой новой модели материала необходимо осуществлять экспериментально [9].

Ранее в работе [10] на основе вычислительных экспериментов была проанализирована производительность итерационных методов CGS, TFQMR, BiCGStab и GMRES. В нашей статье дополнительно к ним рассмотрены методы QMR и BiCGStab(L). Полученные результаты обосновывают выбор метода решения СЛАУ в методе конечных эле-

ментов для моделирования процессов развитой пластической деформации представительных объемов металломатричных композитов.

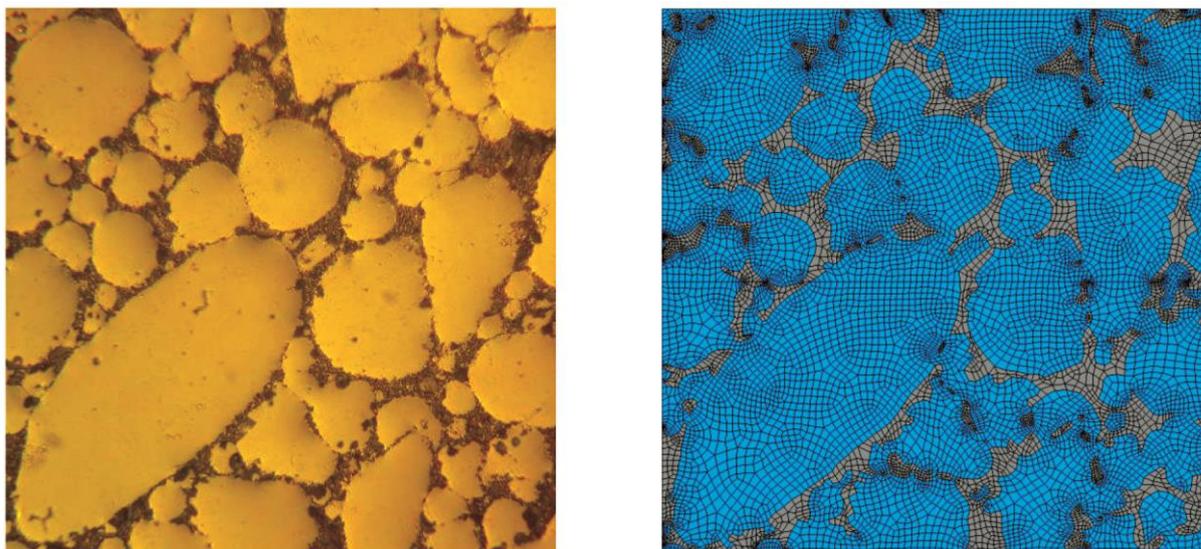
2. Модельная задача и методы решения

Вычислительные эксперименты проводили на матрице СЛАУ, полученной из модельной осесимметричной задачи пластического деформирования двухмерного представительного объема ММК АМг6/10 % SiC с матрицей из сплава АМг6 и 10 об. % содержанием упрочняющих частиц карбида кремния SiC, изготовленного по порошковой технологии. Микроструктура композита, содержащая гранулы пластичного материала матрицы, окруженные конгломератом (прослойкой) из частиц карбида кремния и оплавленного металла, представлена на рис. 1 а. Изображение конечно-элементной сетки представительного объема рассматриваемого композита приведено на рис. 1 б. Конечно-элементная сетка получена трассировкой границ гранул в программе GetData Graph Digitizer. Результаты трассировки были обработаны специальной программой и импортированы в расчетную программу. Гранулы металла матрицы обозначены голубым цветом, а прослойка – сиреневым.

Прослойка состоит в основном из упрочняющих частиц, однако за счет их соединения с оплавленным металлом матрицы прослойка сохраняет пластичность, поэтому в модели представительного объема материал прослойки считаем однородной сплошной средой. Материал гранул и прослойки рассматриваем как изотропную и изотропно упрочняющуюся упругопластическую среду со своими упругими и пластическими свойствами, подверженную большим пластическим деформациям. Среды подчиняется ассоциированному закону пластического течения с функцией текучести Мизеса.

Зависимости сопротивления деформации от величины эквивалентной деформации материала матрицы, а также композита в целом, взяты из работы [11]. Свойства прослойки были определены по правилу фаз [12] из экспериментальных данных [11]. Полученные кривые сопротивления деформации в зависимости от эквивалентной деформации представлены на рис. 2. Упругие константы были взяты из справочной литературы и вычислены по правилу фаз: для АМг6-модуль Юнга 93 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3; для прослойки – модуль Юнга 120 ГПа, коэффициент Пуассона 0,34.

Вычислительная конечно элементная модель деформирования представительного объема ММК построена на принципе виртуальной мощности в приращениях перемещений. Скоростная составляющая вариационного равенства данного принципа построена согласно работе [5]. В силу геометрической и физической нелинейности процесса деформирования представительного объема ММК нагрузка прикладывалась малыми шагами для обеспечения устойчивости решения упругопластической задачи. Сетка содержала 13 тыс. треугольных трехузловых конечных элементов. Моделировали сжатие плоскими плитами без трения представительного объема со степенью обжатия $\Delta h/h_0 = 0,5$ где h_0 и Δh – высота представительного объема и ее изменение соответственно. В конце обжатия в материале матрицы композита имела место развитая пластическая деформация с величиной эквивалентной деформации, достигающей значения 1,6. Полученная при этом матрица коэффициентов СЛАУ, а также вектор ее правой части были выгружены во вторичную память компьютера в формате, пригодном для работы с математическим пакетом MATLAB, установленном на суперкомпьютере «Уран» ИММ УрО РАН. Дальнейшие вычислительные эксперименты провели с использованием пакета MATLAB.



a

б

Рис. 1. Изображение микроструктуры ММК АМг6/10 % SiC (*a*) и построенная по изображению микроструктуры конечно-элементная сетка (*б*)

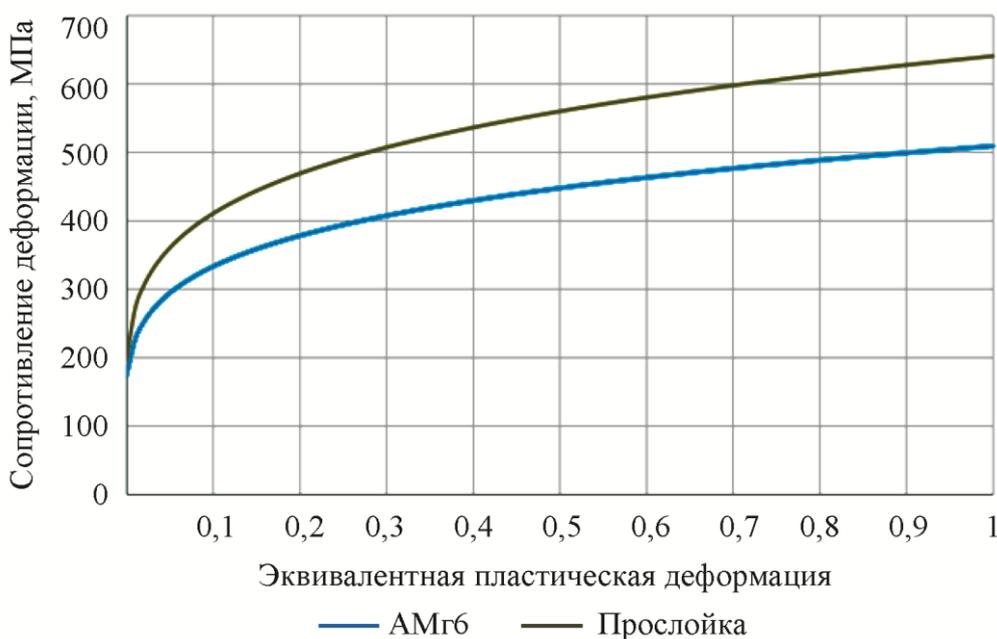


Рис. 2. Сопрогивление деформации составляющих композита

Исследовали распространенные методы решения СЛАУ: стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) [13], обобщенный метод минимальных невязок (GMRES) [14], метод квазиминимальных невязок (QMR) [15], метод квадратичных сопряженных градиентов (CGS) [16], а также варианты методов BiCGStab и QMR: BiCGStab(L) [17] и TFQMR [18]. В процессе вычислений измеряли астрономическое время достижения критерия сходимости $r/r_0 = 10^{-6}$, где r и r_0 – невязка на текущей и первой итерациях решения СЛАУ соответственно. Также фиксировали невязку на каждой из итераций.

3. Результаты и обсуждение

К сожалению, имеющими в распоряжении авторов вычислительными ресурсами не удалось определить число обусловленности использованной матрицы СЛАУ из-за ее большой размерности. Оценка числа обусловленности с помощью подпрограммы `condst` пакета MATLAB дает величину порядка 10^6 , однако, вероятно, число обусловленности гораздо больше.

Все решения рассмотренными методами, за исключением метода TFQMR, сошлись. Ниже представлено время решения СЛАУ разными методами.

Метод	BiCGStab	BiCGStab(L)	CGS	QMR	GMRES
Время, с	1,66±0,11	2,11±0,15	1,50±0,10	1,70±0,12	16,04±2,4

Видно, что наименьшее время решения СЛАУ обеспечивают методы QMR и CGS. Метод GMRES затрачивает на решение наибольшее время. Это касается и метода BiCGStab(L), который также использует итерации, основанные на минимальной невязке [17]. В рассматриваемой задаче использование таких итераций не приводит к улучшению сходимости.

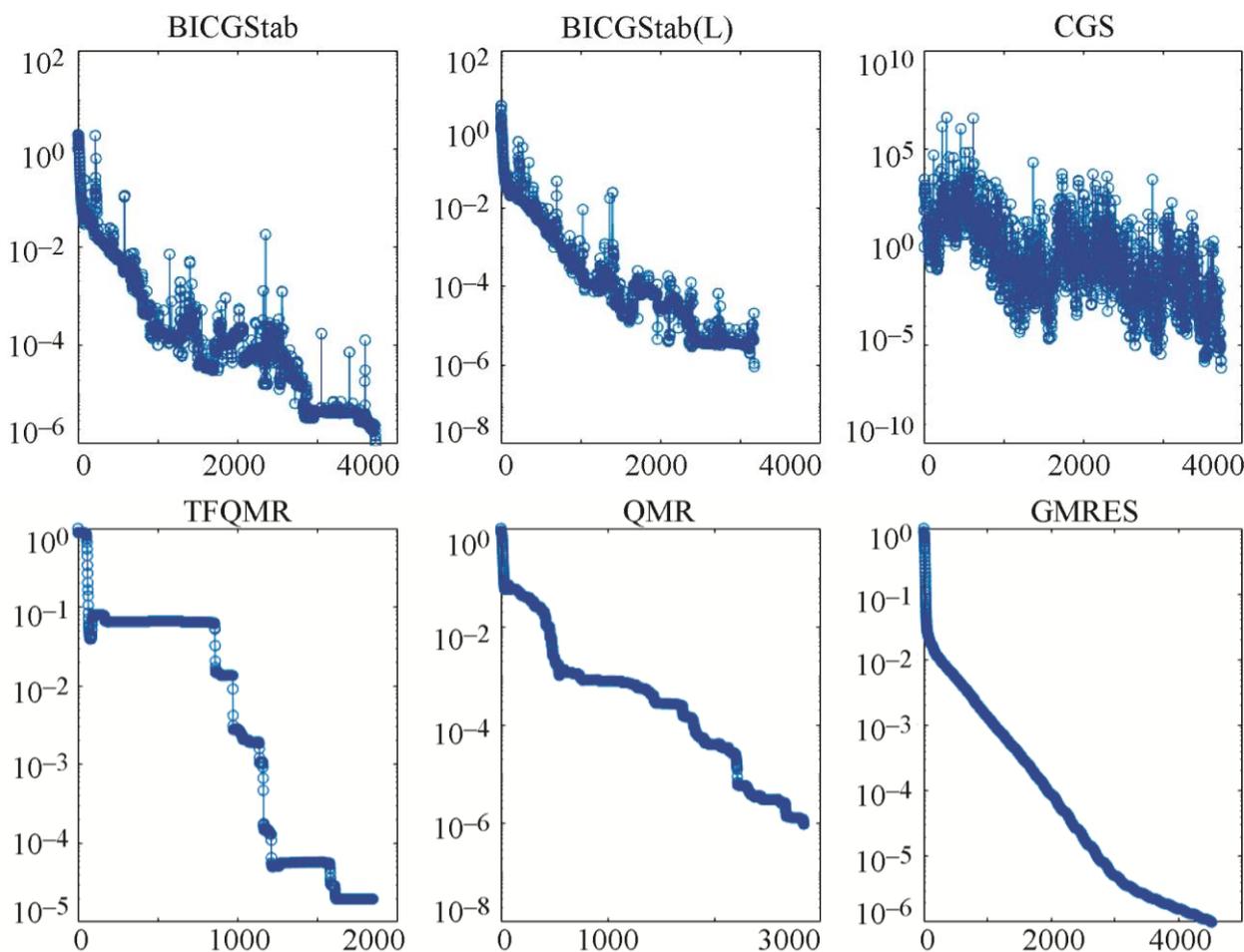


Рис. 3. Зависимость нормы невязки методов решения СЛАУ от номера итерации (снимок экрана программного комплекса MATLAB)

Зависимость нормы невязки каждого из рассмотренных методов от номера итерации представлена на рис. 3. При использовании методов QMR и GMRES невязка монотонно убывает с каждой следующей итерацией. При использовании методов BiCGStab и CGS норма

невязки не убывает монотонно и подвержена значительным осцилляциям, которые могут составлять несколько порядков, при этом сходимость достигается на одной из осцилляций. Метод TFQMR подвержен стагнациям [19], и его график изменения невязки имеет характерный «лестничный» вид (рис. 3). Метод не достигает сходимости в рассматриваемой задаче из-за стагнации. При этом метод TFQMR достигает сходимости с простыми предобуславливателями при моделировании деформации однородной среды с матрицами значительно большей размерности [20].

Метод QMR значительно менее распространен в сравнении с методами GMRES и BiCGStab, однако показывает в данной задаче наилучший результат.

4. Заключение

Метод GMRES не подходит для использования в рассматриваемом классе задач. Методы CGS и QMR обеспечивают практически одинаковое время решения СЛАУ, однако метод CGS подвержен сильным осцилляциям нормы невязки. В рассматриваемой задаче метод TFQMR не сходится. Методы BiCGStab и BiCGStab(L) показывают сходное с методом QMR время решения СЛАУ, однако также подвержены осцилляциям и не могут быть рекомендованы для рассматриваемого класса задач. По результатам вычислительных экспериментов можно рекомендовать для использования в конечно элементных расчетах напряженно-деформированного состояния представительных объемов металломатричных композитов относительно малораспространенный метод QMR.

Благодарность

Работа выполнена по бюджетной теме № АААА-А18-118020790140-5 в части исследования сходимости итерационных методов решения СЛАУ в упругопластической задаче и при частичной финансовой поддержке гранта РНФ (Проект № 14-19-01358) в части разработки конечно-элементного программного комплекса для моделирования процессов деформации композитных материалов.

Литература

1. Mishnaevsky L. Computational mesomechanics of composites: Numerical analysis of the effect of microstructures of composites of strength and damage resistance. – London : John Wiley and Sons, 2007. – 294 p. – ISBN: 978-0-470-02764-6.
2. Schmauder S., Mishnaevsky L. Micromechanics and nanosimulation of metals and composites: Advanced methods and theoretical concepts. – Heidelberg : Springer, 2008. – 420 p. – ISBN 978-3-540-78678-8.
3. Pugacheva N. B., Michurov N. S., Bykova T. M. The structure and properties of the 30AL-70SiC metal matrix composite material // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2015. – Iss. 6. – P. 6–18. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.6.006-018.
4. A Computational Model of V95/SiCp (7075/ SiCp) Aluminum Matrix Composite Applied to Stress-Strain State Simulation under Tensile, Compressive and Shear Loading Conditions / S. V. Smirnov, A. V. Konovalov, M. V. Myasnikova, Yu. V. Khalevitskiy, A. S. Smirnov, A. S. Igumnov // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2017. – Iss. 6. – P. 16–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.016-027.
5. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М. : Наука, 1986. – 232 с.
6. Yousef S. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second Edition. – SIAM Publishing, 2003. – 547 p. – DOI: 10.1137/1.9780898718003.

7. Driscoll T. A., Toh K. C., Trefethen L. N. Matrix iterations: the six gaps between potential theory and convergence // Theory Center technical report. Cornell Theory Center, Cornell University. – 1996. – URL: <https://books.google.ru/books?id=HbFQAAAAAYAAJ>
8. Khalevitsky Yu. V., Konovalov A. V., Partin A. S. On convergence of various iterative linear solvers in heterophase elastoplastic media deformation models // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – P. 030026. – DOI: 10.1063/1.5084387.
9. Noël M. N., Satish C. R., Lloyd N. T. How Fast are Nonsymmetric Matrix Iterations? // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1992. – Vol. 13, no. 3. – P. 778–795. – DOI: 10.1137/0613049.
10. Ильин В. П. Проблемы высокопроизводительных технологий решения больших разреженных СЛАУ // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2009) : труды международной научной конференции. – Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2009.
11. Effect of silicon carbide particles on the mechanical and plastic properties of the AlMg6/10 % SiC metal matrix composite / A. S. Smirnov, V. P. Shveikin, E. O. Smirnova, G. A. Belozеров, Anatoly V. Konovalov, Dmitry I. Vichuzhanin, Olga Yu. Muizemnek // Journal of Composite Materials. – 2018. – Vol. 52 (24). – P. 3351–3363. – DOI: 10.1177/0021998318765622.
12. Askeland D., Fulay P., Wright W. The Science and Engineering of Materials. – Cengage Learning, 2010. – ISBN 978-1-4899-2895-5.
13. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. – 1992. – Vol. 13, iss. 2. – P. 631–644. – DOI: 10.1137/0913035.
14. Youcef S., Martin H. S. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. – 1986. – Vol. 7, iss. 3. – P. 856–869. – DOI: 10.1137/0907058.
15. Freund R. W., Nachtigal N. M. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems // Numerische Mathematik. – 1991. – Vol. 60, iss. 1. – P. 315–339. – DOI: 10.1007/BF01385726.
16. Sonneveld P. CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear systems // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1989. – Vol. 10, no. 1. – P. 36–52.
17. Sleijpen G. L. G., Fokkema D. R. BiCGstab(L) for linear equations involving matrices with complex spectrum // Electron. Trans. Numer. Anal. – 1993. – No. 1. – P. 11–32.
18. Freund R. W. A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1993. – Vol. 14. – P. 470–482.
19. Zhang J. Preconditioned Krylov subspace methods for solving nonsymmetric matrices from CFD applications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. – Vol. 189, iss. 3. – P. 825–840.
20. Comparative study of Krylov Subspace method implementations for a GPU cluster in elastoplastic problems / Yu. V. Khalevitsky, N. V. Burmasheva, A. V. Konovalov, A. S. Partin // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1785. – P. 040024. – DOI: 10.1063/1.4967081.

