

**DREAM**

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2

---

---

**Diagnostics, Resource and Mechanics**  
*of materials and structures*

---

---

<http://dream-journal.org>

**2,2023**

**March-April**

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**  
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**  
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

**Anatoly A. Burenin** (Russia)  
**Irina G. Goryacheva** (Russia)  
**Janez Grum** (Slovenia)  
**Mikhail P. Lebedev** (Russia)  
**Leopold I. Leontiev** (Russia)  
**Evgeny V. Lomakin** (Russia)  
**Valery P. Matveenko** (Russia)  
**Nikolay A. Makhutov** (Russia)  
**Nikita F. Morozov** (Russia)  
**Vladimir V. Moskvichev** (Russia)  
**Sergey V. Panin** (Russia)  
**Vasily M. Fomin** (Russia)  
**Shao Wen-zhu** (China)

Editorial Board

**Boris V. Artemyev** (Moscow)  
**Vladimir A. Bataev** (Novosibirsk)  
**Ivan A. Bataev** (Novosibirsk)  
**Aleksandr K. Belyaev** (St.-Peterburg)  
**Sergey V. Burov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir O. Vaskovsky** (Ekaterinburg)  
**Dmitry I. Vichuzhanin** (Ekaterinburg)  
**Vladimir G. Degtyar** (Miass)  
**Igor G. Emelyanov** (Ekaterinburg)  
**Sergey M. Zadvorkin** (Ekaterinburg)  
**Alexander G. Zalazinsky** (Ekaterinburg)  
**Anatoly V. Konovalov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir N. Kostin** (Ekaterinburg)  
**Tatyana P. Lyubimova** (Perm)  
**Aleksey V. Makarov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir A. Mironov** (Ekaterinburg)  
**Sergey A. Mikhaylov** (Kazan)  
**Radik R. Mulyukov** (Ufa)  
**Vitaly V. Muravyov** (Izhevsk)  
**Aleksandr P. Nichipuruk** (Ekaterinburg)  
**Oleg A. Plekhov** (Perm)  
**Anna M. Povlotskaya** (Ekaterinburg)  
**Nataliya B. Pugacheva** (Ekaterinburg)  
**Igor Yu. Pyshmintsev** (Chelyabinsk)  
**Anatoly B. Rinkevich** (Ekaterinburg)  
**Roman A. Savray** (Ekaterinburg)  
**Alexander S. Smirnov** (Ekaterinburg)  
**Alexander I. Ulyanov** (Izhevsk)  
**Yuliya V. Khudorozhkova** (Ekaterinburg)

**Eelena E. Verstakova**, editor of the English translation  
**Olga A. Verstakova**, editor of Russian texts  
**Anna V. Garieva**, maker-up  
**Galina V. Torlopova**, associate editor  
**Raul N. Shakirov**, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,  
Ekaterinburg, Russian Federation  
phone: +7 (343) 375-35-83,  
fax: +7 (343) 374-53-30  
e-mail: dream-journal@mail.ru  
http://dream-journal.org

**Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.**  
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**  
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

**Буренин Анатолий Александрович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Горячева Ирина Георгиевна**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Грум Янез**, Ph.D, (Республика Словения)  
**Лебедев Михаил Петрович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Леонтьев Леопольд Игоревич**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Ломакин Евгений Викторович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Матвеев Валерий Павлович**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Махутов Николай Андреевич**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Морозов Никита Федорович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Москвичев Владимир Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Панин Сергей Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Фомин Василий Михайлович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Шао Вэнь-чжу**, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

**Артемьев Борис Викторович**, д.т.н., (Москва)  
**Батаев Владимир Андреевич**, д.т.н. (Новосибирск)  
**Батаев Иван Анатольевич**, д.т.н. (Новосибирск)  
**Беляев Александр Константинович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)  
**Буров Сергей Владимирович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Васьковский Владимир Олегович**, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Вичужанин Дмитрий Иванович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Дегтярь Владимир Григорьевич**, академик РАН, д.т.н. (Миасс)  
**Емельянов Игорь Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Задворкин Сергей Михайлович**, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Залазинский Александр Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Коновалов Анатолий Владимирович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Костин Владимир Николаевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Любимова Татьяна Петровна**, д.ф.-м.н. (Пермь)  
**Макаров Алексей Викторович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Миронов Владимир Александрович**, д.м.н. (Екатеринбург)  
**Михайлов Сергей Анатольевич**, член-корр. АН РТ, д.ф.-м.н., (Казань)  
**Мулюков Радик Рафикович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)  
**Муравьев Виталий Васильевич**, д.т.н. (Ижевск)  
**Ничипурук Александр Петрович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Плехов Олег Анатольевич**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Пермь)  
**Поволоцкая Анна Моисеевна**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Пугачева Наталия Борисовна**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Пышминцев Игорь Юрьевич**, д.т.н. (Челябинск)  
**Ринкевич Анатолий Брониславович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Саврай Роман Анатольевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Смирнов Александр Сергеевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Ульянов Александр Иванович**, д.т.н. (Ижевск)  
**Худорожкова Юлия Викторовна**, к.т.н. (Екатеринбург)

**Верстакова Елена Евгеньевна** – редактор перевода текста на английский язык  
**Верстакова Ольга Андреевна** – редактор текста  
**Гариева Анна Валерьевна** – верстальщик текста  
**Торлопова Галина Викторовна** – помощник редактора  
**Шакиров Рауль Нурувич**, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН  
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30  
e-mail: [dream-journal@mail.ru](mailto:dream-journal@mail.ru)  
<http://dream-journal.org>

**CONTENTS**

<b>Gusev G. N., Baryakh A. A., Shardakov I. N., and Tsvetkov R. V.</b> Ensuring safe operation of monolithic structures in undermined areas .....	6
<b>Emelyanov I. G.</b> Applying the method of virtual elements to solving contact problems of shells of revolution interacting with surfaces of inconsistent shape .....	19
<b>Polyansky L. I., Babailov N. A., and Loginov Yu. N.</b> Studying the mechanical properties of iron ore concentrate briquettes .....	41
<b>Kazakov A. L. and Spevak L. F.</b> Analytical and numerical radially symmetric solutions to a heat equation with arbitrary nonlinearity .....	49
<b>Korepanov V. V., Korepanova T. O., and Tsvetkov R. V.</b> The impact of bridge crossing span damage under moving load .....	64

**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Гусев Г. Н., Барях А. А., Шардаков И. Н., Цветков Р. В.</b> К вопросу об обеспечении безопасной эксплуатации монолитных сооружений на подрабатываемых территориях ...	6
<b>Емельянов И. Г.</b> Применение метода виртуальных элементов для решения контактных задач оболочек вращения, взаимодействующих с поверхностями несогласованной формы .....	19
<b>Полянский Л. И., Бабайлов Н. А., Логинов Ю. Н.</b> Изучение механических свойств брикетов из железорудного концентрата .....	41
<b>Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.</b> Аналитические и численные радиально-симметричные решения уравнения теплопроводности с нелинейностью общего вида .....	49
<b>Корепанов В. В., Корепанова Т. О., Цветков Р. В.</b> Влияние поврежденности пролетного строения моста при действии подвижной нагрузки .....	64

**Received:** 27.02.2023

**Revised:** 21.04.2023

**Accepted:** 28.04.2023



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.2.006-018



## ENSURING SAFE OPERATION OF MONOLITHIC STRUCTURES IN UNDERMINED AREAS



G. N. Gusev<sup>1, a)</sup>, A. A. Baryakh<sup>2, b)</sup>, I. N. Shardakov<sup>1, c)</sup>, and R. V. Tsvetkov<sup>1, d), \*</sup>



<sup>1</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the RAS,  
1 Ak. Koroleva St., Perm, 614013, Russia*

<sup>2</sup>*Mining Institute, Ural Branch of the RAS, 75a Sibirskaya St., Perm, 614007, Russia*

a)  <https://orcid.org/0000-0002-9072-0030>  gusev.g@icmm.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0003-2737-6166>  bar@mi-perm.ru;

c)  <https://orcid.org/0000-0001-8673-642X>  shardakov@icmm.ru;

d)  <https://orcid.org/0000-0001-9617-407X>  flower@icmm.ru

\*Corresponding author. E-mail: flower@icmm.ru

Address for correspondence: ul. Ak. Koroleva, 1, Perm, 614013, Russia

Tel.: +7 (342) 237-8330; fax: +7 (342) 237-8487

In order to ensure safe operation of buildings in undermined areas, it is necessary to take into account the influence of loads extrinsic to typical structures. The solution of the generalized boundary value problem on the evaluation of the stress-strain state (SSS) of the building–foundation–soil system with due regard for the complete geometry and physically nonlinear behavior of all the elements is inexpedient since it is complicated by the large dimensionality of the problem. This paper discusses an approach allowing the state of monolithic reinforced concrete building structures located in an undermined area to be estimated by solving boundary value problems on different scales, from modeling the whole system in an elastic formulation to modeling joints between load-bearing members (columns and floors) in a nonlinear formulation for concrete and reinforcement. In these problems, strain energy is taken as the parameter characterizing the deformation process at critical deformation stages and connecting the boundary value problems. The obtained loading diagrams for a unit and the evaluation of the SSS of the whole structure enable one to find the values of maximum permissible horizontal soil deformations in the vicinity of the foundation, at which the bearing members reach the SSS preceding the loss of bearing capacity.

**Keywords:** undermined area, reinforced concrete structure, numerical model, strain energy.

### Acknowledgment

*The work was performed under the state assignment to the Perm Federal Research Center, UB RAS, theme No. AAAA-A19-19012290100-8.*

### References

1. Gusev G.N., Epin V.V., Tsvetkov R.V. The results of long-term observations of uneven settlements of buildings located on the territory of the Verkhnekamskoye potash deposit in Berezniki. *Izvestiya Uralskogo Gosudarstvennogo Gornogo Universiteta*, 2022, No. 3 (67), pp. 80–89. (In Russian).

2. Nesterova V.Yu., Barsukov I.V., Stryukov Yu.N. Evaluation of influences of underground mining on surface buildings and constructions in coal fields. *Ugol*, 2014, No. 10 (1063), pp. 29–34. (In Russian).
3. Samsonov S., Baryakh A. Estimation of deformation intensity above a flooded potash mine near Berezniki (Perm Krai, Russia) with SAR interferometry. *Remote Sensing*, 2020, vol. 12 (19), p. 3215. DOI: 10.3390/rs12193215.
4. Baryakh A.A., Tenison L.O., Samodelkina N.A. Assessment of horizontal deformations in undermined areas. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 2021, No. 11, pp. 5–18. (In Russian). DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_11\_0\_5.
5. Kharisova O.D. Monitoring of the spatial deformation processes of undermined structures. *Problemy Nedropolzovaniya*, 2018, No. 3, pp. 81–88. (In Russian). DOI: 10.25635/2313-1586.2018.03.081.
6. *Ukazaniya po dopustimym usloviyam podrabotki ekspluatiruyemykh zdaniy i sooruzheniy na Verkhnekamskom mestorozhdenii kaliynykh soley (s izmeneniyami ot 2008)* [Instructions on the Permissible Conditions for Undermining Operated Buildings and Structures at the Verkhnekamskoye Potash Salt Deposit (as Amended in 2008)]. St. Petersburg, 2008, 45 p. (In Russian).
7. SP 21.13330.2012. (In Russian). <https://www.gostrf.com/normativ/1/4293801/4293801657.htm>
8. TSN 22-301-98. (In Russian). <https://www.gostrf.com/normativ/1/4294850/4294850011.htm>
9. *Rukovodstvo po proektirovaniyu zdaniy i sooruzheniy na podrabatyvayemykh territoriyakh. Chast 2. Promyshlennyye i grazhdanskie zdaniya* [Guidelines for the Design of Buildings and Structures in Undermined Territories. Part II. Industrial and Civil Buildings]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1986, 304 p. (In Russian).
10. Razvodovsky D.E. Admissible deformations of the existing building. *Vestnik NTS "Stroitelstvo"*, 2017, vol. 2, No. 13, pp.106–121. (In Russian).
11. Kashevarova G.G., Son M.P. Method of defining the limiting permissible deformations of panel buildings, exploited at the subsided area. *Bulletin of the South Ural State University. Series Construction Engineering and Architecture*, 2013, vol. 13, No. 1, pp. 22–26. (In Russian).
12. Gusev G.N., Shardakov I.N., Baryakh A.A., Glot I.O. Deformation interaction of panel residential buildings with the ground in the zone of technogenic impact. *Computational Continuum Mechanics*, 2023, vol. 16, No. 1, pp. 36–45. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.3.
13. Yarkin V.V., Lobacheva N.G. Modeling of non-uniform deformations of the base of foundations in complex engineering and geological conditions. *Zhilishchnoe Stroitelstvo*, 2022, No. 12, pp. 15–25. (In Russian). DOI: 10.31659/0044-4472-2022-12-15-25.
14. Tatarin A.V. Evaluation of the “foundation-soil base” system. *Geotekhnika*, 2019, vol. 11 (3), pp. 52–62. (In Russian). DOI: 10.25296/2221-5514-2019-11-3-52-62.
15. Kolchunov V.I., Martynenko D.V. Deformation and cracking of the platform joint of the prefabricated-monolithic RC building frame. *Stroitelstvo i Rekonstruktsiya*, 2020, No. 4, pp. 38–47. (In Russian). DOI: 10.33979/2073-7416-2020-90-4-38-47.
16. Fan D., Iliushchenko T.A., Amelina M.A. Resistance of reinforced concrete frames of multi-storey buildings with indirect reinforcement in over-extreme limit states. *Stroitelstvo i Rekonstruktsiya*, 2022, No. 3, pp. 87–97. (In Russian). DOI: 10.33979/2073-7416-2022-101-3-87-97.
17. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In: *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, Bergamo, Italy, 1975, vol. 19, pp. 1–30.
18. SP 63.13330.2018. (In Russian). <https://meganorm.ru/Index2/1/4293732/4293732352.htm>

19. Stupishin L.Yu. Progressive limit state at critical levels of internal potential energy of deformation. *Vestnik MGSU*, 2021, vol. 16, No. 10, pp. 1324–1336. (In Russian). DOI: 10.22227/1997-0935.2021.10.1324-1336.
20. Stupishin L.Yu. Limit state of building structures and critical energy levels. *Promyshlennoe i Grazhdanskoe Stroitelstvo*, 2018, No. 10, pp. 102–106. (In Russian).



Подана в журнал: 27.02.2023

УДК 004.942+69.04

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.006-018



## К ВОПРОСУ ОБ ОБЕСПЕЧЕНИИ БЕЗОПАСНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ МОНОЛИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ПОДРАБАТЫВАЕМЫХ ТЕРРИТОРИЯХ



Г. Н. Гусев<sup>1, а)</sup>, А. А. Барях<sup>2, б)</sup>, И. Н. Шардаков<sup>1, в)</sup>, Р. В. Цветков<sup>1, г), \*</sup>



<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН,



ул. Ак. Королева, 1, г. Пермь, 614013, Российская Федерация

<sup>2</sup>Горный институт УрО РАН, ул. Сибирская 75а, г. Пермь, 614007, Российская Федерация

а)  <https://orcid.org/0000-0002-9072-0030>  gusev.g@icmm.ru;

б)  <https://orcid.org/0000-0003-2737-6166>  bar@mi-perm.ru;

в)  <https://orcid.org/0000-0001-8673-642X>  shardakov@icmm.ru;

г)  <https://orcid.org/0000-0001-9617-407X>  flower@icmm.ru

\* Ответственный автор. Эл. почта: flower@icmm.ru

Адрес для переписки: ул. Ак. Королева, 1, 614013, Россия

Тел.: +7 (342) 237-83-30

Для обеспечения безопасной эксплуатации зданий в зоне подработки необходимо учитывать влияние нехарактерных для типовых сооружений нагрузок на их конструкцию, вызванных деформацией грунтов. Решение краевой задачи об оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) системы «здание – фундамент – грунтовое основание» с учетом полной геометрии и физически нелинейного поведения всех элементов осложняется большой ее размерностью, и поэтому практически нецелесообразно. В данной работе рассмотрен подход, позволяющий оценивать состояние конструкций монолитных железобетонных зданий, находящихся в зоне подрабатываемых территорий, с помощью решения краевых задач на разных масштабах, начиная с моделирования всей системы в упругой постановке и заканчивая моделированием узла сопряжения несущих элементов (колонн и дисков перекрытий) в нелинейной постановке для бетона и арматуры. За параметр, характеризующий деформационный процесс на стадиях критического деформирования в этих задачах и обеспечивающий связь между ними, взята величина энергии деформации. На основе полученных диаграмм нагружения узла и оценки НДС конструкции в целом определяются величины максимально допустимых горизонтальных деформаций грунта в окрестности фундамента, при которых в элементах здания достигается НДС, предшествующее потере несущей способности.

**Ключевые слова:** подработанная территория, деформация грунта, монолитные железобетонные здания, численное моделирование, энергия деформации.

### 1. Введение

Сооружения на подрабатываемых территориях подвержены негативному влиянию деформационных процессов, вызванных добычей полезных ископаемых. Выемка пластов из недр приводит к перераспределению напряженно-деформированного состояния (НДС) всего породного массива и грунтов, расположенных выше, в том числе и в приповерхностном слое грунта, и на поверхности земли, с расположенными на них зданиями [1–2]. Развитие деформационных процессов в породном массиве может продолжаться десятилетиями и усугубляться из-за нештатных ситуаций, таких как затопление рудников [3], которые могут привести даже к провалам

грунта. Однако не только провалы представляют опасность для сооружений на подработке. Возникающие деформации в приповерхностном слое грунта вызывают деформации в фундаментах и несущих элементах сооружений, что сказывается на их деформационной безопасности.

Для обеспечения безопасной эксплуатации производятся инструментальные наблюдения и мониторинг деформирования грунта [3–4] и зданий [5], который может включать в себя измерение большого числа параметров, характеризующих НДС сооружений. При этом важной задачей становится оценка текущего состояния и ресурса сооружений на основе данных измерений. Существующие нормативные строительные документы для зданий на подработанной территории [6–9] позволяют проводить оценку их состояния по уровню деформаций поверхности грунта. Однако эти нормы регламентируют предельные и допустимые значения деформации только для некоторых типов сооружений и фундаментов, и, кроме того, не учитывают особенности контактного взаимодействия грунта и фундаментов. Так, например, для каркасных сооружений оценка допустимых деформаций производится по методике для промышленных зданий, различающихся только по типу производства и высоте несущих колонн. А большой класс монолитных сооружений, активно возводимый в последние десятилетия, оказывается вне рассмотрения. Он включает в себя монолитные железобетонные здания с цельным и сборно-монолитным каркасом, с разными типами перекрытий, различными размерами, сложной конструктивной схемой и вариацией процента армирования. Анализ публикаций показывает, что вопрос оценки влияния подработки грунта на современные монолитные сооружения недостаточно изучен, в отличие от панельных зданий [10–12], для которых сделаны численные оценки предельно допустимых деформаций. А применительно к многообразию монолитных железобетонных сооружений, расположенных в зоне подработки или планируемых к строительству, актуально проведение исследований, направленных на оценку допустимых и предельных деформаций грунтов, вызывающих потенциально опасное непроектное деформирование зданий.