Received: 23.04.2018**Revised:** 07.06.2019**Accepted:** 28.06.2019**DOI:** 10.17804/2410-9908.2019.3.016-024

DETERMINING THE PARAMETERS OF A PIPE SYSTEM CONTAINING FLUID FLOW BY NATURAL FREQUENCIES OF FLEXURAL VIBRATIONS

A. G. Khakimov

*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS,
71 Oktyabrya Ave., Ufa, 450054, Russian Federation* <https://orcid.org/0000-0003-4093-5380>  hakimov@anrb.ru

Corresponding author. E-mail: hakimov@anrb.ru

Address for correspondence: pr. Oktyabrya, 71, Ufa, 450054, Russian Federation

Tel.: +7 (347) 292 14 06; fax: +7 (347) 235 52 55

The investigation deals with natural frequencies of flexural vibrations in a pipe system containing pressurized fluid flow and clamped at both ends. It has been found that an increase in the axial load results in higher natural frequencies of pipe flexural vibrations. The research has shown that an increase in the pipe wall thickness results in lower natural frequencies of flexural vibrations under tensile axial loading and higher natural frequencies of flexural vibrations under compressive axial loading. It has also been found that an increase in fluid density or pressure within the pipe system results in lower natural frequencies of pipe flexural vibrations.

Using two natural frequencies of pipe flexural vibrations, we can determine axial load and pipe wall thickness, or axial load and fluid density within the pipe system, or fluid density within the pipe system and pipe wall thickness, or fluid pressure and density within the pipe system, or fluid pressure and pipe wall thickness.

The investigation outcomes can be applied for assessing axial load and pipe wall thickness, or axial load and fluid density within a pipe system, or fluid density within a pipe system and pipe wall thickness, or fluid pressure and density within the pipe system, or fluid pressure and pipe wall thickness using two natural frequencies of flexural vibrations.

Keywords: pipe system, flexural vibrations, natural frequencies, axial load, wall thickness, fluid density, pressure, primal and inverse problems.

Acknowledgments

The study was financed by the federal budget according to state assignment No. 0246-2019-0088) and supported by RFBR grant No. 18-01-00150.

References

1. Sidorov B.V., Martynov S.A. Recommended Technology for the Diagnostics of Underground Pipelines. *Kontrol. Diagnostika*, 2005, no. 12, pp. 18–19. (In Russian).
2. Gladwell G.M.L. *Inverse problems in vibration*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 2004.
3. Guangming Dong, Jin Chen. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2011, vol. 28, no. 1, pp. 171–182. DOI: 10.1007/s13160-011-0031-3.

4. Akop'yan V.A., Cherpakov A.V., Rozhkov E.V., and Solov'ev A.N. Integral indicator for damage identification in rod-shaped structural components. *Kontr. Diagnost.*, 2012, no. 7, pp. 50–56. (In Russian).
5. Yunwei Zhang, Guozheng Yan. Detection of gas pipe wall thickness based on electromagnetic flux leakage. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2007, vol. 43, iss. 2, pp 123–132. DOI: 10.1134/S1061830907020088.
6. Kulikov V.V. The thickness of tube's wall in pressure. *Stroitelstvo neftyanykh i gazovykh skvazhin na sushe i na more*, 2009, no 7, pp. 6–8. (In Russian).
7. Kucheryavyi V.I., Mil'kov S.N. Reliability analysis of a compression section of a gas pipeline with the presence of longitudinal cracks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2011, vol. 40, no. 3, p. 290–293. DOI: 10.3103/S1052618811030095.
8. Novgorodov D.V., Rybalko V.G., Shleyenkov A.S. The stress state instability factor and its effect on the growth of stress corrosion cracking defects. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 249–254. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.249-254.
9. Novgorodov D.V., Rybalko V.G., Shleyenkov A.S., and Surkov A.Yu. A study of gas pipeline emergency failure. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 237–248. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.237-248.
10. Chirikov V.A., Dimitrov D.M., Kostov K.P. Universal experimental relation for natural frequencies of transversal vibration of stubby free-free beams. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 4, pp. 42–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.4.042-051.
11. Khakimov A.G. Determination of fluid density and inner pressure in a pipeline using natural frequencies of flexural vibrations. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefti i nefteproduktov*, 2014, no. 1, pp. 37–43. (In Russian).
12. *Prochnost. Ustoichivost. Kolebaniya. Spravochnik*. T. 3 [Strength. Stability. Oscillations. Handbook, Birger I.A. and Panovko Ya.G., eds., vol. 3]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. (In Russian).
13. Bolotin V.V. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v 6 tomakh. T. 1. Kolebaniya lineinykh sistem* [Vibrations in Technology: A Handbook. Vol. 1. Vibrations of Linear Systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1999, 504 p. (In Russian).

Подана в журнал: 23.04.2019

УДК 532.3; 532.5

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.016-024

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. Г. Хакимов

*Институт механики им. Р.Р. Мажутова Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
пр-т Октября, 71, 450054, г. Уфа, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0003-4093-5380>  hakimov@anrb.ru

Ответственный автор. Электронная почта: hakimov@anrb.ru

Адрес для переписки: пр-т Октября, 71, 450054, г. Уфа, Российская Федерация

Тел.: +7 (347) 292-14-06; факс: +7 (347) 235-52-55

Исследованы собственные частоты изгибных колебаний заземленных по краям трубопровода с жидкостью под давлением. С увеличением осевого усилия происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний трубы. Установлено, что с увеличением толщины стенки трубы происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы для растягивающего осевого усилия и увеличение собственных частот изгибных колебаний трубы для сжимающего осевого усилия, а с увеличением плотности жидкости или давления внутри трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы.

По двум собственным частотам изгибных колебаний трубы можно определить осевое усилие и толщину стенки трубы или осевое усилие и плотность жидкости в трубопроводе или плотность жидкости в трубопроводе и толщину стенки трубы, или давление и плотность жидкости в трубопроводе, или давление в трубопроводе и толщину его стенки.

Результаты работы могут быть применены для определения осевого усилия и толщины стенки трубы или осевого усилия и плотности жидкости в трубопроводе, или плотности жидкости в трубопроводе и толщины стенки трубы, или давления и плотности жидкости в трубопроводе, или давления в трубопроводе и толщины его стенки по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Ключевые слова: трубопровод, изгибные колебания, собственные частоты, осевое усилие, толщина стенки, плотность жидкости, давление, прямая и обратная задачи.

1. Введение

В протяженных объектах типа магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. Проблемам диагностики дефектов в стержневых системах посвящено много работ, например, в [2–4]. В [5] представлен способ неразрушающего контроля толщины стенки газопровода, основанный на методе магнитного поля рассеяния, и дается обзор работ по данной теме. В [6] предложены формы представления известных зависимостей, позволяющие непосредственно рассчитать необходимую толщину стенки труб. В статье [7] разработан алгоритм, позволяющий найти математическое ожидание длины продольной трещины дефектной трубы, при которой сохраняется нормативный безопасный уровень надежности газопровода. Решение получено для условия, когда вязкость разрушения трубной стали, сжимающее усилие, давление газа, коэффициент линейного расширения, модуль Юнга, температурный перепад стенки трубы, ее диаметр и толщина нормально распределены. В [8] выполнен краткий анализ результатов внутритрубной дефектоскопии

протяженного участка газопровода. В работе [9] приведены результаты исследования причин аварийного разрушения газопровода диаметром 377 мм с толщиной стенки 6 мм для спиральношовной трубы. На основании серии экспериментальных испытаний в работе [10] установлена универсальная экспериментальная зависимость для определения собственных поперечных частот коротких цельных стержней со свободными концами. В [11] определяется плотность жидкости или осевой момент инерции поперечного сечения и внутреннее давление по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода. Здесь исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода с жидкостью под давлением, находящейся под действием растягивающей силы, а также решена обратная задача определения осевого усилия и толщины стенки трубы или осевого усилия и плотности жидкости в трубопроводе, или плотности жидкости в трубопроводе и толщины стенки трубы, или давления и плотности жидкости в трубопроводе, или давления в трубопроводе и толщины его стенки по двум собственным частотам изгибных колебаний.

2. Постановка задачи

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода с жидкостью под давлением, находящейся под действием растягивающей силы и заземленной по краям. Требуется определить осевое усилие и толщину стенки трубы или осевое усилие и плотность жидкости в трубопроводе, или плотность жидкости в трубопроводе и толщину стенки трубы, или давление и плотность жидкости в трубопроводе, или давление в трубопроводе и толщину его стенки по собственным частотам изгибных колебаний.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} - (T - P_i F_i) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0,$$

где E , ρ , J , F – модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и площадь поперечного сечения трубопровода; ρ_i , F_i , P_i – плотность жидкости, площадь проходного сечения и давление внутри трубопровода; T – усилие растяжения в трубопроводе; w_* – прогиб трубопровода; x – координата, направленная по оси трубопровода; t – время. А уравнение, определяющее форму изгибных колебаний трубопровода, имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} - \frac{T - P_i F_i}{EJ} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} - \frac{(\rho F + \rho_i F_i) \omega^2}{EJ} w_* = 0; \quad (1)$$

$$F_i = \pi R_i^2, \quad F = \pi [(R_i + h)^2 - R_i^2], \quad J = \pi [(R_i + h)^4 - R_i^4] / 4,$$

где ω – частота; R_i – внутренний радиус трубопровода; h , L – толщина стенки и длина трубопровода. Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия для заземленного по краям трубопровода:

$$w_* = 0, \quad \frac{\partial w_*}{\partial x} = 0, \quad (x = 0, L). \quad (2)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad w = \frac{w_*}{L}; \quad p = \frac{(T - P_i F_i) L^2}{2EJ}; \quad \lambda = L \sqrt{\frac{(\rho F + \rho_i F_i) \omega^2}{EJ}};$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{p^2 + \lambda^4} - p}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{p^2 + \lambda^4} + p},$$

общее решение уравнения (1) и граничные условия (2) представим в виде:

$$w = A \cos(\lambda_1 \xi) + B \sin(\lambda_1 \xi) + C \operatorname{ch}(\lambda_2 \xi) + D \operatorname{sh}(\lambda_2 \xi),$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0, 1). \quad (3)$$

Граничные условия и условия (3) запишем в развернутом виде:

$$A + C = 0; \quad B \lambda_1 + D \lambda_2 = 0;$$

$$A \cos \lambda_1 + B \sin \lambda_1 + C \operatorname{ch} \lambda_2 + D \operatorname{sh} \lambda_2 = 0;$$

$$\lambda_1 \cdot (-A \sin \lambda_1 + B \cos \lambda_1) + \lambda_2 \cdot (C \operatorname{sh} \lambda_2 + D \cdot \operatorname{ch} \lambda_2) = 0.$$

Для того чтобы A, B, C, D не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение:

$$\lambda^2 (1 - \cos \lambda_1 \cdot \operatorname{ch} \lambda_2) + p \sin \lambda_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda_2 = 0.$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели трубопровода фигурируют параметры p и λ , которые зависят от усилия растяжения в трубе T , толщины стенки трубопровода h , плотности ρ_i и давления P_i жидкости внутри трубопровода. Отметим, что при $p = 0$ частотное уравнение принимает вид [12, 13].

3. Прямая задача

Расчеты проведены для следующих параметров трубы: $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\rho = 7800$ кг/м³; $R_i = 0,259$ м; $L = 25$ м. Получены зависимости первой и второй собственных частот изгибных колебаний трубопровода от осевого усилия T при давлении внутри трубопровода $P_i = 0$, плотности жидкости в трубопроводе $\rho_i = 0$ для $h = 4, 5, 6$ мм, из чего следует, что с увеличением осевого усилия T происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний трубы. Из анализа зависимостей первой и второй собственных частот изгибных колебаний трубопровода от толщины стенки трубы h при давлении внутри трубопровода $P_i = 0$, плотности жидкости в трубопроводе $\rho_i = 0$ при осевом усилии $T = -500; 0; 500$ кН следует, что с увеличением толщины стенки трубы h происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубопровода для растягивающего осевого усилия и увеличение собственных частот изгибных колебаний трубопровода для сжимающего осевого усилия. Полученные зависимости первой и второй собственных частот изгибных колебаний трубопровода от плотности жидкости в трубопроводе ρ_i при осевом усилии $T = 0$, толщине стенки трубы $h = 5$ мм при давлении внутри трубопровода $P_i = 0; 0,5; 1,0$ МПа позволяют сделать вывод, что с увеличением плотности

жидкости в трубопроводе ρ_i происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы, а с увеличением давления внутри трубопровода P_i происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы.

4. Обратная задача

Из решения прямой задачи для трубы с вышеприведенными параметрами: $h = 5$ мм; $T = 0$; $P_i = 0$; $\rho_i = 800$ кг/м³ следует, что первая и вторая собственные частоты трубопровода $f_1 = 2,799$ Гц; $f_2 = 7,717$ Гц. Решение обратной задачи для трубопровода с вышеприведенными параметрами при $f_1 = 2,7$ Гц; $f_2 = 7,7$ Гц дает: $h = 5,399$ мм; $T = -479,721$ кН. По двум частотам изгибных колебаний можно определить осевое усилие T и толщину стенки трубы h . На рис. 1 представлены зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 осевого усилия T (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,72 Гц – 2; 7,74 Гц – 3 при $P_i = 0$ и $\rho_i = 800$ кг/м³. По двум частотам изгибных колебаний также можно определить осевое усилие T и плотность жидкости в трубопроводе ρ_i . На рис. 2 приведены зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 осевого усилия T (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,72 Гц – 2; 7,74 Гц – 3 при $P_i = 0$ и $h = 5$ мм. По двум частотам изгибных колебаний также можно определить плотность жидкости в трубопроводе ρ_i и толщину стенки трубы h или давление P_i и плотность жидкости в трубопроводе ρ_i , или давление P_i и толщину стенки трубы h .

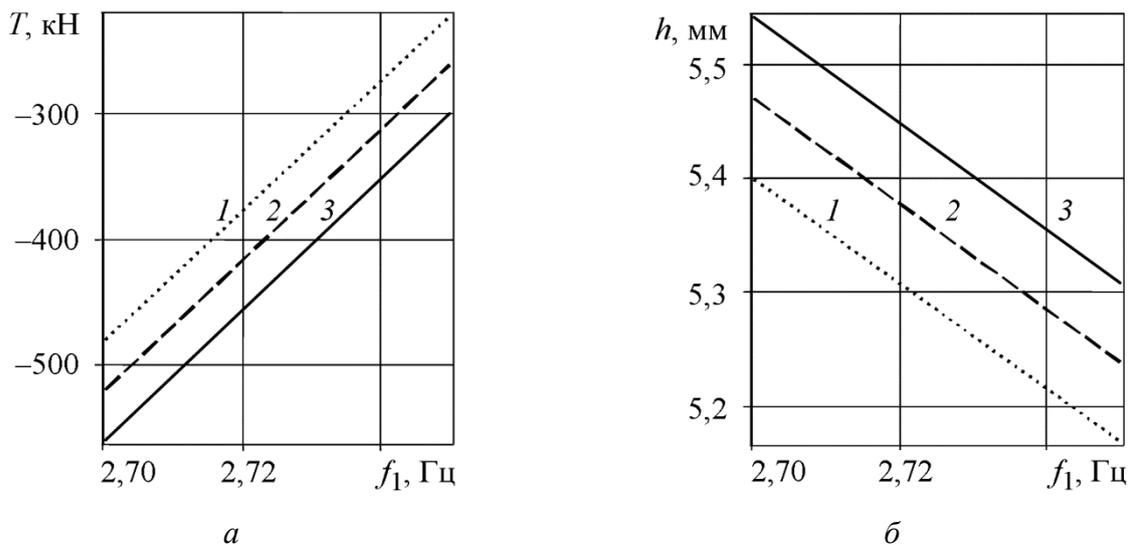


Рис. 1. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 осевого усилия T (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,72 Гц – 2; 7,74 Гц – 3 при $P_i = 0$ и $\rho_i = 800$ кг/м³

По двум частотам изгибных колебаний также можно определить плотность жидкости в трубопроводе ρ_i и толщину стенки трубы h . На рис. 3 приводятся зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 плотность жидкости в трубопроводе ρ_i (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,700 Гц – кривая 1; 7,702 Гц – 2; 7,704 Гц – 3 при $P_i = 0,1$ МПа и $T = 0$.