Такие оценки можно проводить на основе анализа решения краевой задачи для системы «здание – фундамент – грунтовое основание», например, как в работах [13–14], акцентируя внимание на влиянии деформирования грунта в процессе подработки на сооружение. Используемые модели должны учитывать не только упругие свойства всех основных элементов системы, но и их неупругое деформационное поведение, которое предшествует разрушению. В ходе вычислений необходимо оценивать уровень поврежденности несущих элементов в модели здания на всех этапах деформирования. Всё это существенно увеличивает размерность задачи, которую практически невозможно решить даже с учетом современных вычислительных технологий. Предлагаемый авторами подход позволяет проводить оценку состояния конструкции с помощью численного моделирования на различных масштабах с применением разных моделей. Следует отметить, что проводятся исследования, посвященные прочности отдельных элементов железобетонных каркасов, например [15–16], однако эти исследования не распространяются на всё сооружение с учетом взаимодействия с грунтовым основанием в непроектном сочетании нагрузок.

Цель исследования – создание и совершенствование алгоритмов оценки напряженно-деформированного состояния строительных объектов, эксплуатируемых и строящихся на подрабатываемых территориях и в зонах техногенного воздействия, для прогнозирования развития их предкритических и критических деформационных состояний.

Эти задачи являются особенно интересными, поскольку напряженно-деформированные состояния систем «здание – фундамент – грунтовый массив» в условиях такого рода являются нетипичными и непрогнозируемыми на этапах проектирования. Действующая нормативная документация, которая должна регулировать вопросы строительства и эксплуатации сооружений в таких условиях, не лишена изъянов и не в полной мере отвечает текущим современным технологическим решениям и условиям строительства и эксплуатации. Более того, современ-

ное состояние данного вопроса как в России, так и в мире говорит о том, что большинство задач направления еще не решены, и оно является новым и неразработанным.

## 2. Постановка задачи и методы решения

Задача об оценке напряженно-деформированного состояния в системе «монолитное здание – фундамент – грунтовое основание» разбивается на решение нескольких краевых задач. Поскольку одним из главных параметров пригодности к эксплуатации строительных сооружений в таких условиях являются величины деформаций грунтового массива в окрестности фундаментов зданий, определение связи между величиной данных деформаций и НДС сооружений является основным в данной работе. Если установить зависимости НДС сооружений, в частности монолитных зданий на разных фундаментах, от деформаций приповерхностного слоя грунта в окрестности самих сооружений, то посредством их измерения и контроля можно оценивать и прогнозировать состояние не только отдельных зданий, но и массивов городской застройки, а также проектировать сооружения с заданными параметрами, обеспечивающими безопасную эксплуатацию в зонах подработки.

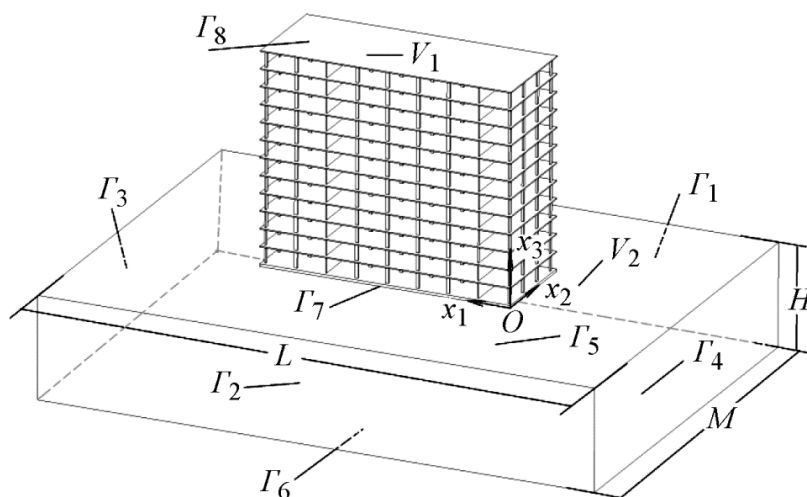


Рис. 1. Задача об оценке НДС системы «монолитное здание – фундамент – грунтовое основание»

На первой стадии анализа рассматривается конечный фрагмент грунта размером  $L \times M \times H$ , совмещенный с фундаментом здания в виде плиты (рис. 1). Начало декартовой системы координат совпадает с одним из углов в основании фундамента. Расчетная область состоит из следующих элементов: здание и грунтовый массив основания.

Напряженно-деформированное состояние системы определяется из решения краевой задачи, включающей уравнения равновесия и геометрические соотношения Коши. Далее решается следующий цикл задач.

Для моделирования влияния подработки в зоне добычи полезных ископаемых на внешних границах расчетной области принимаются следующие условия: на торцах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  выделенного массива грунта устанавливается условие отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений; на торцах  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  задаются перемещения, рассчитанные исходя из заданного уровня деформации земной поверхности в зоне расположения здания; внешняя поверхность грунта  $\Gamma_5$  считается свободной от нагрузок; на нижней границе грунта  $\Gamma_6$  вертикальные перемещения полагаются отсутствующими; на поверхности здания  $\Gamma_8$  задается

нагрузка переменной интенсивности  $P$ , определенная исходя из функционального назначения помещений и конструктивных элементов здания:

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{x}) = 0, y_{21}(\mathbf{x}) = y_{23}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \\ u_1(\mathbf{x}) = e^*L, y_{12}(\mathbf{x}) = y_{13}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_3, u_1(\mathbf{x}) = -e^*L, y_{12}(\mathbf{x}) = y_{13}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_4; \\ u_3(\mathbf{x}) = 0, y_{31}(\mathbf{x}) = y_{32}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_6; \\ y_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = 0, i, j = \overline{1,3}, \mathbf{x} \in \Gamma_5; \\ y_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x}), i, j = \overline{1,3}, \mathbf{x} \in \Gamma_8, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $e^*$  – заданная линейная деформация грунтового массива в горизонтальной плоскости вдоль продольной оси здания,  $L$  – продольный размер выделенной части грунтового массива.

На границе  $\Gamma_7$  контакта областей  $V_1$  и  $V_2$  задан непрерывный контакт, в соответствии с которым

$$u_i(\mathbf{x})|_{V_1} = u_i(\mathbf{x})|_{V_2}, i = \overline{1,3}, \mathbf{x} \in \Gamma_7. \quad (2)$$

Такого рода граничные условия моделируют ситуацию, когда сооружение находится в однородном поле растягивающих деформаций в приповерхностном слое грунтового массива. Эта ситуация справедлива для зон подработки в верхней части мульды сдвижения земной поверхности. Примером тому является часть массива городской застройки г. Березники Пермского края [1, 4].

По результатам решений определяется НДС системы «здание – фундамент – грунтовое основание» для разных видов каркасов и типов фундаментов. Варьируются следующие параметры: этажность, длина пролета (расстояния между вертикальными несущими элементами), тип фундаментных конструкций (сваи под столбчатым ростверком, плита на свайном поле, фундаментная плита). Длина зданий во всех моделях составляет порядка 50 м, ширина равна трем типовым размерам пролетов и, в зависимости от величины пролета, варьируется от 18 до 30 м. Характеристики грунтового основания для всех моделей приняты одинаковыми, чтобы исключить влияние их вариаций на НДС сооружения.

Далее оценивается соответствие напряженно-деформированного состояния в несущих элементах каркаса здания деформациям грунтового массива в окрестности фундамента, которые моделируют влияние на сооружение подработки. Деформации грунтового основания в окрестности фундамента строго нормируются, поэтому поиск связи с НДС сооружения является необходимым для безопасной эксплуатации. В первом приближении оценку несущей способности сооружения можно вести по теории Мора для хрупких тел, по эквивалентным напряжениям  $\sigma_{\text{эКВ}}$ :

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{R_t}{R_b}, \quad (3)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – первые и третьи главные напряжения в элементе,  $R_t$  – предел прочности на растяжение, а  $R_b$  – предел прочности на сжатие. Здесь следует оговориться, что механическое деформирование железобетонного элемента является достаточно сложным процессом, и определение его прочности по обобщенным характеристикам также носит оценочный характер. Величины пределов прочности на растяжение и сжатие рассчитаны с учетом правила смеси для армированных сечений. Процент армирования в сечениях вертикальных и горизонтальных несущих элементов также варьировался согласно нормативной документации.

Следует отметить, что наиболее корректным вариантом оценки НДС железобетонных монолитных сооружений является моделирование железобетонного элемента как физически нелинейного объемного тела с учетом наличия в нем армирующих элементов и с учетом всех прочностных и деформационных особенностей поведения в предкритической и критической об-

ластях нагружения. Однако такая постановка вкупе с решением общей краевой задачи моделирования целого массива несущих элементов является очень объемной с точки зрения вычислительной мощности. Поэтому было принято решение разделить общую задачу на подзадачи: моделирование деформационного поведения отдельных узлов несущей конструкции здания и разработка общего критерия оценки прочности для такого рода конструктивных элементов.

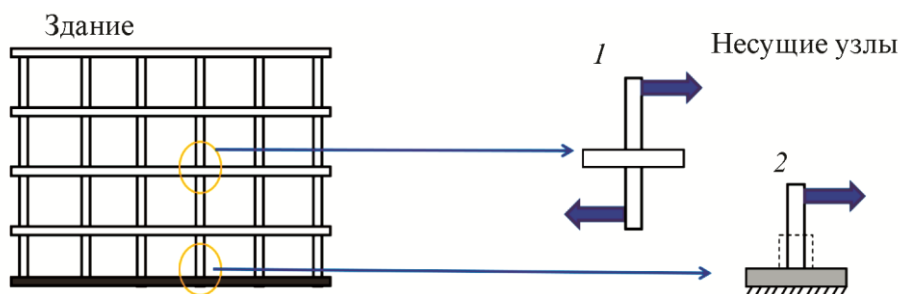


Рис. 2. Разбиение на подзадачи

Были выделены два типа узловых соединений ж/б элементов (рис. 2), для которых на основе предыдущих расчетов подобраны вариации схем нагружения, соответствующие деформированию сооружения в условиях влияния подработки. Численно решена серия задач по определению деформационного поведения узлов сопряжения ж/б элементов вплоть до полного разрушения. Физико-механические характеристики приняты для бетона класса прочности В25, для стали – как для арматуры А500 (см. табл.).

Таблица

Механические характеристики материалов

№	Материал	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	$E$ , ГПа	$\nu$	$\sigma_b$ , МПа	$\sigma_t$ , МПа	$\sigma_{T_1}$ , МПа
1	Бетон В25	2400	32	0,22	18,5	1,95	–
2	Арматура А500	7800	200	0,3	–	–	435

Для моделирования поведения тела бетонных конструкций использовался критерий прочности Уиллама–Варнке [17] и модель упругопластического течения Мизеса для стальной арматуры.

Грунтовые условия в смысле физико-механических параметров грунта для всех расчетных моделей приняты одинаковыми. Грунт моделируется линейно-упругой, однородной и изотропной средой. Модуль упругости грунта составляет 15 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3. Такие параметры справедливы для большого количества аллювиальных грунтов средней полосы. Что касается физически-нелинейного поведения грунтового массива, вида деформационного взаимодействия грунта основания с фундаментом и истории нагружения, то в данной работе этот аспект не рассматривается. Учет нелинейного поведения грунтового массива и разного вида взаимодействия с фундаментом снижают требования к предельным деформациям грунта, окружающего фундамент здания [12]. Моделирование в данной работе осуществляется «с запасом».

### 3. Результаты и обсуждение

По результатам численных решений краевых задач моделирования деформационного поведения систем «здание – фундамент – грунтовое основание» получено распределение напряжений в несущих элементах железобетонных каркасов в зависимости от деформаций

грунта в окрестности фундаментов разного типа. Оценка несущей способности проводилась по результатам сравнения эквивалентных напряжений по теории Мора для хрупких тел (3) с предельно допустимыми напряжениями для железобетонной конструкции в области растяжения или сжатия в зависимости от процента армирования сечения с учетом правила смеси. Железобетонные элементы моделировались в объемной постановке с обобщенными физико-механическими характеристиками. Таким образом, установлено соответствие деформационного состояния грунта в окрестности фундамента предельному НДС здания. Например, предельные деформации грунта основания в окрестности фундамента для монолитного железобетонного каркаса высотой 5 этажей, с шагом несущих элементов 6 метров, с сечением колонн-пилонов 300×600 мм составили примерно 6,2 мм/м. Под предельными деформациями грунта подразумеваются деформации, которые соответствуют величине предельных эквивалентных напряжений, в расчете которых используются прочностные характеристики бетона и арматуры, соответствующие второй группе предельных состояний (см. табл.) [18]. Подобным образом определены предельные деформации грунта для различных вариаций конструктивного исполнения зданий на разных типах фундаментов.

Далее для получения более качественной оценки процесса деформирования ж/б элементов монолитных сооружений численно были решены краевые задачи деформационного поведения узлов сопряжения монолитных ж/б колонн с дисками перекрытия (узел 1 на рис. 2) и плитой фундамента (узел 2 на рис. 2). Численно решение было получено с учетом физически-нелинейного деформирования как тела бетона, так и тела арматуры. Были созданы модели несущих элементов в виде фрагментов конструктива. Граничные условия и параметры нагружения приняты на основании предыдущих расчетов в серии более общих постановок. Ставилась задача моделирования процесса разрушения фрагмента несущего каркаса под действием НДС, вызванного условиями подработки грунтового массива. Использовано три принципиально разных схемы нагружения. Первая – изгиб колонны вдоль длинной стороны с учетом вертикального усилия, вторая – косою изгиб колонны с учетом вертикального усилия, третья – косою изгиб колонны. Задачи были решены с учетом сил инерции методом анализа переходных процессов вплоть до полного разрушения несущих элементов. На рис. 3 представлены изополя интенсивности общих деформаций  $\epsilon_{int}$  для одного из шагов нагружения в случае первого варианта условий нагружения.

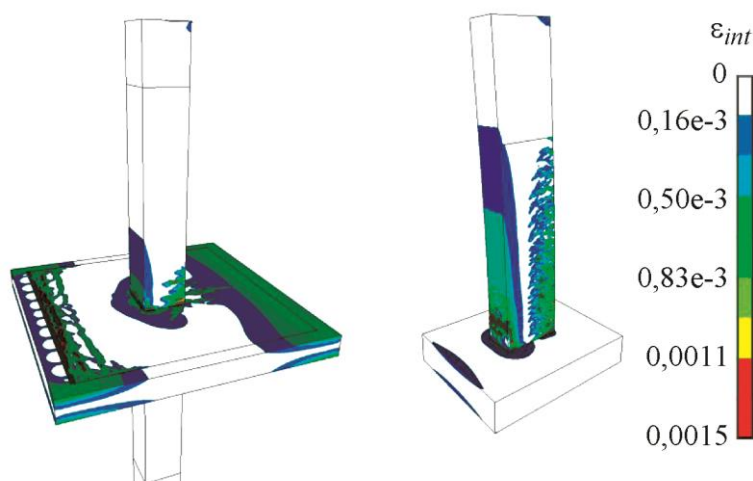


Рис. 3. Интенсивность общих деформаций при изгибе колонны среднего этажа (а) и нижнего этажа (б)

По результатам решения были построены зависимости относительной жесткости несущих фрагментов и энергии деформирования от шагов нагружения, которые соответствуют доли приращения нагрузки (рис. 4 – результаты для варианта сопряжения «колонна – фундаментная плита»). Линия 1 – изгиб колонны вдоль длинной стороны с учетом вертикального усилия, линия 2 – косой изгиб колонны с учетом вертикального усилия, линия 3 – косой изгиб колонны. Линия 4 на рис. 4 – результат решения в линейно-упругой постановке, необходимый для определения относительной жесткости фрагмента. Результаты приведены для колонн с сечением 300×600 мм и процентом армирования 7. Остальные физико-механические характеристики соответствуют значениям, представленным в таблице.

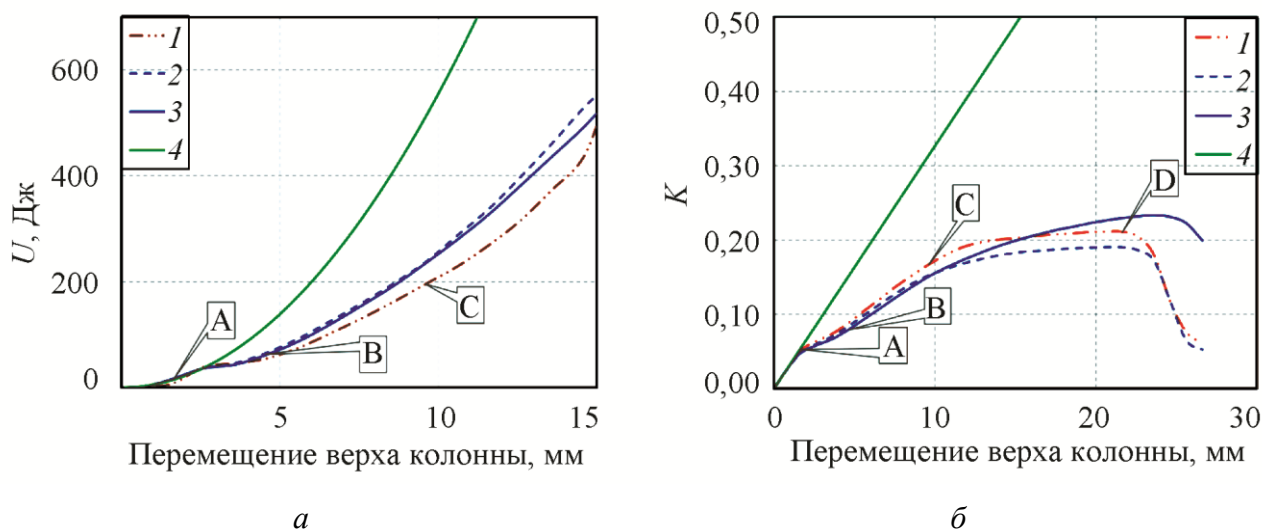


Рис. 4. Зависимости: энергии деформирования (а) и относительной жесткости фрагмента (б) от величины нагружения