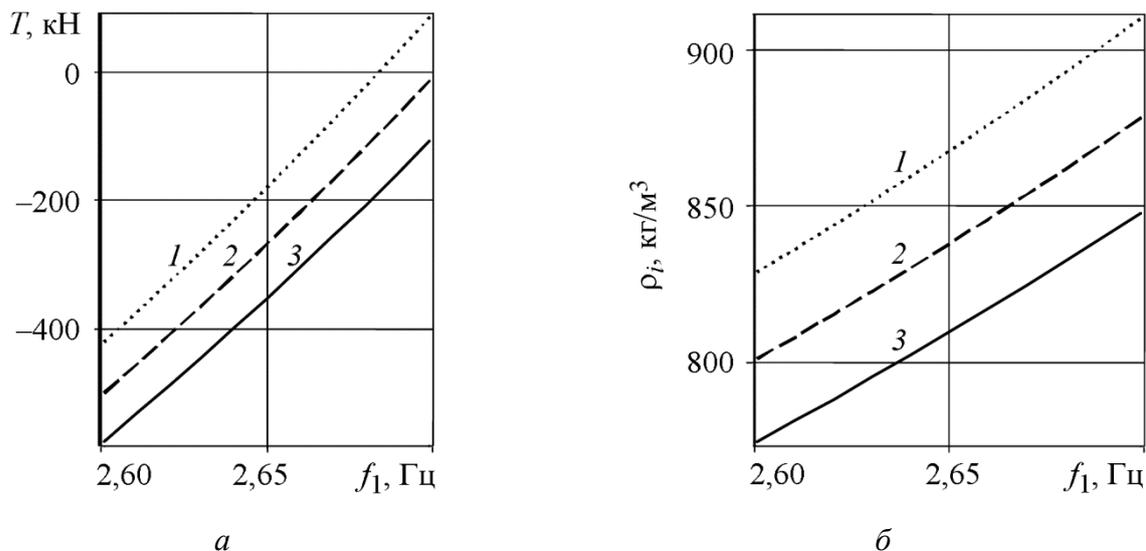


Рис. 2. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 осевого усилия T (а) и плотности жидкости в трубопроводе ρ_i (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,40 Гц – кривая 1; 7,45 Гц – 2; 7,50 Гц – 3 при $P_i = 0$ и $h = 5$ мм

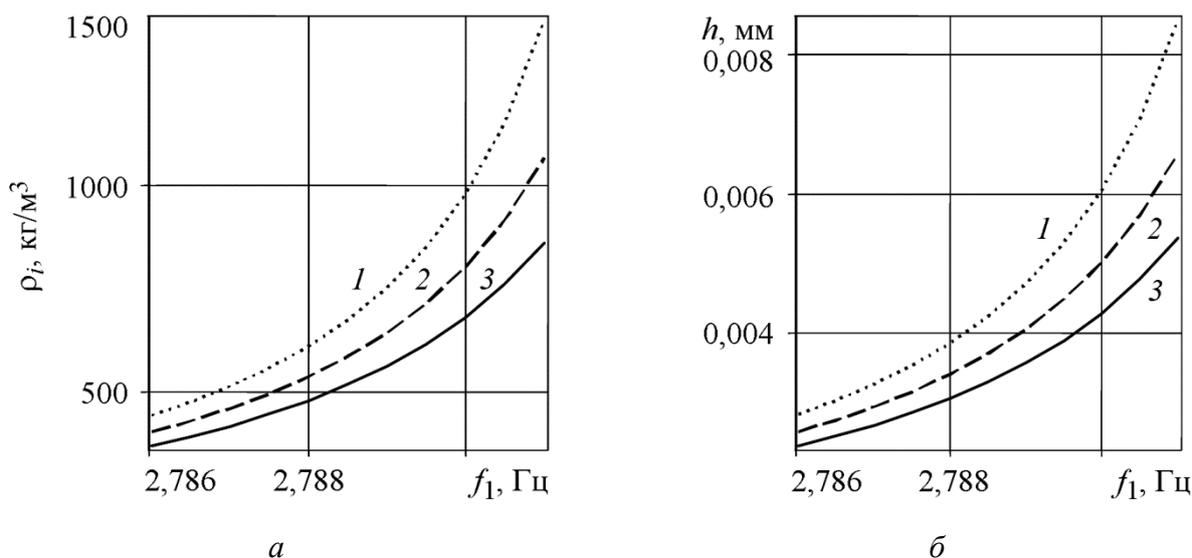


Рис. 3. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 плотности жидкости в трубопроводе ρ_i (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,700 Гц – кривая 1; 7,702 Гц – 2; 7,704 Гц – 3 при $P_i = 0,1$ МПа и $T = 0$

По двум частотам изгибных колебаний также можно определить давление P_i и плотность жидкости в трубопроводе ρ_i . На рис. 4 представлены зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 давления P_i (а) и плотности жидкости в трубопроводе ρ_i (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,71 Гц – 2; 7,72 Гц – 3 при $h = 5$ мм и $T = 0$.

По двум частотам изгибных колебаний также можно определить давление P_i и толщину стенки трубы h . На рис. 5 представлены зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 давления P_i (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,71 Гц – 2; 7,72 Гц – 3 при $\rho_i = 850$ кг/м³ и $T = 0$.

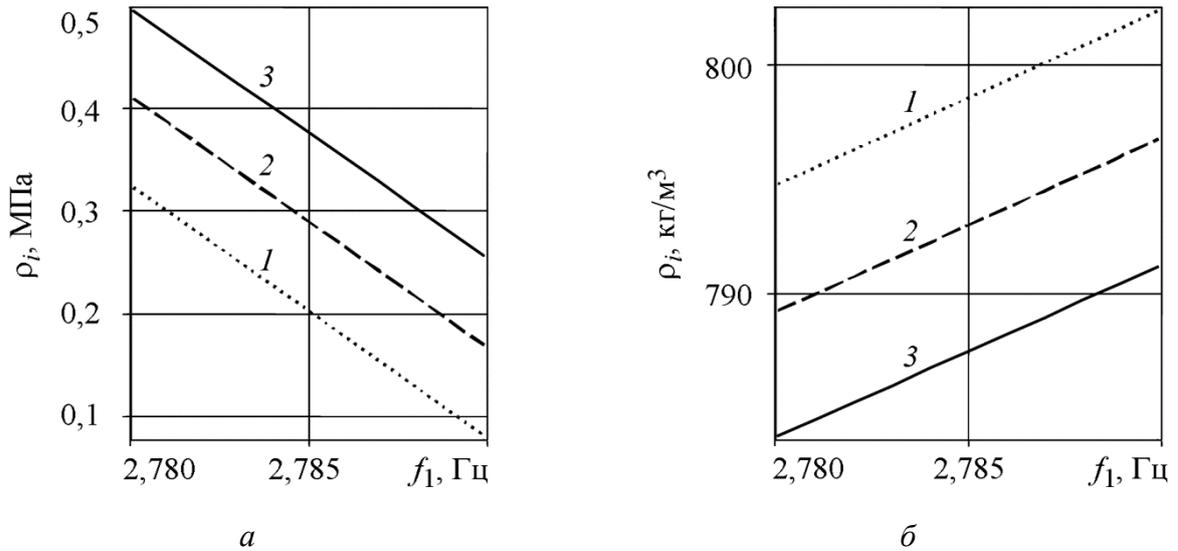


Рис. 4. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 давления P_i (а) и плотности жидкости в трубопроводе ρ_i (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,71 Гц – 2; 7,72 Гц – 3 при $h = 5$ мм и $T = 0$

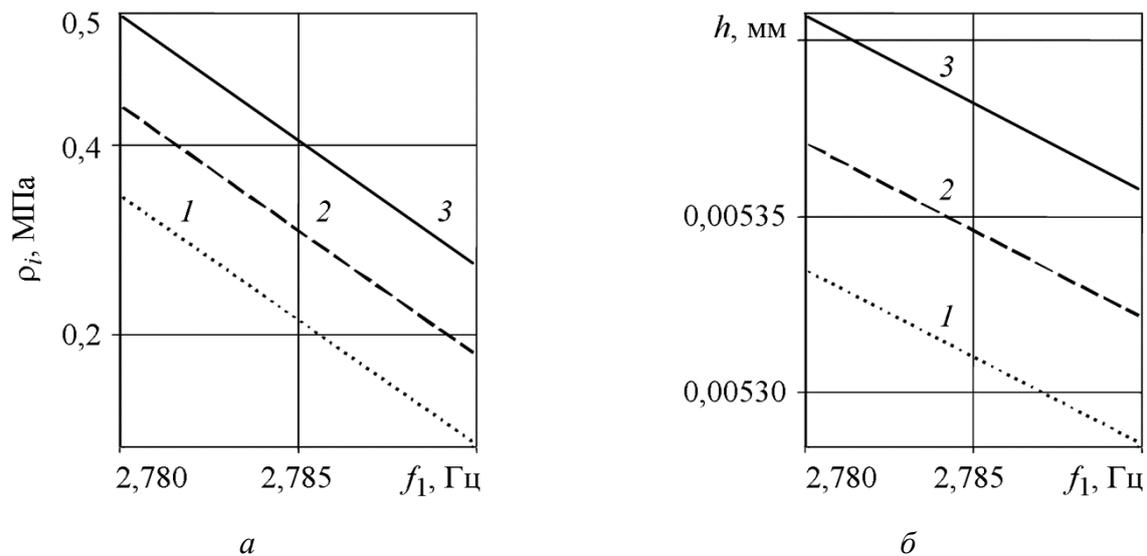


Рис. 5. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний f_1 давления P_i (а) и толщины стенки трубы h (б) для различных частот изгибных колебаний f_2 : 7,70 Гц – кривая 1; 7,71 Гц – 2; 7,72 Гц – 3 при $\rho_i = 850$ кг/м³, и $T = 0$

5. Заключение

Установлено, что с увеличением осевого усилия происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний трубы, а с увеличением толщины стенки трубы происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы для растягивающего осевого усилия и увеличение собственных частот изгибных колебаний трубы для сжимающего осевого усилия. Получено, что с увеличением плотности жидкости или давления внутри трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы.

По двум собственным частотам изгибных колебаний трубы можно определить осевое усилие и толщину стенки трубы или осевое усилие и плотность жидкости в трубопроводе, или плотность жидкости в трубопроводе и толщину стенки трубы, или давление и плотность жидкости в трубопроводе, или давление в трубопроводе и толщину его стен-

ки. Результаты работы могут быть применены для определения осевого усилия и толщины стенки трубы, или осевого усилия и плотности жидкости в трубопроводе, или плотности жидкости в трубопроводе и толщины стенки трубы, или давления и плотности жидкости в трубопроводе, или давления в трубопроводе и толщины его стенки по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Благодарность

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантом РФФИ (№ 18-01-00150).

Литература

1. Сидоров Б. В., Мартынов С. А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. – 2005. – № 12. – С. 18–19.
2. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2004. – (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 608 с.).
3. Guangming Dong and Jin Chen. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 28, no. 1. – P. 171–182. – DOI: 10.1007/s13160-011-0031-3.
4. Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций / В. А. Акопян, А. В. Черпаков, Е. В. Рожков, А. Н. Соловьев // Контроль. Диагностика. – 2012. – № 7. – С. 50–56.
5. Yunwei Zhang, Guozheng Yan. Detection of gas pipe wall thickness based on electromagnetic flux leakage // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2007. – Vol. 43, iss. 2. – P. 123–132. – DOI: 10.1134/S1061830907020088.
6. Куликов В. В. Толщина стенки трубы, нагруженной давлением // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. – 2009. – № 7. – С. 6–8.
7. Kucheryavyi V. I., Mil'kov S. N. Reliability analysis of a compression section of a gas pipeline with the presence of longitudinal cracks // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2011. – Vol. 40, no. 3. – P. 290–293. – DOI: 10.3103/S1052618811030095.
8. Novgorodov D. V., Rybalko V. G., Shleyenkov A. S. The stress state instability factor and its effect on the growth of stress corrosion cracking defects // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 249–254. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.249-254.
9. Novgorodov D. V., Rybalko V. G., Shleyenkov A. S., and Surkov A. Yu. A study of gas pipeline emergency failure // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 237–248. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.237-248.
10. Chirikov V. A., Dimitrov D. M., Kostov K. P. Universal experimental relation for natural frequencies of transversal vibration of stubby free-free beams // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures – 2015. – Iss. 4. – P. 42–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.4.042-051.
11. Хакимов А. Г. Определение плотности жидкости и внутреннего давления в трубопроводе по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2014. – № 1. – С. 37–43.
12. Прочность, устойчивость, колебания : справочник в трех томах. Том 3 / под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
13. Вибрации в технике : справочник в 6 томах. Том 1 : Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1999. – 482 с.

Received: 19.05.2019
Revised: 28.06.2019
Accepted: 28.06.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.025-040

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE ABSENCE OF STRONG AND WEAK DISCONTINUITIES IN GAS FLOWS IN FLAT CHANNELS

E. Yu. Prosviryakov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 374 20 38; fax: 374 53 30

The paper brings together all the assumptions about the properties of discontinuous flows of an ideal (perfect) gas, both formulated in textbooks and not formulated in the available literature, but having actually been long and effectively used. In addition, some new assumptions are physically grounded and formulated for the plane steady-state flow. All these properties are formulated in the form of a continuous continuum hypothesis for plane stationary flows of an ideal (perfect) gas. The hypothesis is formulated in such a way that, to justify the calculations and reasoning in the solution of problems, it would be possible not to resort to physical considerations every time again, but to rely on the “ready” statements of the hypothesis. Using the statements of this hypothesis, a sufficient condition for the impossibility of the existence of discontinuities in the flows occurring in flat channels is obtained. In the derivation of sufficient conditions, we use only the statements of the hypothesis, without involving any additional physical considerations.

Keywords: continuous continuum, perfect gas, discontinuous gas flows, smoothness of flow parameters.

Acknowledgment

We are grateful to Prof. A. L. Stasenko (TsAGI) and Dr. G. B. Sizykh (MIPT) for the discussion of the “hypothesis” and useful remarks.

References

1. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Pergamon Press, 1966.
2. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd, London, 1958.
3. Kochin N.K., Kibel I.A., Roze N.V. *Theoretical Hydromechanics*. Wiley Interscience, 1964.
4. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. University Press, Cambridge, 1970. DOI: 10.1017/CBO9780511800955.
5. Sedov L.I. *Mechanics of Continuous Media*. World Sci., River Edge, NJ, 1997.
6. Nikol'skii A.A., Taganov G.I. The motion of a gas in a local supersonic zone and some conditions for the breakdown of potential flow. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1946, vol. 10, no. 4.
7. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1927, vol. 19, pp. 147–152.
8. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1970.

9. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number I. *J. Rat. Mech. and Analysis*, 1954, vol. 3, iss. 2, pp. 209–230.
10. Kraiko A.N. Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical mach number. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 51, iss. 6, pp. 723–730. DOI: 10.1016/0021-8928(87)90131-6.
11. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *P. Roy. Soc. Lond.*, 1931, A134, pp. 170–192.
12. Belotserkovsky S.M., Nisht M.I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh krylyev idealnoy zhidkostyu* [Separated and Separationless Ideal-Fluid Flows past Thin Wings]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p. (In Russian).
13. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000.
14. Gutnikov V.A., Lifanov I.K., Setukha A.V. Simulation of the aerodynamics of buildings and structures by means of the closed vortex loop method. *Fluid Dynamics*, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 555–567. DOI: 10.1007/s10697-006-0073-4.
15. Fihtengolts G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [A Course in Differential and Integral Calculus, vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. (In Russian).
16. Munk M., Prim R. On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1947, vol. 33, pp. 137–141.
17. Sizykh G.B. The Criterion of the Presence of a Stagnation Point in a Plane Irrotational Flow of Inviscid Gas. *Trudy MFTI*, 2015, vol. 7 (2), 108–112. (In Russian).
18. Golubkin V.N., Sizykh G.B. Property of the extreme pressure values in plane subsonic flows. *Trudy MFTI*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 149–154. (In Russian).

Подана в журнал: 19.05.2019
УДК 533.6.011
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3. 025-040

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ СИЛЬНЫХ И СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

Е. Ю. Просвиряков

*Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 374–20–38; факс: 374–53–30

В работе собраны все предположения о свойствах разрывных течений идеального совершенного газа: сформулированные в учебниках и не сформулированные в доступной литературе, но фактически уже давно эффективно использующиеся. Кроме того, для плоского стационарного течения физически обоснованы и сформулированы некоторые новые предположения. Все эти свойства представлены в виде гипотезы непрерывной сплошной среды для плоских стационарных течений идеального совершенного газа. Гипотеза сформулирована таким образом, чтобы для обоснования выкладок и рассуждений при решении задач можно было не прибегать всякий раз заново к физическим соображениям, а опираться на готовые положения гипотезы. С использованием положений гипотезы получено достаточное условие невозможности существования разрывов в течениях, происходящих в плоских каналах. При выводе этого достаточного условия были использованы только положения гипотезы и не привлекались никакие дополнительные физические соображения.

Ключевые слова: непрерывная сплошная среда, идеальный совершенный газ, разрывные течения газа, гладкость параметров течения.

1. Введение

Ряд практически важных задач газовой динамики не имеет решений в классе гладких (непрерывно дифференцируемых) функций. Плотность и скорость могут иметь разрывы на поверхности, разделяющей две сонаправленные газовые струи с одинаковым давлением. В сверхзвуковых течениях могут существовать поверхности слабых разрывов (разрывы производных без разрыва параметров) и скачки уплотнения – поверхности, после пересечения которых течение становится дозвуковым. Представление о поверхностях вводится, чтобы не рассматривать зоны течений, являющиеся тонкими слоями порядка средней длины свободного пробега молекул с большими градиентами гидродинамических параметров. Дело в том, что для идеального (роль диффузии молекул пренебрежимо мала, вязкость и теплопроводность считаются равными нулю) уравнения Эйлера учитывают только конвективный перенос и поэтому не позволяют исследовать структуру узких переходных зон в рамках гладких функций. Представление о поверхностях оправдывается тем, что во многих задачах толщина этих слоев пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами области течения, и ее можно считать равной нулю, рассматривая упомянутые слои как поверхности разрыва. Чтобы учесть возможность присутствия в решениях поверхностей разрыва, решения ищутся в наиболее простом для применения математического анализа классе негладких функций – в классе кусочно-гладких функций. Во всех точках течения, в том числе и на поверхностях разрывов, должны соблюдаться законы сохранения массы, импульса и энергии. В зонах

гладкости для идеального газа эти законы равносильны уравнениям Эйлера, уравнению неразрывности и уравнению состояния для движущихся макрочастиц газа. Считается, что разрывы могут располагаться только на конечном количестве кусочно-гладких поверхностей. И хотя этот класс не исчерпывает всех возможных с точки зрения математики расположений точек разрыва, дальнейшего ослабления гладкости до сих пор не требовалось. Именно такие решения рассматриваются в ставших классическими учебниках и монографиях [1–4]. Причина этого так объяснена Л. И. Седовым: «Снятие требования непрерывности и допущение о кусочной гладкости искомым решений обеспечивает при соответствующей постановке задачи существование и единственность решения. Получающиеся разрывные решения могут хорошо соответствовать реальным эффектам, наблюдаемым на практике» [5, гл. VII]. Таким образом, рассмотрение течений в классе кусочно-гладких функций соответствует широкому классу практически важных задач газовой динамики.