Относительная жесткость  $K$  определена как отношение суммарной реакции в колонне в случае нелинейного расчета к реакции, полученной по результатам расчета в упругой постановке для соответствующих шагов нагружения. Энергия деформирования рассчитана для объема колонны в месте сопряжения с плитой. Высота фрагмента, для которого оценивается величина энергии деформирования, составила 700 мм. По результатам расчетов и оценке относительной жесткости видно, что до определенного шага нагружения (точка А на графике) фрагмент ведет себя как упругое тело, на последующих шагах нагружения (вплоть до точки В) жесткость фрагмента снижается, что связано с ростом трещин и увеличением их количества в растянутой зоне сечения колонны. По достижении шага нагрузки, который соответствует точке В, в работу включается арматура колонны в растянутой зоне сечения, забирая на себя существенную часть энергии деформирования, что приводит к увеличению жесткости несущего фрагмента относительно предыдущих шагов нагружения. Также на участке нагружения между точкой В и точкой С в сжатой зоне сечения начинают накапливаться дефекты. Их рост начинается с углов колонны, в месте сопряжения с фундаментной плитой. Зона разрушения в области сжатия на данном участке локализуется в области защитного слоя арматуры и не выходит за него. Также продолжают расти зоны трещинообразования в растянутой области сечения колонны и постепенное нагружение растянутой арматуры. После достижения шага нагружения, соответствующего точке С на графике, область разрушенного бетона в зоне сжатия распространяется на остальное сечение колонны и уходит за сжатую арматуру вглубь колонны, включая ее в работу. Общая жесткость фрагмента существенно снижается. В работу включается сжатая арматура, забирая на себя существенную часть энергии деформирования. Дефекты в

растянутой и сжатой зонах колонны растут в объеме. Такое деформирование продолжается вплоть до точки D на графике, которая соответствует общей потере несущей способности фрагмента ввиду утраты целостности и началу пластических деформаций в арматуре. До точки D на всем интервале нагружения арматура деформировалась как упругое тело.

Видно, что вне зависимости от вида нагружения графики относительной жесткости фрагмента и энергии деформирования на этапах нагружения, которые соответствуют точке A и точке C, достаточно близки. Это позволяет сделать предположение о том, что для данного типа конструктива ж/б фрагмента (сопряжение «колонна – фундаментная плита») величина предельной энергии деформирования, которая определяет несущую способность фрагмента, в меньшей степени зависит от формы нагружения, чем от характеристик самого фрагмента – вида бетона, типа и процента армирования, а также геометрических размеров. Такой вывод позволяет предложить энергетический критерий оценки несущей способности ж/б каркасов в виде предельной величины энергии деформирования. Подобный подход использовался и другими авторами для оценки перехода сложных систем к предельному состоянию [19, 20].

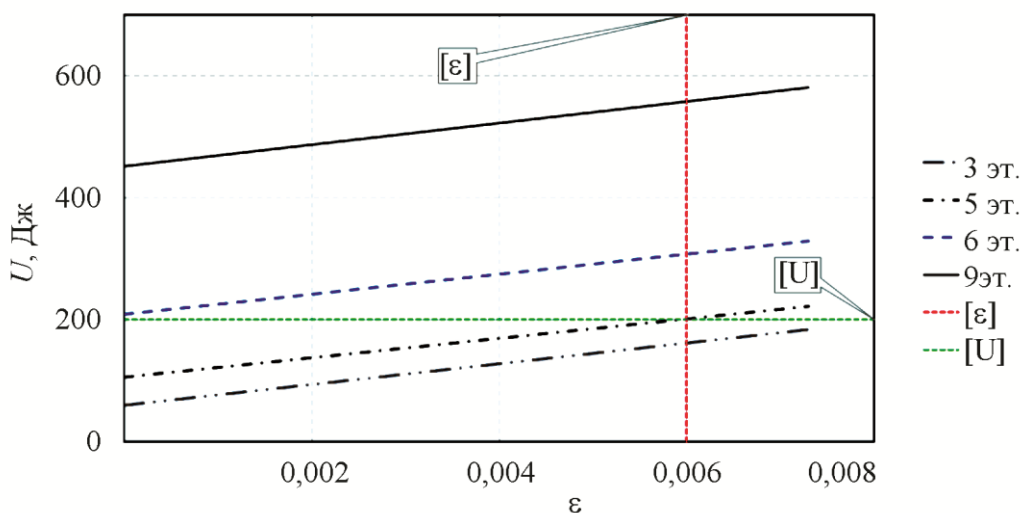


Рис. 5. Энергия деформирования объема размером 300×600×700 мм самой нагруженной колонны в зависимости от деформаций грунтового массива в окрестности фундамента

В качестве примера можно привести сравнение энергий деформирования соответствующего объема несущих колонн первого этажа монолитных железобетонных каркасов разной этажности: энергии, рассчитанной по результатам решения первой краевой задачи и энергии, вычисленной по результатам решения задачи о деформировании фрагмента. Под предельной энергией деформирования  $U$  будем подразумевать величину энергии, которой соответствует среднее положение точки C на рис. 4 а для разных вариантов нагружения. Эта величина предвещает существенную потерю относительной жесткости фрагмента «колонна – фундаментная плита» (точка C на рис. 4 б). В данном случае для описанных свойств колонны и заданного процента армирования (7 %) величина предельной энергии деформирования составит примерно 200 Дж. Из рис. 5 видно, что в случае решения общей краевой задачи деформирования целого каркаса сооружения, в частности для варианта пятиэтажного здания с пролетами величиной 6 метров, данной величине энергии соответствует величина предельных деформаций грунтового массива, равная 6 мм/м. Данные результаты хорошо согласуются с оценкой предельных деформаций грунтового массива по эквивалентным напряжениям в элементах монолитного каркаса для целого здания. В том случае величина  $\epsilon$  составила 6,2 мм/м. Таким образом, сопряжение решений



двух краевых задач на разных масштабных уровнях можно осуществлять посредством сравнения энергий деформирования соответствующих конструктивных элементов.

#### 4. Заключение

Для решения проблемы определения критических уровней деформаций монолитных железобетонных зданий на подработанных территориях был предложен подход, позволяющий проводить данные оценки за счет рассмотрения нескольких краевых задач на различных уровнях детализации и дискретизации расчетной модели.

В ходе исследования в нелинейной постановке численно решена задача о деформировании несущих железобетонных фрагментов монолитных сооружений в предкритической и критической зонах нагружения с учетом поэтапного роста областей разрушения в зависимости от приращения нагрузки. Предложен алгоритм оценки несущей способности каркаса всего здания на основе данных численных экспериментов с помощью энергетического критерия. Данный подход позволяет построить зависимости напряженного состояния в несущих элементах каркасов от деформаций грунта в окрестности фундаментов зданий разных типов и различной этажности и, таким образом, дополнить существующую нормативную документацию по предельным и допустимым деформациям грунта в зоне подработки.

#### Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания ПФИЦ УрО РАН (номер темы АААА-А19-19012290100-8).*

#### Литература

1. Гусев Г. Н., Епин В. В., Цветков Р. В. Результаты многолетних наблюдений неравномерных осадок зданий, находящихся на территории Верхнекамского калийного месторождения в г. Березники // Изв. УГГУ. – 2022. – № 3 (67). – С. 80–89.
2. Нестерова В. Ю., Барсуков И. В., Стрюков Ю. Н. Оценка влияния подземных горных работ на состояние зданий и сооружений на земной поверхности на угольных месторождениях // Уголь. – 2014. – № 10 (1063). – С. 29–34.
3. Samsonov S., Baryakh A. Estimation of deformation intensity above a flooded potash mine near Berezniki (Perm Krai, Russia) with SAR interferometry // Remote Sensing. – 2020. – Vol. 12 (19). – P. 3215. – DOI: 10.3390/rs12193215.
4. Барях А. А., Тенисон Л. О., Самоделкина Н. А. К определению горизонтальных деформаций подработанных территорий // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 11. – С. 5–18. – DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_11\_0\_5.
5. Харисова О. Д. Мониторинг пространственных деформационных процессов подрабатываемых сооружений // Проблемы недропользования. – 2018. – № 3 (18). – С. 81–88. – DOI: 10.25635/2313-1586.2018.03.081.
6. Указания по допустимым условиям подработки эксплуатируемых зданий и сооружений на Верхнекамском месторождении калийных солей. – СПб., 2008. – 45 с.
7. СП 21.13330.2012. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах. – URL: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293801/4293801657.pdf>
8. ТСН 22-301-98. Здания на подрабатываемых территориях Верхнекамского месторождения калийных солей. Назначение строительных мер защиты. – URL: <https://meganorm.ru/Index2/1/4294850/4294850011.htm>
9. Руководство по проектированию зданий и сооружений на подрабатываемых территориях. Часть II. Промышленные и гражданские здания. – Москва : Стройиздат, 1986. – 304 с.

10. Разводовский Д. Е. Допустимые деформации существующей застройки // Вестник НТЦ «Строительство». – 2017. – № 2 (13). – С. 106–121.
11. Кашеварова Г. Г., Сон М. П. Методика определения предельно допустимых деформаций панельных зданий, эксплуатируемых на подработанной территории // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Строительство и архитектура». – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 22–26.
12. Деформационное взаимодействие панельных жилых домов с грунтом в зоне техногенного воздействия / Г. Н. Гусев, И. Н. Шардаков, А. А. Барях, И. О. Глот // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 1. – С. 36–45. – DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.3.
13. Яркин В. В., Лобачева Н. Г. Моделирование неравномерных деформаций основания фундаментов в сложных инженерно-геологических условиях // Жилищное строительство. – 2022. – № 12. – С. 15–25. – DOI: 10.31659/0044-4472-2022-12-15-25.
14. Татаркин А. В. Оценка системы «фундамент–грунтовое основание» // Геотехника. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 52–62. – DOI: 10.25296/2221-5514-2019-11-3-52-62.
15. Колчунов В. И., Мартыненко Д. В. Деформирование и трещинообразование конструкции платформенного стыка в сборно-монолитном каркасе здания // Строительство и реконструкция. – 2020. – № 4 (90). – С. 38–47. – DOI: 10.33979/2073-7416-2020-90-4-38-47.
16. Фан Д. Г., Ильющенко Т. А., Амелина М. А. Силовое сопротивление железобетонных каркасов многоэтажных зданий с косвенным армированием в запредельных состояниях // Строительство и реконструкция. – 2022. – № 3 (101). – С. 87–97. – DOI: 10.33979/2073-7416-2022-101-3-87-97.
17. Willam K. J., Warnke E. P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, Bergamo, Italy. – 1975. – Vol. 19. – P. 1–30.
18. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. – URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293732/4293732352.pdf>
19. Ступишин Л. Ю. Прогрессирующее предельное состояние конструкций на критических уровнях внутренней потенциальной энергии деформации // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 10. – С. 1324–1336. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.10.1324-1336.
20. Ступишин Л. Ю. Предельное состояние строительных конструкций и критические уровни энергии // Промышленное и гражданское строительство. – 2018. – № 10. – С. 102–106.

**Received:** 20.02.2023

**Revised:** 17.04.2023



**Accepted:** 28.04.2023

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.2.019-040

## APPLYING THE METHOD OF VIRTUAL ELEMENTS TO SOLVING CONTACT PROBLEMS OF SHELLS OF REVOLUTION INTERACTING WITH SURFACES OF INCONSISTENT SHAPE

I. G. Emelyanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  [emelyanov@imach.uran.ru](mailto:emelyanov@imach.uran.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [emelyanov@imach.uran.ru](mailto:emelyanov@imach.uran.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia  
Tel.: +7 (343) 362-3018; fax: +7 (343) 347-5330

An approach based on the method of virtual elements is used to solve the contact problem for a thin shell of revolution lying on a rigid foundation. In this case, the surface of the base has a shape inconsistent with the surface of the shell. The method makes it possible to determine the contact area and the contact pressure from the contact area unknown in two coordinate directions. Since the contact area is not known in advance, the problem is structurally nonlinear. A thin isotropic shell is described by the classical theory based on the Kirchhoff–Love hypotheses. The base is taken absolutely rigid, but with the presence of an elastic gasket. The shell equations are integrated by S. K. Godunov’s method of discrete orthogonalization. To determine the forces of interaction between the shell and the base, a mixed method of structural mechanics is used. With this aim in view, the maximum possible contact area is discretized by virtual rectangular elements. A constant value of the contact pressure is assumed on each element obtained in this area, and the contact pressure is assumed to be zero on the elements in the area where the shell leaves the base. Based on the assumptions, a system of linear algebraic equations is constructed, which determines the contact pressure and deflection of the shell circumference axis. Since the shell can move away from the base, iterative procedures are applied to search for the real contact area, which depends on the geometric and elastic parameters of the shell and the magnitude of the external load. As an example, the contact interaction of a cylindrical shell (part of the shell of a tank car) lying on a rigid base with a gasket is considered. It is shown how the contact area and contact pressure change depending on the rigidity of the gasket and the difference between the radii of the shell and the base (inconsistency in the shape of the surfaces).

**Keywords:** contact problem, shell of revolution, contact pressure, Fredholm equation, Green’s function, regularization parameter, virtual element, mixed structural mechanics method, Godunov’s discrete orthogonalization method.

### Acknowledgment

*The study was carried out in accordance with state assignment No. AAAA-A18-118020790140-5 for the IES UB RAS.*

### References

1. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., eds. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Mechanics of Contact Interactions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 672 p. (In Russian).

2. Johnson K.L. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985, 452 p.
3. Bourago N.G., Kukudzhinov V.N. A review of contact algorithms. *Mech. Solids*, 2005, 40 (1), 35–71.
4. Kikuchi N., Oden J.T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia, 1988, 485 p.
5. Aliabadi M.H. and Brebbia C.A., eds. *Computational Methods in Contact Mechanics*, Southampton, Boston, Computational Mechanics Publ., Cop., 1993, 352 p.
6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, 92, 156–171.
7. Shtaerman I.Ya. *Kontaknaya zadacha teorii uprugosti* [Contact Problem of the Theory of Elasticity]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, 270 p. (In Russian).
8. Grigolyuk E.I. and Tolkachev V.M. *Contact Problems in the Theory of Plates and Shells*. Moscow, Mir Publ., 1987, 424 p.
9. Kantor B.Ya. *Kontaktnye zadachi nelineinoi teorii obolochek vrashcheniya* [Contact Problems for Nonlinear Theory of Revolving Shells]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1990, 136 p. (In Russian).
10. Artyukhin Yu.P., Malkin S.A. *Analiticheskie i chislennye metody integralnykh uravneniy v zadachakh uprugogo vozdeistviya tel* [Analytical and Numerical Methods for Solving Integral Equations in Problems of Elastic Action of Bodies]. Kazan, Kazanskiy Gos. Un-t Publ., 2007, 292 p. (In Russian).
11. Lukasevich S. *Lokalnye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local Loads in Plates and Shells]. Moscow, Mir Publ., 1982, 544 p. (In Russian).
12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of Solving Ill-Posed Problems], 2nd edition, Moscow, Nauka Publ., 285 p. (In Russian).
13. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, 518 p. DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0.
14. Podgornyy A.N., Gontarovskiy P.P., Kirkach B.N., Matyukhin Yu.I., Khavin G.L. *Zadachi kontaknogo vzaimodeystviya elementov konstruksiy* [The Tasks of Contact Interaction of a Construction Elements]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989, 232 p. (In Russian).
15. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Emel'yanov I.G. et al. *Statika elementov konstruksiy* [Statics of Structural Members. Vol. 8 of the 12-Volume Series Mechanics of Composites]. Kiev, A.S.K. Publ., 1999. (In Russian).
16. Emel'yanov I.G. Numerical analysis of contact interaction of cylindrical shells. *Soviet Applied Mechanics*, 1987, 23, 569–573. DOI: 10.1007/BF00887024.
17. Emelyanov I.G. A study of contact interaction of two-layer shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, 37, 129–134. DOI: 10.1007/BF02369412.
18. Emelyanov I.G. Contact interaction of shells of revolution over unknown two-dimensional regions. *International Applied Mechanics*, 1997, 33, 548–555. DOI: 10.1007/BF02700735.
19. Emelyanov I.G. Investigation into the contact interaction between shell and base with notches. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, 44, 263–270. DOI: 10.3103/S1052618815030048.
20. Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V. Application of virtual elements for determination of stress state of rotational shells. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, 7 (3), 245–252. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.24. (In Russian).
21. Emelyanov I.G. Application of discrete Fourier series to the stress analysis of shell structures. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, 8 (3), 245–253. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20. (In Russian).

22. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. *Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti* [Theory of Shells of Variable Stiffness. Vol. 4. Methods of Shell Design]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1981, 544 p. (In Russian).
23. Godunov S.K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, 16, 3 (99), 171–174. (In Russian).
24. Timoshenko S., Gere J. *Mechanics of Materials*, 2nd ed., Monterey (Calif.), Brooks/Cole engineering div., 1984, 762 p.
25. Mossakovsky V.I., Hudramovych V.S., and Makeev E.M. *Kontaktnoe vzaimodeistvie elementov obolocheknykh konstruktsiy* [Contact Interactions of Elements of Shell Structures]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, 288 p. (In Russian).
26. Petrovsky I. G. *Leksii po teorii integralnykh uravneniy* [Lectures on the Theory of Integral Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1965, 128 p. (In Russian).
27. Gallagher R.H. *Finite Element Analysis: Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975, 420 p.
28. Rabinovich I.M. *Voprosy teorii staticheskogo rascheta sooruzheniy s odносторонnimi svyazyami* [Problems in the Theory of Static Calculation of Structures with One-Way Communications]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1975, 144 p. (In Russian).

Подана в журнал: 20.02.2023



УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.019-040

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПОВЕРХНОСТЯМИ НЕСОГЛАСОВАННОЙ ФОРМЫ

И. Г. Емельянов

*Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  [emelyanov@imach.uran.ru](mailto:emelyanov@imach.uran.ru)

\* Ответственный автор. Эл. почта: [emelyanov@imach.uran.ru](mailto:emelyanov@imach.uran.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-18; факс: +7 (343) 347-53-30

В работе подход, основанный на методе виртуальных элементов, используется для решения контактной задачи для тонкой оболочки вращения, лежащей на жестком основании. При этом поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму. Метод позволяет определить область контакта и контактное давление по неизвестной по двум координатным направлениям области контакта. Поскольку область контакта заранее неизвестна, то задача является конструкционно нелинейной. Тонкая изотропная оболочка описывается классической теорией, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Основание принимается абсолютно жестким, но с наличием упругой прокладки. Интегрирование уравнений оболочки осуществляется с использованием метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова. Для определения усилий взаимодействия между оболочкой и основанием используется смешанный метод строительной механики. Для этого проводится дискретизация максимально возможной области контакта виртуальными прямоугольными элементами. На каждом полученном элементе в данной области принимается постоянное значение контактного давления, а на элементах в области отхода оболочки от основания контактное давление принимается равным нулю. На основе принятых допущений построена система линейных алгебраических уравнений, которая определяет контактное давление и прогиб оси окружности оболочки. Поскольку возможен отход оболочки от основания, то затем применяются итерационные процедуры поиска реальной области контакта, которая зависит от геометрических и упругих параметров оболочки и величины внешней нагрузки. В качестве примера рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки (часть обечайки вагона-цистерны), лежащей на жестком основании с прокладкой. Показано, как изменяются область контакта и контактное давление в зависимости от жесткости прокладки и разности радиусов оболочки и основания (несогласованности формы поверхностей).