Исследование общих свойств течений газа в классе кусочно-гладких функций предполагает возможность наличия разрывов давления, плотности и скорости (p , ρ , \mathbf{V}) или разрывов их производных во внутренних точках течения. В постановках соответствующих краевых задач ни количество разрывов, ни места их расположения заранее не указаны и должны быть определены в процессе решения. В этой связи следует упомянуть доказанную в настоящее время гипотезу Буземанна – Гудерлея – Франкля о том, что гладкое околоразрывное течение вокруг произвольного профиля невозможно [2, гл. V]; в таком течении обязательно будет поверхность разрыва.

При исследовании течений жидкости и газа нередко прибегают к использованию физических соображений. С одной стороны, результат, полученный с использованием физических соображений, зачастую значительно превосходит результаты не только математиков, опирающихся на известные закономерности, но превосходит и результаты очень опытных физиков, которые понимают сложность задачи и не осмеливаются утверждать, что им априори понятна физическая картина явления. Но если интуиция подведет, то такой результат может оказаться ошибочным. Поэтому использование физических соображений, относящихся, как правило, к специфичной именно для рассматриваемой задачи ситуации, впервые сформулированных по ходу исследования и не прошедших широкого обсуждения, представляется недопустимым. При этом некоторые физические соображения, не содержащиеся в сформулированных известных законах, давно подтверждены правильностью выводов, которые получены с их использованием, и требуют лишь формализации. На такие физические соображения вполне допустимо опираться при исследованиях. Речь идет о физических допущениях, проверенных практикой и апробированных известными учеными.

В статье предпринята попытка собрать воедино все предположения о свойствах разрывных плоских стационарных течений газа: и сформулированные в учебниках [1–5], и не сформулированные в доступной литературе, но фактически уже давно эффективно используемые, предположения. Кроме того, для плоского стационарного течения физически обоснованы и сформулированы некоторые новые предположения (они касаются вопросов гладкости параметров течения и линий разрывов). Все эти свойства (известные и предложенные в статье) сформулированы ниже в виде гипотезы непрерывной сплошной среды для плоских стационарных течений идеального совершенного газа. Подчеркнем, что речь идет именно о предположениях (о моделях), а не о различных теоремах газовой динамики, которые доказаны, например, на основе уравнений Эйлера и предположения о сохранении энтропии на линиях тока (в зонах гладких параметров течения). Речь идет о самих уравнениях Эйлера и о различных физически обоснованных свойствах, на основе которых доказываются подобные теоремы. Поэтому среди положений гипотезы отсутствуют, например, теоремы Гельмгольца, Никольского – Таганова [6], дозвуковой принцип максимума скорости и другие известные утверждения, которые являются следствиями уравнений Эйлера и физически обоснованных утверждений. Гипотеза сформулирована таким образом, чтобы

для обоснованности выкладок и рассуждений при решении задач и при теоретических исследованиях можно было опираться на положения гипотезы, а не манипулировать физическими соображениями по ходу исследования. Это позволит привлечь к исследованиям математиков, что является одной из главных целей данной статьи. Гипотеза представлена для обсуждения, и, возможно, некоторые ее положения будут изменены в будущем. При этом, как представляется, причиной для внесения изменений в гипотезу будет не сомнительность того или иного положения, а избыточность или недостаточность положений гипотезы для математического (без привлечения дополнительных физических соображений) исследования плоских течений газа.

В качестве примера состоятельности гипотезы с ее использованием были рассмотрены краевые задачи, в которых решения ищутся в классе кусочно-гладких функций (то есть допускается наличие разрывов), но, в силу положений гипотезы, существование разрывов становится невозможным при надлежащем выборе граничных условий. Интерес к таким течениям вызван тем, что уравнения Эйлера выполняются во всех точках, и известные математические теоремы из теории уравнений в частных производных (например принципы максимума) позволяют делать интересные выводы об общих свойствах таких течений. В результате использования положений гипотезы (без привлечения дополнительных физических соображений) получено достаточное условие невозможности существования разрывов в течениях, происходящих в плоских каналах.

2. Гипотеза непрерывной сплошной среды для плоских стационарных течений идеального совершенного газа

Прежде чем сформулировать гипотезу, напомним о некоторых положениях, которые уже давно де-факто являются общепризнанными. Свойство кусочной гладкости гидродинамических параметров постоянно упоминается и используется во всей классической литературе. Условия сохранения массы, импульса и энергии при протекании вещества через поверхность разрыва или равенство давлений на разных сторонах тангенциального разрыва четко указаны в [1–5]. Иначе обстоит дело с непрерывностью вторых производных. Речь идет о предположении, которое де-факто используется, но обычно не оговаривается. Оно состоит в том, что в области гладкости (области непрерывности первых производных) вторые производные также считаются непрерывными. Однако есть одно отличие. Если кусочная гладкость предполагает возможность непрерывного продолжения производных из зоны гладкости на соответствующую сторону поверхности разрыва, то непрерывность вторых производных гидродинамических параметров касается только гладких участков поверхностей разрыва. Предположение о непрерывности вторых производных внутри областей гладкости подтверждается тем, что оно позволяет объяснить некоторые экспериментально наблюдаемые явления, а также тем, что оно эффективно используется в численных методах. Приведем четыре примера.

Первый пример. В [2, гл. II] объяснено, почему компоненты скорости безвихревого дозвукового стационарного течения ($M < 1$, M – число Маха) сжимаемой жидкости принимают свои наибольшие значения на границе области течения (дозвуковой принцип максимума модуля скорости). Объяснение основано на теореме Хопфа [7, 8] и поэтому предполагает непрерывность вторых производных компонент скорости.

Второй пример. В статье [9] получено необходимое условие существования внутренних звуковых точек для плоских и осесимметричных течений, в которых $M \leq 1$. Оно объясняет тот факт, что если в потоке $M \leq 1$ существует внутренняя звуковая точка, то эта точка лежит на прямой звуковой линии, состоящей из звуковых точек. Эта прямая звуковая линия в каждой точке перпендикулярна скорости газа и не может заканчиваться внутри потока. В [10] это свойство названо «свойством прямолинейности» и было использовано для построения плоских и осесимметричных конфигураций с максимально возможным критическим

числом Маха M^* . Доказательство свойства прямолинейности существенным образом опирается на предположение о непрерывности вторых производных компонент скорости, хотя специально в [9] не оговаривается.

Третий пример. Как в стационарном, так и в нестационарном безвихревом течении несжимаемой жидкости давление не может достигать своего минимума во внутренних точках течения. Это показано, например в [4, гл. 6], чтобы объяснить, почему кавитация зарождается именно на поверхности обтекаемых тел. Для соответствующего доказательства недостаточно гладкости или существования вторых производных. Достаточным условием для обоснованности доказательства является непрерывность вторых производных давления.

И наконец, *четвертый* самый известный пример. Теоремы Гельмгольца о вихрях лежат в основе известного и проверенного на практике численного метода дискретных вихрей [11–14]. При доказательстве теорем Гельмгольца используется факт равенства нулю ротора от градиента давления. И снова достаточным условием для обоснованности доказательства является непрерывность вторых производных давления.

С математической точки зрения из кусочной гладкости не следует существование и тем более кусочная непрерывность вторых производных. Например, первообразная функции Ван-дер-Вардена [15, гл. XII] непрерывно дифференцируема, и при этом ни в одной точке она не имеет второй производной. Поэтому утверждение о существовании и непрерывности вторых производных в областях, где существуют и непрерывны первые производные, следует считать еще одной общепризнанной гипотезой, наряду с предположением о кусочной гладкости.

Рассмотрим плоское стационарное дозвуковое течение без точек торможения. В таком течении не может быть точек, в которых давление и плотность равны нулю. Действительно, в стационарных течениях могут существовать два типа зон. В зонах первого типа частицы газа (не молекулы, а макрочастицы) находятся конечное время. Соответствующие этим частицам линии тока начинаются и заканчиваются на границах течения. Для таких частиц пренебрежение диффузией молекул оправдывается конечным временем процесса. В зонах второго типа частицы газа, вообще говоря, движутся, но все время остаются в области течения. В связи с неограниченным временем процесса (для стационарных течений) диффузией молекул в таких зонах пренебрегать нельзя. Для дозвуковых течений, по сравнению со сверхзвуковыми течениями, этот эффект выражен сильнее, поскольку в дозвуковом потоке скорость частиц газа ниже средней скорости молекул. По этой же причине нельзя пренебречь диффузией молекул из соседних зон в зону вакуума, которая могла появляться, пока течение устанавливалось. Вакуум не может соседствовать с дозвуковой зоной ненулевой плотности в стационарных дозвуковых течениях. Поэтому среди возможных решений уравнений Эйлера реальности могут соответствовать только те решения, в которых давление и плотность не обращаются в ноль, по крайней мере, во внутренних точках подобластей с гладкими параметрами (p , ρ , \mathbf{V}).

Из лагранжева представления о движении частицы газа следует, что если скорость в точке не равна нулю, то эта точка не может представлять собой одну изолированную точку разрыва, окруженную областью гладких параметров.

Поскольку в данной статье речь идет о плоских течениях, будем говорить не о поверхностях разрыва, а об их проекциях на плоскость течения – о линиях разрыва. Предположение о кусочной гладкости линий разрывов, само по себе, значительно сужает класс вариантов расположения точек разрыва. Однако исходя из физических соображений, можно еще более упростить вид рассматриваемых кривых. Как уже было замечено, разрыв, строго говоря, является не линией, а «размытой» полосой, шириной не менее длины свободного пробега. Площадь полосы не может быть бесконечной, если полоса расположена в ограниченной области течения. Поэтому линию разрыва в ограниченной области можно считать имеющей ограниченную длину. Кроме того, поскольку кривизна полосы ограничена, можно считать,

что если кусочно-гладкая кривая разрыва не замкнута сама на себя, то у нее есть начало и конец с определенными предельными положениями касательных векторов.

Сказанное выше, а также широко известные из учебников положения, обосновывают содержательность рассмотрения плоского стационарного течения идеального совершенного газа при отсутствии внешних сил в следующей постановке, допускающей существование линий разрыва. Ниже используются обозначения: \mathbf{V} – скорость; $\rho > 0$ – плотность; $k > 0$ – показатель адиабаты; p – давление.

3. Гипотеза непрерывной сплошной среды для плоских стационарных течений идеального совершенного газа

Пусть Oxy – произвольная прямоугольная декартова система координат, лежащая в плоскости течения. Ограниченная область течения газа может состоять из объединения не более чем конечного числа подобластей, в каждой из которых гидродинамические параметры p , ρ , \mathbf{V} являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат x и y . Границы всей области течения и границы, разделяющие подобласти, являются кусочно-гладкими линиями. Если область течения ограничена, то все эти линии имеют конечную длину, а кривизна гладких участков ограничена сверху. Параметры p , ρ , \mathbf{V} допускают непрерывное продолжение из внутренних точек на «свою» сторону границы подобласти. На гладкие участки линии разрыва также возможны непрерывные продолжения производных p , ρ , \mathbf{V} . Эти непрерывные продолжения на разных сторонах границы, разделяющей подобласти, вообще говоря, могут не совпадать. Границы, разделяющие подобласти, являются линиями разрыва хотя бы одного из гидродинамических параметров или его первых производных. Если в некоторой области все три параметра p , ρ , \mathbf{V} являются гладкими, т. е. непрерывны вместе со своими первыми производными по координатам x и y , то в этой области существуют и непрерывны вторые производные p , ρ , \mathbf{V} . Плотность и давление во внутренних точках подобластей гладкости не обращаются в ноль. Упомянутые подобласти могут содержаться одна внутри другой или содержать во внутренних точках незамкнутую линию разрыва, не являющуюся границей какой-либо подобласти. Если в течении нет точек торможения, то в упомянутых областях гладкости не может находиться изолированная точка разрыва. Предположение о возможности непрерывного продолжения производных не относится к точкам излома кусочно-гладких линий разрыва. Если кусочно-гладкая кривая разрыва не замкнута сама на себя, то у нее есть начало и конец с определенными предельными положениями касательных векторов.

На любом гладком участке линии разрыва, который пересекается макрочастицами газа, должны быть непрерывны следующие четыре функции, зависящие от параметров p , ρ , \mathbf{V} :

$$V_\tau; \quad \rho V_n; \quad p + \rho V_n^2; \quad \left(\frac{k}{k-1} p + \rho \frac{V_n^2}{2} + \rho \frac{V_\tau^2}{2} \right) V_n,$$

где V_τ и $V_n \neq 0$ – касательная и нормальная к линии разрыва составляющие вектора скорости \mathbf{V} . Если величина $p \cdot \rho^{-k}$ для макрочастицы газа при переходе линии разрыва меняется скачкообразно, то только в сторону увеличения.

Если через гладкий участок линии разрыва не происходит перенос макрочастиц газа ($V_n = 0$), то единственным условием на таком участке является непрерывность давления p .

Движение газа внутри каждой подобласти с гладкими параметрами описывается уравнениями Эйлера, записанными, например, в форме Громеки – Ламба [1]:

$$[\text{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V}] = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right); \quad V = |\mathbf{V}|, \quad (1)$$

уравнением неразрывности [1]

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

и уравнением адиабатического движения частиц газа

$$\mathbf{V} \cdot \nabla (p \cdot \rho^{-k}) = 0. \quad (3)$$

Примером ограниченной (плоской) области, упоминаемой в приведенной формулировке, может быть область течения в плоском канале, ограниченная входным и выходным сечениями, а также стенками канала.

Ниже из этой гипотезы будут получены интересные выводы о линиях разрыва в плоских дозвуковых течениях без точек торможения.

4. Плоские дозвуковые течения без точек торможения

В следующих разделах будут исследованы линии разрыва, расположенные во внутренних точках течения, в котором скорость газа всюду ограничена снизу некоторой положительной константой δ_v и не достигает скорости звука:

$$V \geq \delta_v > 0; \quad (4)$$

$$kp - \rho V^2 > 0. \quad (5)$$

Эти два неравенства являются формальным определением термина «дозвуковое течение без точек торможения».

5. Тангенциальные разрывы

Независимо от того, какой гидродинамический параметр или его производная терпит разрыв, все возможные ситуации разделяются на два типа: есть разрыв плотности или нет.

Если на гладком участке линии разрыва скачкообразно меняется плотность и скорость имеет ненулевую нормальную к этой линии составляющую, то такой разрыв называют скачком уплотнения [1–5]. С одной из его сторон скорость будет выше скорости звука, что противоречит условию (5), и такой разрыв внутри дозвукового течения невозможен. Если же скорость не имеет нормальной к линии разрыва составляющей, то можно привести пример течения с разрывом плотности при соблюдении условий (4) и (5). Это упомянутое во введении дозвуковое течение двух параллельных, имеющих общую поверхность (для плоских течений – общую линию) соприкосновения, однородных потоков газа разной плотности, но одинакового давления. На таких линиях разрыва, в которых скорость не имеет нормальной к линии разрыва составляющей, не исключена возможность разрыва скорости. Но предельные значения вектора скорости с разных сторон линии разрыва, согласно (4), не равны нулю и определяют предельные положения линий тока. Следовательно, если в течении есть линия разрыва плотности и выполнены условия (4) и (5), то на гладком участке этой линии лежат предельные положения линий тока (тангенциальный разрыв). Заметим, что это верно для

разных вариантов разрывности или непрерывности остальных гидродинамических параметров на линии разрыва плотности.

Теперь рассмотрим гладкий участок линии разрыва, на котором плотность непрерывна. При этом никаких предположений о непрерывности p , \mathbf{V} или о непрерывности производных p , ρ , \mathbf{V} делать не будем. Возможны два случая в зависимости от того, равна ли нулю нормальная к линии разрыва составляющая скорости.

Первый случай. Скорость имеет ненулевую нормальную к линии разрыва составляющую. Тогда частицы газа переносят через разрыв массу, импульс и полную энтальпию. Повторяя известные [1–5] выкладки для получения условий на прямых и косых скачках уплотнения, получим, что из непрерывности плотности следует непрерывность давления и вектора скорости. Покажем, что при этом производные гидродинамических параметров также будут непрерывны.

Расположим начало прямоугольной декартовой системы координат Oxy в произвольной внутренней точке гладкого участка рассматриваемой линии разрыва. Ось Ox направим по касательной к этой линии. В силу непрерывности гидродинамических параметров на линии разрыва продолжения их производных по координате x на обе стороны этой линии будут одинаковы в начале координат. Уравнения (1) – (3) также выполнены с обеих сторон от линии разрыва. Если записать их в системе координат Oxy , учитывая непрерывность p , ρ , \mathbf{V} и равенство производных p , ρ , \mathbf{V} по координате x в начале координат, то можно заключить, что в начале координат при переходе через линию разрыва остаются неизменными следующие четыре величины (здесь V_x , V_y – компоненты скорости \mathbf{V}):

$$q_1 = V_y \frac{\partial}{\partial y} V_x; \quad q_2 = V_y \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p; \quad q_3 = V_y \frac{\partial}{\partial y} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial y} V_y; \quad q_4 = \rho V_y \frac{\partial}{\partial y} p - k p V_y \frac{\partial}{\partial y} \rho. \quad (6)$$

Эти равенства задают систему линейных уравнений относительно производных $\frac{\partial}{\partial y} V_x$; $\frac{\partial}{\partial y} V_y$; $\frac{\partial}{\partial y} p$; $\frac{\partial}{\partial y} \rho$. Определитель системы равен $V_y^2 (kp - \rho V_y^2)$. Предположительно скорость имеет ненулевую нормальную к поверхности разрыва составляющую, т. е. $V_y \neq 0$. Кроме того, $V_y^2 \leq V^2$, что вместе с (5) обеспечивает положительность рассматриваемого определителя.