**Ключевые слова:** контактная задача, оболочка вращения, контактное давление, уравнение Фредгольма, функция Грина, параметр регуляризации, виртуальный элемент, смешанный метод строительной механики, метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова.

### 1. Введение

Задачи об оценке напряженного состояния контактирующих элементов конструкций, а также задачи о плотности их соединений (т. е. задачи с односторонним механическим взаимодействием между элементами конструкций) обычно называют контактными задачами.

Контактные задачи механики деформируемого твердого тела обычно содержат граничные условия в виде неравенств, которые определяют области взаимодействующих тел, и возможные граничные сингулярности. Эти граничные условия выражают условия непроникновения: третий закон Ньютона о равенстве действия и противодействия и закон поверхностного трения.

Прикладное значение контактных задач трудно переоценить, поскольку любая конструкция обычно представляет собой совокупность элементов, каким-либо образом закрепленных в пространстве и контактирующих при эксплуатации. Достаточно часто области контакта и распределение контактного давления между элементами заранее неизвестны. При этом экспериментальными методами распределение контактной нагрузки точно определить достаточно трудно.

Литературу по различным постановкам контактных задач механики деформируемого твердого тела (в дифференциальной, интегральной и вариационной форме) можно найти, например, в работах [1, 2], а по контактными алгоритмам – в [3, 4, 5].

Впервые задача о контакте упругих тел, первоначально соприкасавшихся в точке, была поставлена и решена Генрихом Герцем [6]. С появлением этой работы начала формироваться область механики деформируемого твердого тела – механика контактного взаимодействия. Теория Герца базируется на допущении малости области контакта по сравнению с размерами контактирующих тел. Такое допущение позволило воспользоваться фундаментальным решением для полупространства при построении ядер интегральных уравнений. Классические решения Герца показывают, что наибольшее давление тело испытывает в середине области контакта для переменных областей, а для постоянных областей имеют место на границе неограниченные контактные напряжения [7]. Это обусловлено сингулярностью ядер исходных интегральных уравнений.

Контактные задачи для оболочек имеют свои специфические особенности по сравнению с аналогичными задачами для толстостенных конструкций [8, 9, 10]. Для пластин и оболочек характерно моментное напряженное состояние, которое вызывает поперечные деформации и обжатие. Однако при использовании гипотез Кирхгофа–Лява эти факторы не учитываются. Интегральные уравнения в рамках этих гипотез, определяющие одномерное контактное давление  $q$  для тонкостенного элемента, обычно сводятся к уравнениям Фредгольма первого рода [9]:

$$\int_{\omega} G(x, \xi) q(\xi) d\omega = g(x), \quad (1)$$

где  $G(x, \xi)$  – функция Грина, определяющая прогиб в точке  $x$  при действии в точке  $\xi$  сосредоточенной силы, нормальной к поверхности оболочки;  $\omega$  – область контакта;  $g(x)$  – выражение, описывающее форму поверхности основания и перемещение основания как твердого тела.

Для двумерного случая, например для пластины, интегральное уравнение (1) примет вид [11]

$$\int_{\omega} G(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\omega = g(x, y), \quad (2)$$

где функция Грина определяет прогиб в точке с координатами  $x, y$  от силы с координатами  $x = \xi, y = \eta$ .

Если интегральное уравнение (1) получено в рамках гипотез Кирхгофа–Лява, то оно имеет лишь обобщенное решение. Контактная реакция представляет собой сосредоточенные на границе области контакта силы, поэтому уравнение (1) является некорректным.

Контактную задачу теории оболочек можно сделать математически корректной методами регуляризации, сущность которых заключается в переходе от уравнений Фредгольма первого рода (1) к уравнениям Фредгольма второго рода:

$$Rq(x) + \int_{\omega} G(x, \xi)q(\xi)d\omega = g(x), \quad (3)$$

где  $R$  – параметр регуляризации [9, 12].

В контактных задачах получили распространение методы физической регуляризации [9]. Они основаны на уточнении физической постановки задачи. Один из них заключается в том, что в зоне контакта вводится упругий слой, учитывающий реальные свойства микрогеометрии контактирующих поверхностей. Параметр регуляризации определяется экспериментально и характеризует свойства поверхностей.

Другой метод физической регуляризации основан на учете в зоне контакта обжатия оболочки по толщине, которым классическая теория пренебрегает. При этом коэффициент регуляризации имеет другой физический смысл. Учет изменения расстояния между срединной и внешней поверхностями оболочки под действием контактного давления вносит необходимый вклад в интегральное уравнение и приводит его к уравнению Фредгольма второго рода.

Из (1) и (3) видно, что данные уравнения описывают контактные задачи только при жестком нагружении, нагрузка задается через перемещения  $g(x)$ . С учетом уравнений (2) и (3) записываются интегральные уравнения Фредгольма второго рода для двумерных контактных задач.

В прикладных задачах, когда тела имеют произвольные формы и различные граничные условия, ядро интегрального уравнения, являющееся функцией Грина, трудно определить. Поэтому для решения контактных задач стали широко использоваться численные методы: метод конечных элементов [4, 13, 14], метод граничных элементов [10], метод дискретной ортогонализации [9, 15].

В общем случае контакт оболочки может происходить как по согласованной, так и по несогласованной поверхности. Контакт называется согласованным, если поверхности обоих тел в недеформированном состоянии точно «подогнаны» друг к другу. Тела, имеющие различные по форме профили, называются несогласованными [2]. Известно, что тела несогласованной формы первоначально вступают в контакт в точке или по линии. Под действием внешней нагрузки они деформируются в окрестности точки начального контакта и приходят в соприкосновение по некоторой конечной области.

В данной работе предлагается подход, основанный на методе виртуальных элементов, использовать при решении контактной задачи для тонкой цилиндрической оболочки, лежащей на жестком основании. При этом поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму.

Впервые метод виртуальных (вначале использовался термин «контактных») элементов был предложен для решения одномерных контактных задач, в которых область контакта неизвестна по одному координатному направлению [16]. Затем метод был обобщен для решения двумерных контактных задач, в которых область контакта неизвестна по двум координатным направлениям [15, 17, 18, 19]. В работе [20, 21] для решения контактных задач было предложено использовать термин «виртуальный элемент».

Устойчивость и сходимость метода, а также сопоставление результатов исследования задачи предложенным методом с результатами исследований другими аналитическими и численными методами в данной работе не обсуждаются, поскольку в работах [15–21] и др. этому вопросу уделено значительное внимание, и доказана устойчивость и сходимость метода.



Применение метода виртуальных элементов в данной работе позволило определить область контакта и распределение контактного давления для оболочек, взаимодействующих по несогласованной поверхности контакта. При этом несогласованные поверхности контактирующих тел могут иметь первоначальные зазоры произвольной формы, т. е. поверхности могут быть топографически негладкими. В работе область контакта определяется по двум координатным направлениям. Также в работе проведена аналогия между интегральными уравнениями Фредгольма второго рода и разрешающими уравнениями метода виртуальных элементов для одномерных контактных задач.

## 2. Постановка задачи и метод виртуальных элементов

Рассмотрим задачу для тонкой изотропной цилиндрической оболочки, лежащей на жестком основании шириной  $b$ . Задача состоит в определении контактного давления по неизвестной области контакта  $\omega$  и, при необходимости, напряженного состояния рассматриваемой оболочки. Такая область контакта  $\omega$ , например, будет образовываться между цилиндрической оболочкой с внешним радиусом  $R_2$ , нагруженной внешней распределенной силой  $p$ , и основанием с радиусом  $R_1$  (рис. 1). При  $R_1 \neq R_2$  поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму, т. е. имеется зазор в недеформированном состоянии. Однако даже при  $R_1 = R_2$  область контакта может быть неизвестна, поскольку при различных жесткостных параметрах взаимодействующих тел и видах внешней силы  $p$  возможны зоны отхода оболочки от основания.

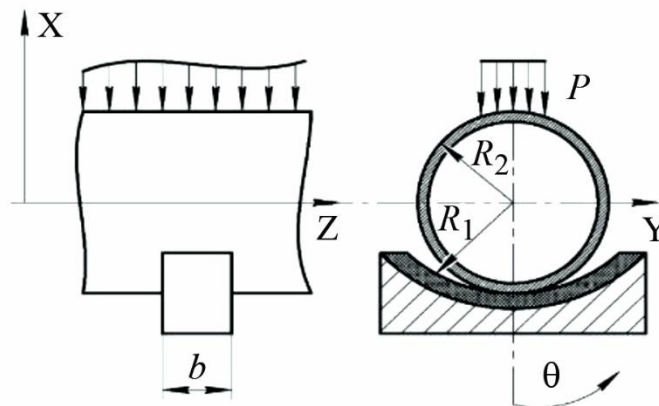


Рис. 1. Оболочка вращения, лежащая на основании с шириной  $b$

Координатную поверхность оболочки вращения отнесем к криволинейной ортогональной системе  $s$  и  $\theta$ , где  $s$  – длина дуги меридиана (для цилиндрической оболочки  $s = z$ ),  $\theta$  – центральный угол в параллельном круге (рис. 2)

Система равновесия для контактирующей оболочки имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\bar{Y} &= \bar{f} + q\lambda\Lambda \\ \lambda(s, \theta \in \omega) &= 1, \\ \lambda(s, \theta \notin \omega) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\mathfrak{Z}$  – матричный дифференциальный оператор;  $\bar{Y}$  – вектор разрешающих функций;  $\bar{f}$  – вектор внешней нагрузки;  $\Lambda$  – столбец, элемент которого, отвечающий уравнению равновесия в проекции на нормаль к поверхности, равен единице, а остальные элементы – нулю;  $q$  – контактная нагрузка, действующая по нормали.