Следовательно, производные $\frac{\partial}{\partial y} V_x$; $\frac{\partial}{\partial y} V_y$; $\frac{\partial}{\partial y} p$; $\frac{\partial}{\partial y} \rho$ однозначно определяются через q_1 ; q_2 ; q_3 и q_4 , а это означает их непрерывность в начале координат. Расположение начала координат было выбрано произвольно, поэтому пространственные производные непрерывны во всех внутренних точках гладкого участка линии. То есть на рассматриваемой линии непрерывны как параметры течения p , ρ , \mathbf{V} , так и их производные. Согласно принятому в конце предыдущего раздела предположению о свойствах разрывных решений, это означает, что на этой линии непрерывны и вторые производные p , ρ , \mathbf{V} . Итак, в рассматриваемых течениях не может быть линий разрывов, на которых плотность непрерывна, а скорость имеет ненулевую нормальную к линии разрыва составляющую.

Второй случай. Плотность непрерывна, а скорость имеет нулевую нормальную к линии разрыва составляющую. В этом случае давление тоже непрерывно [5]. Используем обозначения только что проведенного доказательства. Тогда $V_y = 0$, и определитель

$V_y^2(k\rho - \rho V_y^2)$ системы равен нулю. Поэтому из системы не следует непрерывность производных $\frac{\partial}{\partial y} V_x$ и $\frac{\partial}{\partial y} \rho$. Более того, несложно привести пример стационарного течения со слабым тангенциальным разрывом. Для этого достаточно рассмотреть любое течение с гладкими параметрами p , ρ , \mathbf{V} . Тогда параметры p ; $m^{-2} \cdot \rho$; $m \cdot \mathbf{V}$, где функция m должна быть постоянной вдоль каждой линии тока, также будут удовлетворять уравнениям Эйлера (преобразование Прима [16]). Если выбрать какую-нибудь линию тока γ , то функцию m можно задать так, чтобы она была гладкой по обе стороны от линии γ , непрерывной на самой линии γ и имела бы разрыв нормальной к этой линии производной. Тогда линия γ будет линией слабого тангенциального разрыва параметров p ; $m^{-2} \cdot \rho$; $m \cdot \mathbf{V}$.

В рассмотренном случае (слабые тангенциальные разрывы) из условия $V_y = 0$ и из (4) вытекает, что тангенциальная составляющая скорости отлична от нуля. Поэтому, гладкий участок этой линии лежит на линии тока.

Рассмотрев как линии разрыва плотности, так и линии, на которых плотность непрерывна, приходим к следующему выводу. В стационарных дозвуковых течениях газа без точек торможения возможны только тангенциальные разрывы (нормальная к линии разрыва составляющая скорости равна нулю). При этом гладкие участки линий разрывов представляют собой предельные положения линии тока (для слабых разрывов – сами линии тока).

6. Излом линии разрыва

Продолжим изучение линий разрыва в плоских дозвуковых течениях без точек торможения. Выше были рассмотрены гладкие участки линии разрыва. Но линии разрыва могут быть кусочно-гладкими и иметь точки излома. Оказалось, что в плоских дозвуковых течениях без точек торможения невозможно существование точек излома. Покажем это.

Пусть кусочно-гладкая линия разрыва γ не является гладкой и имеет излом во внутренней точке течения A . К точке A можно «подойти» по линии γ с разных сторон излома. Возможны два случая.

Первый случай. Предельные положения касательных к линии γ при приближении к точке A не совпадают. Тогда с каждой стороны от точки A находится гладкий участок линии γ , представляющий собой тангенциальный разрыв, на котором нормальные составляющие предельных значений скорости равны нулю. Поэтому несовпадение предельных значений углов наклона возможно только в случае, если и тангенциальные составляющие скорости стремятся к нулю при приближении к точке A . Это противоречит условию (4), и рассматриваемый (первый) случай невозможен.

Второй случай. Предельные значения углов наклона при приближении к точке A совпадают, но сама линия разрыва γ в этой точке имеет излом типа «точка возврата», который напоминает график функции $y = \sqrt{|x|}$ вблизи начала координат. Тогда совпадение предельных значений углов наклона не противоречит условию (4). Но этому условию будет противоречить закон сохранения массы с учетом непрерывности и неравенства нулю компонент вектора $\rho \mathbf{V}$ внутри той «узкой» части достаточно малой окрестности точки A , которая вырезана из этой окрестности линией разрыва. Таким образом, этот (второй) случай также невозможен, и если в течении есть линия разрыва и выполнены условия (4) и (5), то эта линия является гладкой и с обеих сторон совпадает с предельными положениями линий тока. Рассматривая равновесие сил, несложно убедиться, что давление на таких линиях разрыва непрерывно [5].

Из невозможности существования изломов и углов на линии разрыва следует, что при соблюдении условий (4) и (5) невозможно также и существование точек, из которых выходят несколько линий разрыва. В частности, на линии разрыва не может быть точки, к которой под углом или по касательной подходит другая линия разрыва.

7. Незамкнутые линии разрыва

Допустим, что линия (тангенциального) разрыва не замкнута и ее начало A находится во внутренней точке течения. Тогда в точке A , как и вдоль всей линии разрыва, выполнено условие (4). Учитывая, что как показано выше, нормальная к линии разрыва скорость равна нулю, в точке A линия тока непрерывного течения разделяется на две предельные линии тока, обтекающие линию разрыва с разных сторон. В отличие от предыдущих разделов, обозначим символом γ не линию разрыва, а всю линию тока. При этом линия разрыва будет являться частью линии γ . Точка A лежит на линии γ и разграничивает участок с гладкими параметрами и участок линии γ , который является линией разрыва. Для определенности будем считать, что жидкая частица сначала движется вдоль γ по участку с гладкими параметрами и затем разделяется на две частицы, движущиеся вдоль «разрывного» участка γ (случай движения частицы в обратном направлении рассматривается аналогично). У разделенных частиц жидкости будут

одинаковы энтропийная функция $p \cdot \rho^{-k}$ и полная энтальпия $h = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$, поскольку

они одинаковы в начале линии разрыва. Вместе с непрерывностью давления на линии тангенциального разрыва это приводит к заключению, что на линии γ не может быть разрывов гидродинамических параметров (не может быть сильных разрывов).

Итак, из предположения о том, что линия разрыва не замкнута и ее начало A находится во внутренней точке течения, следует, что «разрывная» часть линии γ , находящаяся с одной из сторон от точки A , является линией тока и, одновременно, линией слабого тангенциального разрыва; а с другой стороны от точки A – «обычной» линией тока, находящейся в области гладких параметров p , ρ , \mathbf{V} . Докажем, что это невозможно. То есть докажем, что на всей линии γ параметры p , ρ , \mathbf{V} имеют непрерывные пространственные производные. В силу непрерывности этих параметров на линии разрыва, для этого достаточно показать, что непрерывные продолжения их производных с разных сторон линии разрыва совпадают.

Рассмотрим вспомогательное векторное поле – поле касательного к линиям тока вектора $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$. Его непрерывность в точках γ следует из того, что это поле с обеих сторон от линии γ допускает непрерывное продолжение на линию γ и при этом каждое из двух непрерывных продолжений совпадает с касательным вектором к линии γ . Гладкость поля \mathbf{e} вне линии γ следует из гладкости скорости. Покажем, что и на линии γ поле вектора $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ является гладким (непрерывно дифференцируемым). Расположим начало прямоугольной декартовой системы координат Oxy в произвольной точке линии γ . В частности, точка O может совпадать с точкой A . Ось Ox направим по касательной к этой линии. В силу расположения осей системы Oxy , в начале координат O непрерывны производные p , ρ , \mathbf{V} по координате x . Рассуждая как при выводе уравнений (6) и учитывая, что в нача-

ле координат $V_y = 0$, приходим к выводу, что в начале координат O непрерывны следующие производные $\frac{\partial}{\partial y} p$ и $\frac{\partial}{\partial y} V_y$.

Итак, в точке O непрерывны сами гидродинамические параметры (p, ρ, \mathbf{V}), их производные по координате x (в частности $\frac{\partial}{\partial x} V_x$ и $\frac{\partial}{\partial x} V_y$) и две производные по координате y (а именно, $\frac{\partial}{\partial y} p$ и $\frac{\partial}{\partial y} V_y$). Осталось показать, что непрерывны $\frac{\partial}{\partial y} V_x$ и $\frac{\partial}{\partial y} \rho$.

Поскольку $e_y = V_y / \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} e_y = (V_x^2 + V_y^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} V_y - (V_x^2 + V_y^2)^{-\frac{3}{2}} \left(V_y^2 \frac{\partial}{\partial y} V_y + V_y V_x \frac{\partial}{\partial y} V_x \right). \quad (7)$$

В правой части этого равенства в точке O непрерывны все величины, кроме, может быть, $\frac{\partial}{\partial y} V_x$. Однако эта производная в выражении (7) умножена на величину V_y , которая стремится к нулю при приближении к точке O . Учитывая ограниченность предельного значения $\frac{\partial}{\partial y} V_x$, получаем, что оба предельных значения $\frac{\partial}{\partial y} e_y$ в точке O одинаковы и конечны (речь идет о пределах с разных сторон линии γ). Поэтому производная $\frac{\partial}{\partial y} e_x$ непрерывна в точке O .

Вне линии γ компоненты e_x и e_y непрерывно дифференцируемы и верно тождество $e_x^2 + e_y^2 = 1$. Из этого тождества следует дифференциальное равенство: $e_x \frac{\partial}{\partial y} e_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} e_y = 0$. При приближении к точке O компонента e_x стремится к единице, а компонента e_y – к нулю. Поэтому из конечности предела $\frac{\partial}{\partial y} e_y$ и из упомянутого дифференциального равенства следует, что $\frac{\partial}{\partial y} e_x$ стремится к нулю при приближении к точке O по любой линии, не пересекающей линию γ . Следовательно, производная $\frac{\partial}{\partial y} e_x$ непрерывна в точке O .

Далее, поскольку $e_x = V_x / \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} e_x = (V_x^2 + V_y^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} V_x - (V_x^2 + V_y^2)^{-\frac{3}{2}} \left(V_x V_y \frac{\partial}{\partial y} V_y + V_x^2 \frac{\partial}{\partial y} V_x \right). \quad (8)$$

С учетом конечности предельного значения $\frac{\partial}{\partial y}V_x$, равенства $V_y = 0$ и только что доказанной непрерывности $\frac{\partial}{\partial y}e_x$ из (8) следует, что производная $\frac{\partial}{\partial y}V_x$ будет непрерывна в точке O . Что касается непрерывности в точке O производных $\frac{\partial}{\partial x}e_x$ и $\frac{\partial}{\partial x}e_y$, то она следует из непрерывности $\frac{\partial}{\partial x}V_x$ и $\frac{\partial}{\partial x}V_y$ и из выражений для $\frac{\partial}{\partial x}e_x$ и $\frac{\partial}{\partial x}e_y$, аналогичных (7) и (8).

Расположение начала координат было выбрано произвольно. Поэтому пространственные производные e_x и e_y непрерывны во всех точках линии γ , кроме, может быть, точки A . Следовательно, поле касательного к линиям тока вектора $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ является гладким (непрерывно дифференцируемым).

Теперь покажем, что внутренняя точка A не может разделять линию тока так, что с одной стороны от точки A эта линия является линией слабого тангенциального разрыва; а с другой стороны от точки A «обычной» линией тока, находящейся в области гладких параметров p, ρ, \mathbf{V} . Воспользуемся гладкостью поля $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ в некоторой окрестности точки A . Во-первых, гладкость $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ и тот факт, что $|\mathbf{e}| = 1 \neq 0$, позволяет ввести в некоторой окрестности $U(A)$ ортогональную систему естественных координат Asn с началом в точке A так, чтобы равенства вида $n = \text{const}$ задавали бы линии тока, а равенства вида $s = \text{const}$ задавали бы линии, ортогональные линиям тока. При этом линия γ задается равенством $n = 0$. Во-вторых, в силу гладкости поля единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ гладкость величин p, ρ, \mathbf{V} в какой-либо точке равносильна гладкости в этой точке функций $p = p(s, n)$; $\rho = \rho(s, n)$ и компонент вектор-функции $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s, n)$, записанных в системе координат Asn .

Для определенности будем считать, что точки линии γ при $s < 0$ лежат в области гладких параметров p, ρ, \mathbf{V} . Тогда, согласно (3), в этой области будет гладкой энтропийная функция $C = p \cdot \rho^{-k}$. В системе координат Asn эта функция зависит только от одной координаты: $C = C(n)$. Поэтому гладкость $C = p \cdot \rho^{-k}$ равносильна непрерывности $\frac{d}{dn}C(n)$ в окрестности точки $n = 0$. Энтропийная функция постоянна вдоль линий тока. Поэтому вид функции $C = C(n)$ одинаков при всех значениях координаты s в рассматриваемой окрестности точки A . Следовательно, энтропийная функция является гладкой и с другой стороны от точки A , т. е. в точках линии γ при $s \geq 0$. Из гладкости давления p и из гладкости функции $C = p \cdot \rho^{-k}$ следует гладкость плотности ρ .

Чтобы показать, что при $s \geq 0$ линия γ не является слабым тангенциальным разрывом, осталось показать гладкость скорости, которая в системе координат имеет компоненты $V_s \neq 0$ и $V_n \equiv 0$. Гладкость $V_n \equiv 0$ очевидна. В силу непрерывности V_s на линии γ , на этой линии будет непрерывна и $\frac{d}{ds}V_s$. Доказательство непрерывности $\frac{d}{dn}V_s$ можно построить аналогично доказательству гладкости плотности, используя уже доказанный факт гладкости

ρ и свойство, следующее из (1) и (3), состоящее в том, что полная энтальпия $h = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}$ зависит только от одной координаты: $h = h(n)$. Приводить это доказательство представляется излишним.

Таким образом, в плоских дозвуковых течениях без точек торможения незамкнутые линии сильных и слабых разрывов не могут заканчиваться во внутренних точках течения и, если область течения ограничена, обязательно достигают его границы.

8. Замкнутые линии разрыва

Рассмотрим замкнутые линии разрывов. Они ограничивают подобласти с гладкими параметрами. Внутри подобласти течения с гладкими параметрами может содержаться «вырез» – другая подобласть с аналогичными свойствами. В «вырезе» может содержаться следующий «вырез» и так далее. Но поскольку количество таких «вырезов» конечно, существует односвязная область G_1 , не содержащая «вырезанной» подобласти. Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy с началом внутри области G_1 . Зададим в замыкании области G_1 функцию

$$\psi(x_1, y_1) = \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} \rho V_y dx - \rho V_x dy,$$

где интегрирование ведется по произвольной кривой, расположенной внутри G_1 и соединяющей точку (x_1, y_1) с началом координат $(0,0)$. Такое задание функции ψ корректно, поскольку область G_1 односвязна, а интеграл, в силу уравнения неразрывности и формулы Грина, не зависит от пути интегрирования.

На границе ∂G_1 (непрерывное) продолжение скорости ни в одной точке не обращается в ноль, так как иначе было бы нарушено условие (4). Это непрерывное продолжение скорости является касательным вектором к границе ∂G_1 . По построению функции ψ , ее градиент перпендикулярен вектору \mathbf{V} . Поэтому градиент ψ перпендикулярен границе ∂G_1 во всех ее точках. То есть функция ψ имеет постоянное значение на ∂G_1 . Это значит, что в G_1 существует внутренняя точка, в которой обе пространственные производные функции ψ равны нулю. Учтем, что производные этой функции с точностью до знака являются компонентами вектора $\rho \mathbf{V}$. Согласно «гипотезе», плотность во внутренней точке подобласти с гладкими параметрами не может обращаться в ноль. Следовательно, во внутренней точке области G_1 есть точка нулевой скорости. Это противоречит условию (4).

Полученное противоречие означает невозможность существования в плоских дозвуковых течениях без точек торможения замкнутой линии разрыва, расположенной внутри односвязной области течения.

9. Достаточное условие невозможности существования разрывов при течении газа в канале

Выше показано, что в плоских дозвуковых течениях без точек торможения, происходящих в ограниченных односвязных областях, линии разрывов обязательно достигают границы. Если рассмотреть течения в плоских каналах с гладкими стенками, то часть границы,

совпадающая со стенками, является линией тока. Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в разделе 4 (о невозможности изломов), приводят к заключению, что линии разрыва не могут достигать стенок канала.

Таким образом, достаточным условием отсутствия разрывов при дозвуковом течении без точек торможения в плоском односвязном канале является отсутствие сильных и слабых разрывов во входном и выходном сечениях.

Полезность этого вывода состоит, в частности, в правомочности применения к такому течению дозвукового принципа максимума скорости [2], признака наличия точек торможения [17] и принципа максимума давления [18]. Эти три свойства верны при условии непрерывности вторых производных, что обеспечивается, как показано выше, отсутствием разрывов.

10. Заключение

Проведен анализ полных уравнений Эйлера плоского стационарного течения идеального совершенного газа, которое может быть вихревым, а энтропия может быть различной на различных линиях тока. Кроме того, в течении допускается существование линий сильных и слабых разрывов. Обоснована содержательность рассмотрения таких течений в постановке, которая названа гипотезой непрерывной сплошной среды для плоских стационарных течений идеального совершенного газа. На основе положений этой гипотезы показано, что достаточным условием отсутствия разрывов при дозвуковом течении без точек торможения в плоском канале является отсутствие сильных и слабых разрывов во входном и выходном сечениях.

Благодарность

Автор выражает проф. А.Л. Стасенко (ЦАГИ) и доценту Г.Б. Сизых (МФТИ) за обсуждение гипотезы и полезные замечания.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 208 с.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М. : Физматгиз, 1963. – 584 с.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М. : Мир, 1973. – 760 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2-х т. – М. : Наука, 1983.
6. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. – 1946. – Т. 10, вып. 4. – С. 481–502.
7. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. – 1927. – Vol. 19. – P. 147–152.
8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М. : Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.
9. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I // J. Rat. Mech. and Analysis. – 1954. – Vol. 3, no. 2. – P. 209–230.
10. Kraiko A. N. Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical mach number // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1987. – Vol. 51, iss. 6. – P. 723–730. – DOI: 10.1016/0021-8928(87)90131-6.

11. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // P. Roy. Soc. Lond. – 1931. – A134. – P. 170–192.
12. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
13. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice. – Cambridge University Press, 2000. – 320 p.
14. Gutnikov V. A., Lifanov I. K., Setukha A. V. Simulation of the Aerodynamics of Buildings and Structures by Means of the Closed Vortex Loop Method // Fluid Dynamics. – 2006. – Vol. 41, no. 4. – P. 555–567. – DOI: 10.1007/s10697-006-0073-4.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. II – М. : Физматлит, 2001. – 864 с.
16. Munk M., Prim R. On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1947. – Vol. 33. – P. 137–141.
17. Сизых Г. Б. Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // Труды МФТИ. – 2015. – Т. 7, № 2 (26). – С. 108–112.
18. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Экстремальные свойства давления в плоских дозвуковых течениях // Труды МФТИ. – 2016. – Т. 8, № 4 (32). – С. 149–154.

Received: 10.06.2019

Revised: 28.06.2019

Accepted: 28.06.2019

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.041-051

EVOLUTION OF THE STRUCTURE OF TIN BRONZE AND COPPER AFTER DYNAMIC COMPRESSION BY THE KOLSKY METHOD USING A SPLIT HOPKINSON PRESSURE BAR

A. V. Stolbovsky^{1, a)*}, V. V. Popov^{1, 2, b)}, R. M. Falakhutdinov^{1, c)}, S. A. Murzinova^{1, d)},
E. V. Shorokhov³, Z. I. Zavyalov³, A. A. Degtyarev³

¹M.N. Miheev Institute of Metal Physics, UB RAS, 18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation

²Ural State University of Economics, 62 8-Marta St., Ekaterinburg, 620144, Russian Federation

³Russian Federal Nuclear Center – VNIITF, Snezhinsk, Russian Federation

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;

^{b)}  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;

^{c)}  <http://orcid.org/0000-0001-8505-9455>  falahutdinov@imp.uran.ru;

^{d)}  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: stolbovsky@imp.uran.ru

Address for correspondence: 18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 378 35 74; fax: (343) 374 52 44

The effect of high-speed dynamic compression on the structure and mechanical properties of low-alloyed tin bronze in different initial states (coarse-grained, with additional annealing, and cast, obtained by spun casting) and commercially pure copper of the M1 standard is investigated. The results obtained show that the dynamic compression of tin bronze samples in the coarse-grained initial state causes intensive twinning starting from a strain rate of $2.6 \cdot 10^3 \cdot \text{s}^{-1}$. At relatively low deformation rates, the dynamic compression of samples in the initial cast state promotes an increase in their strength characteristics, whereas, with a further strain rate increase, the development of relaxation processes is observed. However, additional homogenization annealing decreases the probability of relaxation processes under loading, which results in the highest possible mechanical characteristics. The studies of the M1 commercially pure copper have shown that variations in the deformation rate much less affect the properties than in case of bronze, and their values are lower due to relaxation processes both under loading and after deformation.

Keywords: plastic deformation, high-speed deformation, grain boundaries, thermal stability, dynamic compression, Kolsky method, split Hopkinson pressure bar, tin bronze, copper.

Acknowledgments

The work was performed within the framework of the state assignment from the Russian Ministry of Education and Science (theme Function, state registration number AAAA-A19-119012990095-0) and supported by the UB RAS Basic Research Program (project No. 18-10-2-37).

References

1. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N. Structure and Thermal Stability of Tin Bronze Nanostructured by High Pressure Torsion. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 5, pp. 118–132. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.118-132. Available at: http://dream-journal.org/issues/2015-5/2015-5_52.html (accessed: 30.10.2017).

2. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Falahutdinov R.M. Effect of Severe Plastic Deformation by High-Pressure Torsion on the Structure and Properties of Copper and Tin Bronze. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 5, pp. 13–22. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.5.013-022. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-5/2017-5_144.html (accessed: 09.07.2018).
3. Khomskaya I.V., Zel'dovich V.I., Shorokhov E.V., Frolova N.Yu., Zhgilev I. N., Kheifets A.E. Structure Formation in Copper during Dynamic Channel Angular Pressing. *Phys. Met. Metallogr.*, 2008, vol. 105, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.1134/S0031918X08060094.
4. Shorokhov E.V., Zhgilev I.N., Khomskaya I.V., Brodova I.G., Zel'dovich V.I., Gunderov D.V., Frolova N.Yu., Gurov A.A., Oglezneva N.P., Shirinkina I.G., Kheifets A.E., Astaf'ev V.V. High Speed Deformation of Metallic Materials Using Channel Angular Pressing for Producing an Ultrafine Grained Structure. *Russ. Metall. (Metally)*, 2010, no. 4, pp. 323–327. DOI: 10.1134/S0036029510040142.
5. Khomskaya I.V., Zel'dovich V.I., Kheifets A.E., Frolova N.Yu., Dyakina V.P., Kazantsev V.A. Evolution of the Structure upon Heating of Submicrocrystalline and Nanocrystalline Copper Produced by High Rate Deformation. *Phys. Met. Metallogr.*, 2011, vol. 111, no. 4, pp. 367–374. DOI: 10.1134/S0031918X11030070.
6. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Falahutdinov R.M., Shorokhov E.V. Specific features of strain behavior of bronzes under dynamic channel-angular pressing. *International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2016, no. 11–5, pp. 858–863. (In Russian).
7. Petrova A.N., Brodova I.G., Razorenov S.V. Strength properties and structure of a submicrocrystalline Al–Mg–Mn alloy under shock compression. *Phys. Met. Metallogr.*, 2017, vol. 118, no. 6, pp. 601–607. DOI: 10.1134/S0031918X17060072.
8. Garkushin G.V., Ivanchikhina G.E., Razorenov S.V., Ignatova O.N., Kaganova I.I., Malyshev A.N., Podurets A.M., Rayevskii V.A., Skokov V.I., Tyupanova O.A. Mechanical properties of grade M1 copper before and after shock compression in a wide range of loading duration. *Phys. Met. Metallogr.*, 2011, vol. 111, no. 2, pp. 197–206. DOI: 10.1134/S0031918X11010170.
9. Kolsky H. An investigation of the mechanical properties of material at very high rates of loading. In: *Proc. Phys. Soc.*, London, 1949, vol. 62B, pp. 676–700.
10. Gallagher P.C.J. The influence of the alloying, temperature and related effects on the stacking fault energy. *Met. Trans.*, 1970, vol. 1, no. 9, pp. 2429–2461.
11. Liu D., Miller A., Aust K.T. Annealing twin formation in a cast and annealed Cu-4 at-percent Sn alloy. *Canad. Met. Quart.*, 1984, vol. 23, no. 2, pp. 237–240.
12. Rodionova L.A., Popova E.N., Sudareva S.V., Vorob'eva A.E., Dergunova E.A., and Shikov A.K. Structure and mechanical properties of alloyed bronze matrix in Nb3Sn-based superconducting composites. *Phys. Met. Metallogr.*, 1992, no. 73, pp. 71–77.
13. Popova E.N., Rodionova L.A., Sudareva S.V., Romanov E.P., Khlevova N.E., and Chukin A.M. Influence of different deformation techniques on the structure of bronze matrix in multifilamentary Nb3Sn composites. *Phys. Met. Metallogr.*, 1993, no. 76, pp. 228–234.
14. Popov V.V., Stolbovsky A.V., Popova E.N., Pilyugin V.P. Structure and thermal stability of Cu after severe plastic deformation. *Defect and Diffusion Forum*, 2010, vols. 297–301, pp. 1312–1321. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1312.

Подана в журнал: 10.06.2019
УДК 669.3'6:539.89:539.25
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.041-051

ЭВОЛЮЦИЯ СТРУКТУРЫ ОЛОВЯНИСТОЙ БРОНЗЫ И МЕДИ ПОСЛЕ ДИНАМИЧЕСКОГО СЖАТИЯ ПО МЕТОДУ КОЛЬСКОГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРЕЗНОГО СТЕРЖНЯ ГОПКИНСОНА

А. В. Столбовский^{1, а)*}, В. В. Попов^{1, 2, б)}, Р. М. Фалахутдинов^{1, в)}, С. А. Мурзинова^{1, г)},
Е. В. Шорохов³, З. И. Завьялов³, А. А. Дегтярев³

¹Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620108, Российская Федерация
²ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»,
г. Екатеринбург, Российская Федерация
³Российский Федеральный Ядерный Центр – ВНИИ технической физики,
г. Снежинск, Российская Федерация

а)  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;
б)  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;
в)  <http://orcid.org/0000-0001-8505-9455>  falahutdinov@imp.uran.ru;
г)  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: stolbovsky@imp.uran.ru
Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 378–35–74; факс: (343) 374–52–44

Исследовано влияние высокоскоростного динамического сжатия на структуру и механические свойства низколегированной оловянистой бронзы в различном исходном состоянии (крупнокристаллическое, с дополнительным отжигом, и литое, полученное посредством центробежного литья) и меди технической чистоты стандарта М1. Полученные результаты показывают, что динамическое сжатие образцов оловянистой бронзы в крупнокристаллическом исходном состоянии приводит, начиная со скорости деформирования $2,6 \cdot 10^3 \cdot \text{с}^{-1}$, к интенсивному развитию двойникования. В то же время при относительно небольших скоростях деформации динамическое сжатие образцов в исходном литом состоянии способствует повышению прочностных характеристик, а при дальнейшем повышении скорости деформации – к развитию релаксационных процессов. Однако дополнительный гомогенизирующий отжиг снижает вероятность протекания релаксационных процессов при нагружении, чем способствует получению максимально возможных механических характеристик. Испытания технической чистой меди М1 показали, что изменение скорости деформации значительно слабее влияет на свойства, чем в случае бронзы, и их значения ниже вследствие протекания релаксационных процессов как во время нагружения, так и после деформирования.

Ключевые слова: пластическая деформация, высокоскоростное деформирование, границы зерен, термическая стабильность, динамическое сжатие, метод Кольского, разрезной стержень Гопкинсона, оловянистая бронза, медь.

1. Введение

Эволюция структуры металлических материалов при пластическом деформировании различными методами является объектом многочисленных исследований. В настоящее время детально исследованы и качественно описаны процессы эволюции структуры низколегированных оловянистых бронз при пластической деформации статическими методами [1–2]. В последнее время появились исследования структуры металлов и сплавов, подвергнутых

новому методу высокоскоростного деформирования – динамическому канально-угловому прессованию (ДКУП) [3–6]. Наряду с изучением возможности формирования нанокристаллической структуры методами интенсивной пластической деформации важной задачей при высокоскоростном деформировании является прогнозирование влияния высокоскоростных ударов, взрыва или других импульсных воздействий на структуру и свойства конструкционных материалов и изделий из них [7]. Несмотря на то, что изучение поведения материалов в условиях ударно-волнового нагружения является крайне важной научной и практической задачей, имеющиеся данные по этой проблеме немногочисленны, а полученные результаты неоднозначны [8].

В настоящей работе была поставлена задача расширить знания о влиянии высокоскоростного деформирования при воздействии импульсных нагрузок на низколегированную оловянистую бронзу и медь технической чистоты, чтобы оценить, насколько легирование меди 1 % Sn влияет на свойства материала. Кроме того, была поставлена задача исследовать влияние исходного состояния низколегированной оловянистой бронзы (крупнокристаллическое, с дополнительным отжигом, и литое, полученное посредством центробежного литья) на последующее динамическое воздействие.

2. Материал и методика исследования

Для исследований использовалась оловянистая бронза, полученная методом сплавления меди технической чистоты стандарта М1 с присадкой олова в количестве 1 % по массе, а также непосредственно медь технической чистоты, соответствующей требованиям стандарта М1. В табл. 1 представлен химический состав оловянистой бронзы.

Таблица 1 – Химический состав оловянистой бронзы Cu-1Sn, вес. %

Sn	Pb	Fe	Si	Ni	Zn	Bi
1,05	~ 0,01	~ 0,001	< 0,001	~ 0,001	< 0,001	< 0,001

Геометрические размеры образцов находились в пределах от 3 до 5 мм по высоте и от 6 до 10 мм в диаметре. Деформирование проводилось в условиях динамического сжатия по методу Кольского с использованием разрезного стержня Гопкинсона (РСГ) [9] при скоростях деформации $2 - 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$. Схема экспериментов по нагружению образцов приведена на рис. 1.

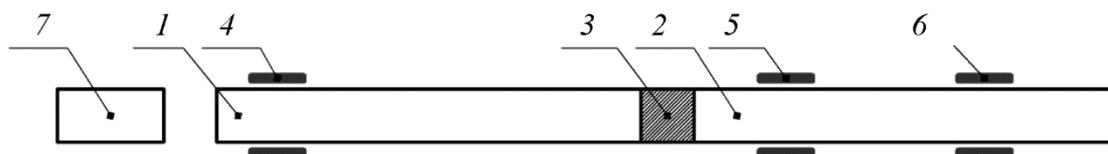


Рис. 1. Схема установки для динамических испытаний образцов:
1, 2 – нагружающий и опорный стержни соответственно; 3 – образец;
4, 5, 6 – тензодатчики; 7 – ударник

Импульсная нагрузка в нагружающем стержне создавалась ударником из высокопрочной стали, разгоняемым с помощью газовой пушки. В качестве нагружающего и опорного (мерных) стержней использовались стержни из высокопрочной стали. В опытах регистрировали импульсы деформации в нагружающем и опорном стержне с помощью тензорных датчиков.

В соответствии с теорией [9], при выводе соотношений для расчета напряжения σ и деформации ε образца предполагается, что поскольку он имеет малую длину, а время прохождения волны по длине образца существенно меньше длительности нагружающего им-

пульса, то напряженно-деформированное состояние образца близко к однородному. Поэтому процесс упругопластического деформирования образца подобен квазистатическому, но протекающему с высокими скоростями деформации (до $\sim 10^4 \text{ c}^{-1}$).

Параметрические зависимости $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$ в образце определялись на основе экспериментальных записей упругой деформации в нагружающей $\varepsilon_I(t)$ и проходящей $\varepsilon_T(t)$ волнах напряжения (соответственно, в нагружающем и опорном стержнях) по следующим формулам [9]:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{EA}{A_s^0} [\varepsilon_T(t)]; \\ \varepsilon(t) &= \frac{2C}{L_0} \int_0^t [\varepsilon_I(t) - \varepsilon_T(t)] \cdot dt; \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \frac{2C}{L_0} (\varepsilon_I(t) - \varepsilon_T(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где A_s^0 – исходная площадь поперечного сечения образца; A – площадь поперечного сечения мерных стержней; E – модуль упругости материала мерных стержней; C – скорость продольных волн в стержнях; L_0 – первоначальная длина образца.

Все образцы были получены центробежным литьем и поделены на две группы: группа I – оловянистая бронза с крупнокристаллической структурой (размером кристаллитов около 1 мм), с дополнительным отжигом и без дополнительного отжига, группа II – крупнокристаллическая медь М1. Сводная таблица образцов, подвергнутых динамическим испытаниям по методу Кольского, представлена в табл. 2.

Таблица 2 – Сводная таблица образцов, подвергнутых испытаниям по методу Кольского

№	Группа	Материал образца	Наличие предварительного отжига
1	I	Cu-1 % Sn	Отсутствует
2			– « –
3			Выполнен
4	II	M1	Отсутствует
5			– « –
6			– « –

Образцы подвергали сжатию на установке РСГ при различных скоростях деформации, которые регулировали начальной скоростью полета ударника, что позволило получить условия деформирования в интервале скоростей деформации $(2\div 5) \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$.

Измерение микротвердости материала после динамического сжатия проводили на приставке к оптическому микроскопу Neophot-21 при нагрузке, эквивалентной 40 г, по методике, описанной в работе [1]. Микроструктуру изучали на этом же микроскопе.

3. Результаты исследования и их обсуждение

В первую группу вошли образцы оловянистой бронзы в крупнокристаллическом состоянии с размером кристаллитов в диапазоне 0,3–1 мм и микротвердостью 970 ± 60 МПа.

На образце 3 был дополнительно проведен гомогенизирующий отжиг для определения его влияния на результат последующего импульсного нагружения. Этот отжиг не произвел существенного влияния на исходные параметры микроструктуры и микротвердость, значение которой в образце 3 составляет 960 ± 40 МПа. Можно отметить, что в отожженном образце зеренная структура несколько более равномерная по размерам, а кроме того, появляются редкие двойники отжига – тонкие, прямые и одиночные.

Необходимо отметить, что во всех образцах состава Cu-1 % Sn наблюдалась газовая пористость, связанная, по-видимому, с технологией получения образцов методом сплавления меди технической чистоты стандарта М1 с присадкой олова. Средний размер газовых пор составлял 9 ± 5 мкм.

Степень и скорость деформации, динамический условный предел текучести, временное сопротивление разрушению и микротвердость образцов группы I приведены в табл. 3. Условный предел текучести и временное сопротивление разрушению были определены на основании диаграмм напряжение-деформация, полученных на установке РСГ.

Таблица 3 – Механические свойства образцов сплавов Cu-1 % Sn (группа I)

№	Материал образца	ε , %	$\dot{\varepsilon}$, $10^3 \cdot \text{с}^{-1}$	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	H, МПа
1	Cu-1 % Sn	19,79	2,0	–	330	1460±90
2		22,06	2,6	–	340	1340±60
3		30,72	3,3	91	380	1600±130

По сравнению с исходным состоянием микротвердость в образцах 1 и 2 после деформации увеличилась на 40–50 %. С увеличением степени и скорости деформации можно было ожидать существенного повышения прочностных характеристик и твердости образцов. Однако, исходя из данных, приведенных в табл. 3, это не совсем так. В образцах 1 и 2, отличающихся небольшим увеличением степени деформации (на 10 %) и существенным увеличением скорости деформирования (в 1,3 раза), временное сопротивление разрушению увеличилось незначительно (на 3 %), а микротвердость не только не возросла, а даже уменьшилась. При более существенном увеличении степени деформации (еще на 40 %) и ее скорости еще в 1,3 раза (в образце 3 по сравнению с образцом 2), временное сопротивление разрушению увеличилось на 12 %, а микротвердость – на 19 %.

При этом следует напомнить, что образец 3 перед деформацией подвергался отжигу, который, как отмечено выше, не оказал заметного влияния на микроструктуру и привел к незначительному понижению микротвердости.

Чтобы объяснить полученные результаты, были проведены структурные исследования. Микроструктура образцов серии I представлена на рис. 2. Во всех образцах сохранились поры, которые наблюдались и в исходном состоянии. Структура всех образцов крупнозернистая, с размерами зерен от 300 мкм до 1 мм, т. е. при высокоскоростной деформации этим методом не произошло существенного измельчения структуры.

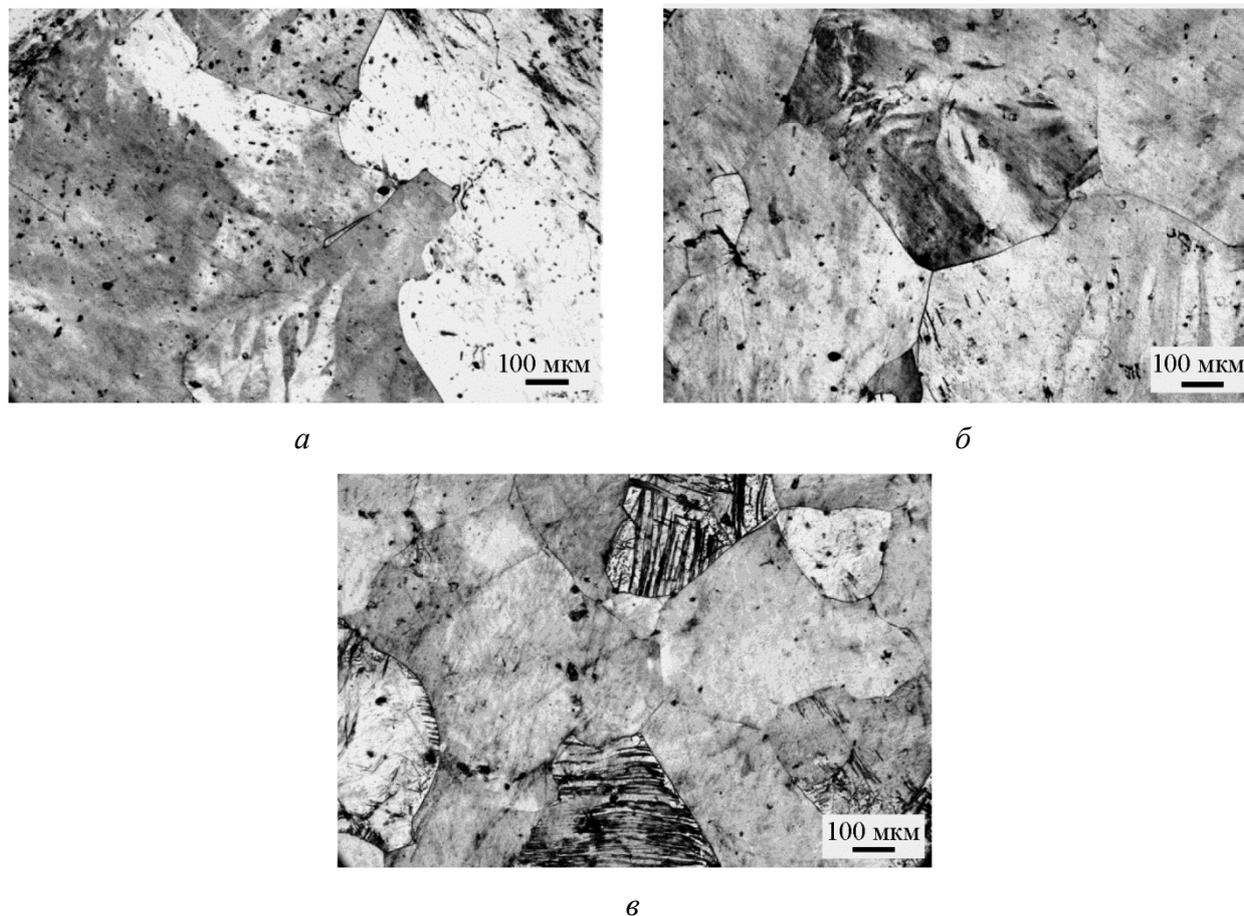


Рис. 2. Микрофотографии структуры образцов группы I (Cu-1%Sn):
a – образец 1; *б* – образец 2; *в* – образец 3

Как видно из рис. 2, в образце 1, деформированном со скоростью $2,0 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, в структуре отсутствуют двойники. Границы зерен изогнутые и не очень четкие, разброс зерен по размерам такой же большой, как в исходном состоянии, поры сохранились по всему образцу. В некоторых зернах видны следы дендритов, унаследованные от исходного литого состояния. С увеличением скорости деформации до $2,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ (образец 2) границы зерен становятся более четкими, разброс зерен по размерам уменьшается. В некоторых зернах появляются тонкие прямые двойники, но общее их количество невелико, поэтому можно заключить, что основной механизм деформации в обоих случаях дислокационный.

При дальнейшем повышении скорости деформирования и степени деформации (образец 3) границы зерен становятся более прямыми и четкими, происходит небольшое измельчение зерен, структура в целом более равномерная. Основное же отличие этого образца в том, что в нем интенсивно развивается двойникование и в структуре наблюдается большое количество двойников, причем по нескольким системам двойникования. Хотя образец 3 отличается от образцов 1 и 2 не только более высокой степенью и скоростью деформации, но и тем, что он подвергался предварительному отжигу, количество двойников отжига в нем в исходном состоянии было настолько незначительным, что двойникование является результатом не отжига, а достаточно интенсивной деформации.

Склонность оловянистых бронз к двойникованию при деформации и отжиге обусловлена тем, что олово понижает энергию упаковки (ЭДУ) медных сплавов [10–11]. В меди и ее сплавах плоскостями двойникования являются плотноупакованные плоскости типа $\{111\}_{\text{Cu}}$, и в определенных условиях возможно двойникование сразу по нескольким си-

стемам, особенно при легировании оловом даже в небольшом количестве. Ранее было обнаружено, что в стесненных условиях, например, при волочении композитной проволоки Cu-Sn/Nb, появление многочисленных двойников в бронзе обусловлено изменением преимущественного механизма ее деформации со скольжения дислокаций на двойникование [12, 13]. Интенсивное двойникование развивается в бронзах и при динамическом канально-угловом прессовании [6]. При динамическом сжатии по методу Кольского скорость и степень деформации существенно меньше, чем при ДКУП, но при достаточно высокой степени и скорости деформации этим методом двойникование тоже интенсивно развивается.

Сравнение механических свойств образцов серии I показывает, что все измеренные характеристики образца 3 существенно выше, чем образцов 1 и 2, а микротвердость достигает значения 1600 ± 130 МПа. Такое значительное увеличение микротвердости при увеличении скорости деформации динамическим сжатием, скорее всего, связано с увеличением дисперсности структуры и плотности дефектов кристаллического строения. В то же время дополнительный гомогенизирующий отжиг снизил вероятность протекания при нагружении релаксационных процессов, чем способствовал получению максимально возможных механических характеристик. Тем не менее, они значительно ниже, чем после ДКУП ($1820-1960$ МПа после 1 прохода) [6].

Чтобы оценить, насколько легирование меди оловом в количестве 1 % влияет на свойства и их эволюцию при деформации, были проведены испытания чистой меди М1 этим же методом. Механические характеристики, определенные из диаграмм напряжение–деформация, и микротвердость образцов группы II приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Механические свойства образцов меди М1 (группа II)

№	Материал образца	ε , %	$\dot{\varepsilon}$, $10^3 \cdot \text{с}^{-1}$	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_b , МПа	H, МПа
4	Cu M1	28,51	2,1	46	240	1290 ± 70
5		37,02	2,8	55	270	1180 ± 60
6		32,19	3,3	90	290	1220 ± 20

Как и можно было ожидать, при всех исследованных скоростях и степенях деформации механические свойства бронзы (временное сопротивление разрушению, микротвердость) выше, чем у технической чистой меди. При этом поведение при деформации меди и бронзы отличается. По сравнению с исходным состоянием, в бронзе максимальный прирост микротвердости (на 50 %) наблюдался при самой высокой степени и скорости деформации. В меди микротвердость увеличилась на 36 % при минимальной скорости и степени динамического сжатия (образец 4), но ее прирост уменьшился до 24 % при максимальной степени деформации (образец 5) и до 28 % – при самой высокой скорости (образец 6). Такое поведение меди свидетельствует о преобладании в ней релаксационных процессов при изучаемом способе деформации.

Сравним влияние скорости деформации на механические характеристики меди М1 (группа II) и бронзы (группа I). В обоих случаях с увеличением скорости происходит увеличение динамического предела прочности, но в меди эта зависимость становится слабее с увеличением скорости, в то время как в бронзе она, наоборот, усиливается. Вначале в меди происходит более быстрое повышение σ_b (на 12,5 % при увеличении скорости в 1,3 раза по сравнению с 3 % у бронзы), а затем оно замедляется и составляет 7 % (по сравнению с 12 % у бронзы), т. е. в меди достигается насыщение.

Микротвердость меди с увеличением степени и скорости деформации меняется не систематически, и изменения ее не превышают погрешности измерений, что указывает на протекание релаксационных процессов в процессе и после нагружения. Такое поведение

меди при интенсивной пластической деформации весьма ожидаемо и наблюдалось ранее при кручении под высоким давлением [13].

Металлографические снимки структуры образцов 4 и 6 представлены на рис. 3. При изменении скорости деформации зеренная структура изменилась незначительно. Несмотря на то, что полученные значения микротвердости выше, чем у исходного состояния до нагружения (950 ± 60 МПа), существенных изменений в размерах кристаллитов не обнаружено. Единственное различие в образцах группы II после нагружения состоит в том, что при минимальной скорости деформации ($2,1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$) границы зерен преимущественно прямые, тогда как при максимальной скорости ($3,3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$) видны искривленные границы зерен, характерные для деформированного состояния. По-видимому, границы зерен в меди более подвижны, чем в бронзе.

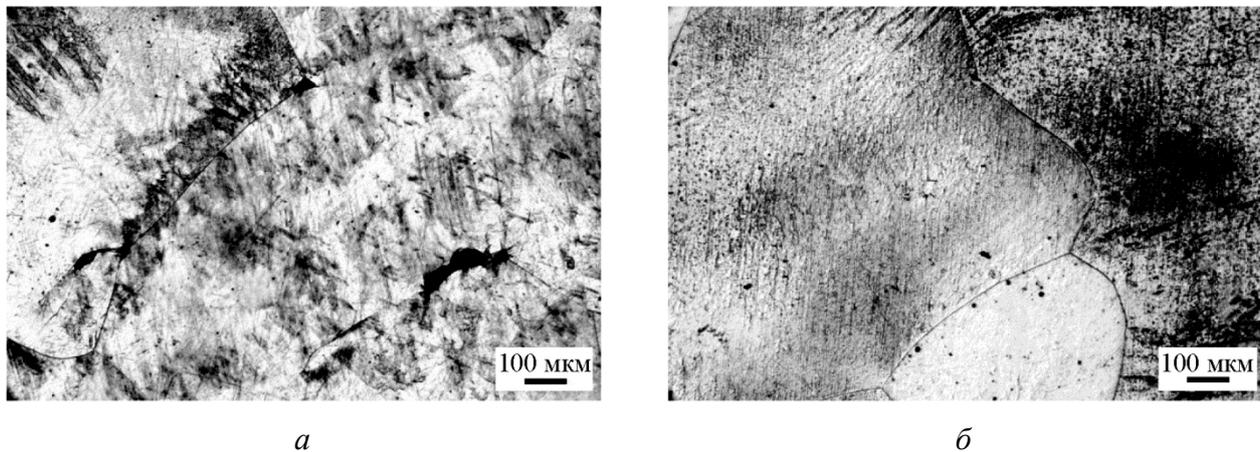


Рис. 3. Микрофотографии структуры образцов группы II (Cu):
а – образец 4; б – образец 6

На рис. 4 представлены зависимости микротвердости от скорости деформации образцов меди и бронзы. Видно, что эти зависимости не являются монотонными. Для бронзы образец с предварительным отжигом вынесен отдельной точкой. Возможно, немонотонное изменение микротвердости с увеличением скорости связано с нагревом материала при деформации. Это вполне вероятно, поскольку известно, что при ударном сжатии происходит разогрев материала, вследствие которого возможно протекание релаксационных процессов.

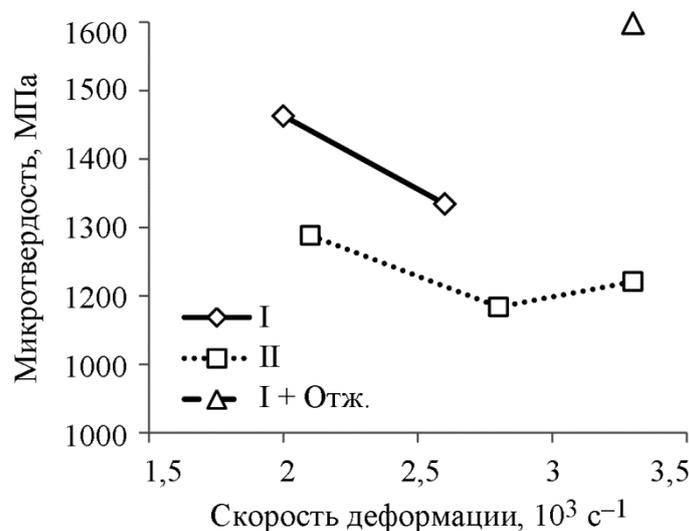


Рис. 4. Зависимость микротвердости от скорости деформации образцов

При этом следует отметить немонотонное изменение и других механических характеристик (табл. 3 и 4), что также указывает на протекание релаксационных процессов именно во время нагружения. Эти процессы более выражены в меди, чем в бронзе, и препятствуют измельчению структуры при деформации.

Полученные результаты показывают, что динамическое сжатие образцов меди и бронзы в исходном литом состоянии способствует повышению прочностных характеристик, причем в бронзе это повышение нарастает с увеличением скорости, а в меди уменьшается из-за развития релаксационных процессов. В бронзе с увеличением степени и скорости деформации включается механизм двойникования, хотя оно выражено слабее, чем при динамическом канально-угловом прессовании.

4. Заключение

Исследовано влияние высокоскоростного сжатия на структуру и механические свойства низколегированной оловянистой бронзы и меди технической чистоты стандарта М1.

Обнаружено, что в исходно крупнозернистой оловянистой бронзе с увеличением скорости деформации происходит изменение механизма деформации с дислокационного на двойниковый. Двойникование интенсивно развивается, начиная со скорости деформирования $2,6 \cdot 10^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Самые высокие значения предела прочности (380 МПа) и микротвердости (1600 МПа) достигнуты при максимальной исследованной скорости нагружения ($3,3 \cdot 10^3 \cdot \text{с}^{-1}$). По сравнению с исходным состоянием прирост микротвердости составляет 30 %, что обусловлено именно двойникованием, поскольку заметного измельчения зеренной структуры не обнаружено.

В меди М1, в отличие от бронзы, влияние скорости деформации на прочностные свойства ослабляется с ростом этого параметра, что объясняется протеканием релаксационных процессов при динамическом сжатии и после его окончания. Это подтверждается результатами структурных исследований, которые показали, что при изменении скорости деформации зеренная структура меди изменяется незначительно.

Таким образом, на структуру и свойства меди и бронзы при динамическом сжатии по методу Кольского влияют два конкурирующих фактора – деформационное упрочнение и релаксационные процессы. В меди преобладают процессы релаксации, которые ослабляют влияние высокоскоростной деформации на структуру и механические характеристики. В бронзе с ростом скорости деформирования включается механизм двойникования, релаксационные процессы подавляются и достигается более высокое упрочнение.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Функция», номер госрегистрации № АААА-А19-119012990095-0) при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 18-10-2-37).

Литература

1. Stolbovsky A. V., Popov V. V., Popova E. N. Structure and Thermal Stability of Tin Bronze Nanostructured by High Pressure Torsion // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2015. – Iss. 5. – P. 118–132. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.118-132. – URL: http://dream-journal.org/issues/2015-5/2015-5_52.html (accessed: 30.10.2017).
2. Effect of Severe Plastic Deformation by High-Pressure Torsion on the Structure and Properties of Copper and Tin Bronze / A. V. Stolbovsky, V. V. Popov, E. N. Popova, R. M. Falahutdinov // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2017. – Iss. 5. – P. 13–22. –

DOI: 10.17804/2410-9908.2017.5.013-022. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-5/2017-5_144.html (accessed: 09.07.2018).

3. Structure Formation in Copper during Dynamic Channel_Angular Pressing / I. V. Khomskaya, V. I. Zel'dovich, E. V. Shorokhov, N. Yu. Frolova, I. N. Zhgilev, A. E. Kheifets // *Phys. Met. Metallogr.* – 2008. – Vol. 105, no. 6. – P. 586–593. – DOI: 10.1134/S0031918X08060094.
4. High Speed Deformation of Metallic Materials Using Channel Angular Pressing for Producing an Ultrafine Grained Structure / E. V. Shorokhov, I. N. Zhgilev, I. V. Khomskaya, I. G. Brodova, V. I. Gurov, N. P. Oglezneva, I. G. Shirinkina, A. E. Kheifets, V. V. Astaf'ev // *Russ. Metall. (Metally).* – 2010. – No. 4. – P. 323–327. – DOI: 10.1134/S0036029510040142.
5. Zel'dovich, D. V. Gunderov, N. Yu. Frolova, A. A. Evolution of the Structure upon Heating of Submicrocrystalline and Nanocrystalline Copper Produced by High Rate Deformation / I. V. Khomskaya, V. I. Zel'dovich, A. E. Kheifets, N. Yu. Frolova, V. P. Dyakina, V. A. Kazantsev // *Phys. Met. Metallogr.* – 2011. – Vol. 111, no. 4. – P. 367–374. – DOI: 10.1134/S0031918X11030070.
6. Особенности деформационного поведения бронз при динамическом канально-угловом прессовании / А. В. Столбовский, В. В. Попов, Е. Н. Попова, Р. М. Фалахутдинов, Е. В. Шорохов // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* – 2016. – № 11. – С. 858–863.
7. Petrova A. N., Brodova I. G., Razorenov S. V. Strength properties and structure of a submicrocrystalline Al–Mg–Mn alloy under shock compression // *Phys. Met. Metallogr.* – 2017. – Vol. 118, no. 6. – P. 601–607. – DOI: <https://doi.org/10.1134/S0031918X17060072>.
8. Mechanical properties of grade M1 copper before and after shock compression in a wide range of loading duration / G. V. Garkushin, G. E. Ivanchikhina, S. V. Razorenov, O. N. Ignatova, I. I. Kaganova, A. N. Malyshev, A. M. Podurets, V. A. Rayevskii, V. I. Skokov, O. A. Tyupanova // *Phys. Met. Metallogr.* – 2011. – Vol. 111, no. 2. – P. 197–206. – DOI: 10.1134/S0031918X11010170.
9. Kolsky H. An investigation of the mechanical properties of material at very high rates of loading // *Proc. Phys. Soc., London.* – 1949. – Vol. 62B. – P. 676–700.
10. Gallagher P. C. J. The influence of the alloying, temperature and related effects on the stacking fault energy // *Met. Trans.* – 1970. – Vol. 1, no. 9. – P. 2429–2461.
11. Liu D., Miller A., Aust K. T. Annealing twin formation in a cast and annealed Cu-4 at-percent Sn alloy // *Canad. Met. Quart.* – 1984. – Vol. 23, no. 2. – P. 237–240.
12. Structure and mechanical properties of alloyed bronze matrix in Nb3Sn-based superconducting composites / L. A. Rodionova, E. N. Popova, S. V. Sudareva, A. E. Vorob'eva, E. A. Dergunova, and A. K. Shikov // *Phys. Met. Metallogr.* – 1992. – No. 73. – P. 71–77.
13. Influence of different deformation techniques on the structure of bronze matrix in multifilamentary Nb3Sn composites / E. N. Popova, L. A. Rodionova, S. V. Sudareva, E. P. Romanov, N. E. Khlevova, and A. M. Chukin // *Phys. Met. Metallogr.* – 1993. – No. 76. – P. 228–234.
14. Structure and thermal stability of Cu after severe plastic deformation / V. V. Popov, A. V. Stolbovsky, E. N. Popova, V. P. Pilyugin // *Defect and Diffusion Forum.* – 2010. – Vol. 297–301. – P. 1312–1321. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1312.

Received: 30.05.2018
Revised: 03.05.2019
Accepted: 28.06.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.052-056

INFLUENCE OF LONG-TERM OPERATION ON THE STRUCTURE AND IMPACT TOUGHNESS OF THE 09Mn2Si PIPE STEEL

I. V. Vlasov^{1, a)*}, S. V. Panin^{1, 2, b)}, P. O. Marushchak^{3, c)}, A. V. Eremin^{1, d)}, A. V. Byakov^{1, e)}

¹*Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS,
2/4 Akademicheskii ave., Tomsk, 634055, Russian Federation*

²*National Research Tomsk Polytechnic University, 30 Lenina Ave., Tomsk, 634050, Russian Federation*

³*Ternopil Ivan Puluj National Technical University, 56 Ruska St., Ternopil, 46001, Ukraine*

- a)  <https://orcid.org/0000-0001-9110-8313>  viv@ispms.tsc.ru;
b)  <https://orcid.org/0000-0001-7623-7360>  svp@ispms.tsc.ru;
c)  <https://orcid.org/0000-0002-3001-0512>  maruschak.tu.edu@gmail.com;
d)  <https://orcid.org/0000-0002-1800-9818>  ave@ispms.tsc.ru;
e) Scopus ID: 34879419100  bjakov@ispms.tsc.ru

*Corresponding author. E-mail: vlasov.ilya.viktorovich@gmail.com

Address for correspondence: 2/4, pr. Akademicheskii, Tomsk, 634055, Russian Federation
Tel.: +7 (3822)286 828; fax: +7 (3822) 49 25 76

The microstructure and mechanical properties of the 09Mn2Si steel used for construction of the Mastakh-Berge-Yakutsk natural gas transportation pipeline are investigated comprehensively after 37 years of operation. The results obtained for the specimens cut out from the pipe are compared to those obtained using emergency stock (reference) specimens. It is demonstrated that long-term operation in harsh climate does change the microstructure appreciably. Strain aging, however, can be identified through precipitation of finely dispersed carbides in the bulk grains, and hydrogen charging may occur in the steel, which gives rise to partial decarburization. The latter causes some embrittlement of the steel, measured under impact loading. The revealed microstructural changes do not practically affect static tension or hardness properties. This can be attributed to the development of two competing processes: i) softening as a result of decarburization and ii) hardening due to pinning of dislocations on carbide precipitates. The microstructure degradation results in sharp reduction of impact toughness, which drops by a factor of two at temperatures below zero Centigrade. The decrease in crack resistance under impact bending is primarily related to service-induced embrittlement accompanied by a pronounced decrease in the maximum load under which the main crack initiates. The reasons and mechanisms of the observed phenomena are discussed.

Keywords: pipe steel, impact toughness, structure degradation.

1. Introduction

Main oil and gas pipelines are strategic industrial facilities. Monitoring their structural integrity is of crucial importance. Safe operation of a pipeline over several decades assumes comprehensive understanding of the reasons for the degradation its microstructure. These studies are of particular importance for oil and gas pipelines operating for a long period of time in the Far North, where the annual temperature variation may reach 100 °C [1].

The degradation of the 09Mn2Si structural steel used for constricting a main gas pipeline for 37 years is investigated in this paper. For low-carbon ferrite-pearlite pipe steel that operates under low temperatures, the ductile-to-brittle transition leading to a sharp decrease in the impact tough-

ness is of particular concern [2]. Impact testing provides the most common express way of assessing fracture toughness. The study was performed to explore the strength, ductility and (impact) fracture toughness of the 09Mn2Si steel taken from a line section of the gas pipeline after 37 years of service. Similar studies were carried out for the same steel taken from the reserve stock of pipes.

2. Experimental

Specimens of the 09Mn2Si steel were cut out by an electric discharge machine from fragments of two pipes: after long-term operation (from 1972 to 2009) and from the reference unloaded pipe that was stored in the field as “emergency stock” within the same time in accordance with industry practice. Dog-bone shaped specimens sized $50 \times 7 \times 1 \text{ mm}^3$, with a gauge part of $20 \times 5 \times 1 \text{ mm}^3$, were employed for the testing.

Impact toughness was measured according to the ASTM E 23-07 standard by the Charpy technique using $55 \times 7 \times 7 \text{ mm}^3$ specimens having a V-shaped notch with a depth of 2 mm. An instrumented Instron 450MPX impact pendulum was employed. The tests were carried out at $T = +20, 0, -20, -40$ and $-70 \text{ }^\circ\text{C}$. The specimens were cooled in a Lauda RP 870 chiller for 10 min before testing. The time lag between specimen removal from the cooling chamber and impact loading did not exceed 5 s.

The pearlite fraction was estimated on etched specimens by the JMicroVision software. Etching was carried out in a 5% nitric acid solution. The mean size of ferrite grains was determined according to the ASTM E 112-96 standard. The microhardness was measured by a PMT-3 Vickers tester at 0.98 N. The *HB* hardness was measured by a TSh 2M hardness tester at 7857 N (the diameter of the ball was 5 mm). The *HV* hardness was measured by a PT-7R-1 hardness tester at 490.3 N. The fine microstructure was investigated by a Philips SM-12 transmission electron microscope.

3. Results

The measurement of pipe wall thickness for both types of steels has shown that 37 years of service result in an approximately 0.4 mm wall thickness reduction. The reference steel has a ferrite-pearlite structure, typical of hot-rolled sheets (Fig. 1 a). The pearlite content amounts to $16 \pm 1\%$. The average grain size is found to be $9.5 \pm 1 \text{ }\mu\text{m}$. The steel after use also possesses a ferrite-pearlite structure though the fraction of pearlite has reduced to about $12 \pm 0.6\%$; pearlite colonies appear to be small and located mainly along the grain boundaries (Fig. 1 b). The average grain size in this reference steel is equal to $11 \pm 1 \text{ }\mu\text{m}$.

Thus, during operation, the fraction of the pearlite phases in the 09Mn2Si steel decreases by $\sim 5\%$. The reasons responsible for these changes can be the influence of long-term exposure to a hydrogen-contacting medium. The reduction of the carbon content is also accompanied by a slight increase in the ferrite grain size (by $\sim 10\%$).

A typical ferrite structure with cementite plates along the grain boundaries in both examined steel fragments was observed with the help of transmission electron microscopy. Large equiaxial cementite particles (100 to 500 nm) are located both in the bulk grains and at the grain boundaries (Fig. 1 c). The dislocation density for the reference steel is higher, 10^{10} to 10^{11} cm^{-2} , while it is lower by an order of magnitude, i.e. 10^9 to 10^{10} cm^{-2} , after use (Fig. 1 d).

It is known from [3, 4] that long-term operation of steel may give rise to both above-mentioned hydrogen charging and microstructure changes. The latter reveal themselves through such multiple processes as deformation and failure of cementite particles along the boundaries of ferrite grains, formation of carbide precipitates, and evolution of the dislocation substructure involving strain aging. The strain aging phenomenon in steels is commonly associated with carbon segregation at dislocation cores leading to the formation of Cottrell atmospheres, pinning the dislocations. Natural gas transportation pipeline systems are designed with a large safety factor assuming operation for dozens of years.

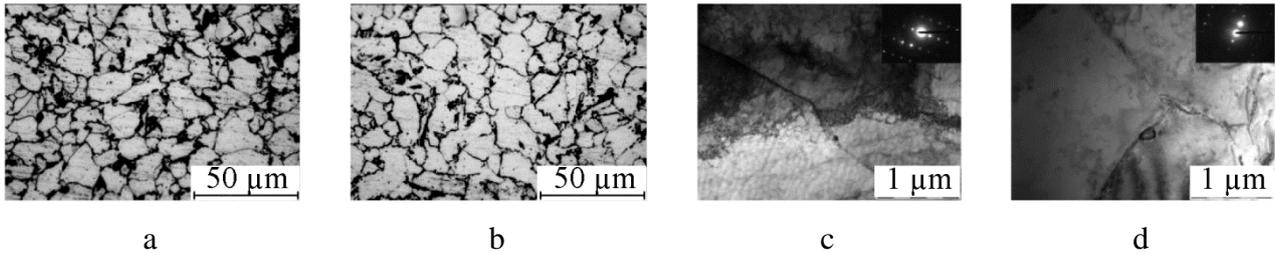


Fig. 1. Optical images of the microstructure of the 09Mn2Si steel (a, b); bright-field TEM micrographs (c, d); the reference material (a, c); the specimen after long-term operation (b, d)

For this reason, the steel is not supposed to experience significant stresses or overloads during operation, which may potentially give rise to large plastic deformation and dynamic strain aging. Thus, it can be assumed that strain aging could occur only at the initial stage of service, this being corroborated by the approximately one-order difference in the total dislocation density between the reference material and the one after operation. These changes do not exert a significant effect on mechanical properties including hardness, but they may decrease impact toughness.

The microhardness measured on the flat surface of the reference material and the one after use is equal to $H\mu = 1.84 \pm 0.05$ GPa and 1.95 ± 0.05 GPa, respectively. The hardness of the specimens of both types differs within the regular scatter and amounts to 126 HB (135 HV) and 131 HB (134 HV), respectively.

The results obtained for the steel after the long-term operation can be rationalized in terms of competition between two co-existing processes: i) hardness decrease as a result of decarburization and ii) strain hardening due to dislocations pinning by carbon atoms. When balanced, these processes can maintain the steel hardness after the operation close to the initial level, while a different deformation behavior can be anticipated if compared to the reference steel.

An upper yield point and the Lüders plateau are observed on the loading diagrams of the 09Mn2Si steel specimens in both states (Fig. 2 a). It agrees well with the results of TEM observations showing low dislocation density at the beginning of plastic flow [5]. Specimens of both types exhibit similar values of the lower and upper yield stresses and ultimate tensile strength. However, the reference specimens have appreciably higher ductility. This difference in ductility is likely to be due to a larger volume of the pearlite phase.

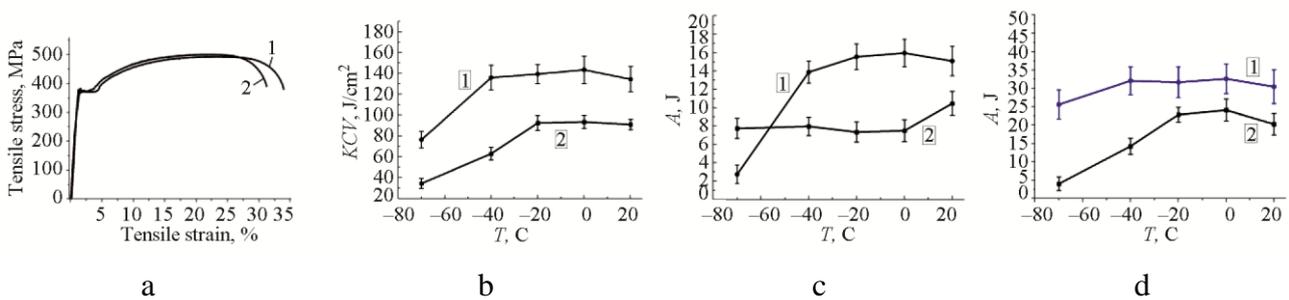


Fig. 2. Tensile diagrams for 09Mn2Si steel (a); impact toughness (b); energy of crack initiation (c); crack propagation energy vs. temperature (d): 1 – reference material; 2 – after long-term service

The impact toughness of the 09Mn2Si steel after many years of service under the cold climate conditions has decreased significantly in comparison with the reference steel for all the test temperatures (Fig. 2 b). The brittle-to-ductile transition for this steel starts at $T = -20$ °C, while it begins at a lower temperature, $T = -40$ °C, for the reference stock steel (Fig. 2 b). The increase in the brittle-to-ductile transition temperature in the steel after the service is caused by structural degradation accompanied by decarburization and strain hardening, as was noted above.

The mechanical energy for crack initiation and propagation has been estimated for the specimens of both types during impact testing (Fig. 2 c, d). The highest values of the mechanical energy A_I extended for the crack initiation stage are observed in the reference stock steel. The $A(T)$ curve drops sharply in the region of brittle-to-ductile transition, which is not seen for the steel after the service (Fig. 2 c). The energy of crack propagation for the reference steel is also higher (Fig. 2 d). However, unlike the initiation stage, a significant decrease in $A(T)$ is seen for both steels at the brittle-to-ductile transition.

4. Conclusion

A thorough study has been performed to characterize the strength, ductility, and impact toughness of the 09Mn2Si pipe steel used in a line section of the Mastakh-Berge-Yakutsk Arctic natural gas pipeline with a diameter of 530 mm and a wall thickness of 7 mm (after 37 years of service). Similar studies and comparative analysis of results have been carried out for the same steel taken from the reserve stock.

It has been shown that long-term service does not give rise to significant changes of the cementite phase. This is attributed to low pressure and low temperature. However, hydrogen charging may occur, giving rise to a partial decarburization of the steel. Strain aging is slightly pronounced and manifested as the precipitation of fine carbides in the bulk grains, which causes embrittlement in impact bending tests.

The revealed degradation exerts only little effect on mechanical properties measured under static tension and in hardness measurements. This can be due to the development of two competing processes: i) softening as a result of decarburization and ii) hardening due to pinning of dislocations on carbide precipitates.

The impact fracture toughness of the 09Mn2Si steel under study decreases more significantly in contrast to tensile or fatigue properties at ambient temperature. The maximum impact fracture toughness decreases by a factor of ~ 2.2 at $T = -70$ °C. The decrease in crack resistance under impact bending is primarily caused by service-induced embrittlement accompanied by a pronounced decrease in the maximum load under which the main crack initiates. Thus, fracture toughness appears as the parameter which, among others, is most sensitive to microstructural changes induced within the 37 years of operation. Overall, the observed degradation of properties is attributed primarily to reduced macroscopic and local ductility due to a gradual accumulation of defects in the material during operation under harsh Arctic conditions.

Acknowledgments

The work was performed in the framework of the fundamental research Program of the Russian State Academies of Sciences for 2013–2020, line of research III.23, with a partial support from RFBR Grants No. 18-08-00516_a, 18-38-00679 and RF President Council Grant for the support of leading research schools NSh-5875.2018.8. Impact bending tests were carried out at the National Research Tomsk Polytechnic University within the framework of the Competitiveness Enhancement Program of Tomsk Polytechnic University.

References

1. Panin V.E., Derevyagina L.S., Lebedev M.P., Syromyatnikova A.S., Surikova N.S., Pochivalov Yu.I., Ovechkin B.B. Scientific Basis for Cold Brittleness of Structural BCC Steels and Their Structural Degradation at Below Zero Temperatures. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 2 (2), pp. 125–133. DOI: 10.1134/S1029959917020023.
2. Nastich S.Yu., Soya S.V., Molostov M.A., Vasiliev I.S., Dyakonova N.B. Effect of temperature for the start of finish rolling on coiled steel X70 microstructure and cold resistance. *Metallurgist*, 2012, vol. 56 (7), pp. 519–525. DOI: 10.1007/s11015-012-9608-6.

3. Nykyforchyn H., Lunarska E., Tsyurulnyk O.T., Nikiforov K., Genarro M.E., Gabetta G. Environmentally assisted “in-bulk” steel degradation of long term service gas trunkline. *Engineering Failure Analysis*, 2010, vol. 17 (3), pp. 624–632. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2009.04.007.
4. Meshkov Yu.Ya., Shyyan A.V., Zvirko O.I. Evaluation of the In-service degradation of steels of gas pipelines according to the criterion of mechanical stability. *Materials Science*, 2015, vol. 50 (6), pp. 830–835. DOI: 10.1007/s11003-015-9790-3.
5. Yasnii P.V., Glad’o V.B., Okipnyi I.B. Relationship between rupture stress and microstructure parameters of plastically deformed heat-resistant steel. *Strength of Materials*, 2007, vol. 39 (4), pp. 349–357.