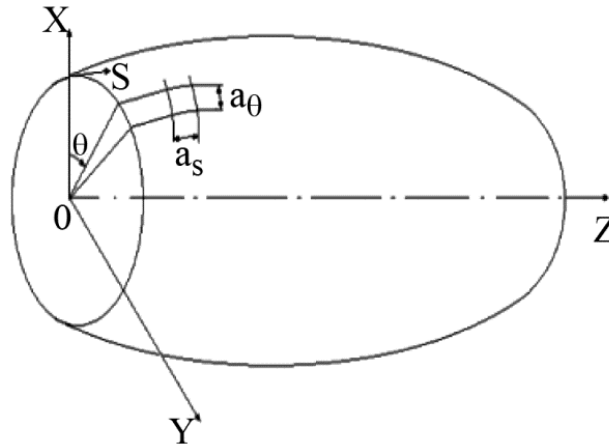


Рис. 2. Координатная поверхность оболочки вращения в криволинейной ортогональной системе  $s$  и  $\theta$

Для описания тонкой оболочки вращения воспользуемся классической теорией, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Тогда задача определения напряженно-деформированного состояния оболочки с параметрами, переменными вдоль образующей, будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [15, 22]:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s, \theta) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta), \quad (5)$$

$$\bar{Y} = \{N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s\},$$

где  $N_r, N_z$  – радиальное и осевое усилия;  $u_r, u_z$  – аналогичные перемещения;  $\hat{S}$  – сдвигающее усилие;  $M_s$  – меридиональный изгибающий момент;  $v$  – окружное перемещение;  $\vartheta_s$  – угол поворота нормали. Элементы матрицы  $A_m$  зависят от геометрических и механических характеристик оболочки.

Учитывая уравнения (3) и (4), можно записать [19]:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s, \theta) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta) + \lambda E \bar{q}(s, \theta), \quad (6)$$

$$\bar{q} = \{q, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Таким образом, система (6) описывает напряженно-деформированное состояние оболочки вращения, на которую действуют внешние силы  $\bar{f}$  и контактное давление. Однако проинтегрировать систему (6) нет возможности, поскольку неизвестны область контакта  $\omega$  и закон распределения контактного давления по ней  $q(s, \theta)$ .

Для определения  $q(s, \theta)$  будем использовать метод виртуальных элементов. Известно, что все многообразие внешних силовых воздействий на оболочку  $\bar{f}$  в системе (5) можно представить в виде компонентов распределенной нагрузки: касательной к образующей  $g_s$ , касательной к направляющей  $g_\theta$ , нормальной к поверхности оболочки  $g_r$ . Эти компоненты можно представить в виде разложения [22]:

$$g_s = \sum_{k=0}^{\infty} g_s(s) \cos k\theta, \quad g_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} g_\theta(s) \sin k\theta, \quad g_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} g_\gamma(s) \cos k\theta, \quad (7)$$

где  $k$  – номер гармоники.

В силу периодичности компонентов поверхностной нагрузки все функции, определяющие напряженно-деформированное состояние оболочки, можно разложить в ряд Фурье по окружной координате  $\theta$ :

– для симметричных компонент вектора разрешающих функций  $N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta_s$

$$\Phi(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(s) \cos k\theta, \quad (8)$$

– для антисимметричных компонент вектора разрешающих функций  $\hat{S}, v$

$$\Psi(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(s) \sin k\theta. \quad (9)$$

Раскладывая компоненты внешней нагрузки и искомые функции в системе (5) в ряды Фурье по окружной координате  $\theta$  и разделяя переменные для каждого члена разложения, имеем разрешающую систему обыкновенных уравнений восьмого порядка [15, 22]

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = A_k(s)\bar{Y}_k + \bar{g}_k(s), \quad (10)$$

$$(k = 0, 1, 2 \dots), \quad A_K(s) = \|a_{ij}^{(k)}(s)\|, \quad s_0 \leq s \leq s_L, \quad (i, j = 1, 2 \dots 8), \quad \bar{g}_k = \{g_{1k} \dots g_{8k}\},$$

с граничными условиями

$$B_1 \bar{Y}(s_0) = \bar{b}_1$$

$$B_2 \bar{Y}(s_L) = \bar{b}_2.$$

Здесь  $B_1, B_2$  – заданные матрицы;  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – заданные векторы;  $\bar{g}(s)$  – вектор, учитывающий известную внешнюю нагрузку;  $L$  – длина оболочки,  $a_{ij}^{(k)}$  – компоненты матрицы жесткости оболочки.

Система (10) может быть проинтегрирована с использованием метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова [22, 23], если известны все компоненты нагрузки. Таким образом, чтобы замкнуть систему (6), необходимо определить контактное давление  $q(s, \theta)$ , распределенное по некоторой неизвестной пока области контакта  $\omega$ .

Проведем дискретизацию максимально возможной области контакта  $\omega_{\max}$  ( $N \times K$ ) прямоугольными элементами ( $N, K$  – число элементов по окружности и меридиану). Для задачи, показанной на рис. 1, максимальная физически возможная область контакта  $\omega_{\max}$  ограничена размерами ширины основания  $b$  и  $2t_\theta$  ( $2t_\theta = \pi R_2$  – размер по направлению окружной координаты  $\theta$ ). Таким образом, область  $\omega_{\max}$  можно представить в виде совокупности виртуальных элементов с размерами  $a_s$  и  $a_\theta$  (рис. 2). На каждом виртуальном элементе примем постоянное значение контактного давления  $q > 0$ . На элементах в области возможного отстава-

ния оболочки от основания примем  $q = 0$ . Таким образом, взаимодействие оболочки и основания может быть представлено конечным числом усилий  $X_{ij}$ , приложенных на виртуальных элементах по всей области  $\omega_{\max}$ :

$$X_{ij} = q_{ij}a, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots K,$$

Где  $a = a_\theta \times a_s$  – площадь виртуального элемента;  $q_{ij}$  – контактное давление, действующее на виртуальном элементе.

Для определения усилий взаимодействия между оболочкой и основанием воспользуемся методом сил, который применяется в строительной механике [24]. Выделим из области  $\omega_{\max}$  одно полукольцо шириной  $a_s$ . Для полученного кольца составим систему уравнений равновесия методом сил:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \delta_{2i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_2 + DX_2^{(1)} &= 0, \\ &\dots, \\ \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – перемещение в основной системе по направлению  $i$ -й связи от единичного усилия, введенного по направлению  $j$ -й связи;  $Z$  – перемещение оболочки как жесткого тела в вертикальном направлении. Верхний индекс в скобках обозначает номер кольца, следовательно  $X_i^{(j)} = X_{ij}$ .

Оператор  $D$  является аналогом параметра регуляризации. Он учитывает деформирование микрогеометрии поверхности основания или оболочки. Будем использовать простейшую модель для учета упругих свойств основания. Модель линейного деформирования основания – модель Винклера. Следовательно, согласно [9, 25],  $D$  можно представить как

$$D = \frac{1}{ca}, \tag{12}$$

где  $c$  – коэффициент постели;  $a$  – площадь виртуального элемента.

Коэффициенты  $\delta_{ij}$  в системе (11) определяются путем интегрирования системы (10) после подстановки единичных усилий  $P_1^* = 1$ . Единичная сила  $P_1^*$  представляется в виде поверхностной нагрузки, распределенной на виртуальном элементе с площадью  $a$ , то есть в виде разложения в ряд Фурье

$$q_1^* = \frac{P_1^*}{\pi R_1 a_s} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_f} \frac{2 \sin(k\Delta\theta/2)}{k\Delta\theta} \cos k\theta \right\}, \tag{13}$$

где  $\Delta\theta$  – угол, который стягивает виртуальный элемент;  $n_f$  – количество удерживаемых гармоник.

Таким образом, после интегрирования системы (10) определяем матрицу радиальных перемещений для исследуемой оболочки  $w_{ij} = u_{r_{ij}}$ , которые равны коэффициентам  $\delta_{ij}$  в системе (11).

### 3. Связь между интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями

Известно, что существует аналогия между линейными интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями [26]. Уравнение Фредгольма второго рода (3), определяющее распределение контактного давления, представим в виде

$$q(x) = -\frac{1}{R} \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi + \frac{1}{R} g(x), \quad (14)$$

где  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$ .

Если интервал  $(a, b)$  разбить на  $N$  интервалов, то длина их будет равна

$$\frac{b-a}{N} = \Delta x = \Delta \xi.$$

Представим [26]:

$$G(a + i\Delta x, a + j\Delta \xi) = G_{ij}, \quad q(a + i\Delta x) = q_i, \quad g(a + i\Delta x) = g_i \quad (i, j = 1 \dots N).$$

Заменим интеграл

$$\int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi$$

суммой

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \Delta \xi.$$

Следовательно, вместо интегрального уравнения (14) получим систему алгебраических уравнений

$$q_1 = -\frac{1}{R} \sum_{j=1}^N G_{1j} q_j \Delta \xi + \frac{1}{R} g_1, \quad (15)$$

...

$$q_N = -\frac{1}{R} \sum_{j=1}^N G_{Nj} q_j \Delta \xi + \frac{1}{R} g_N.$$

Заменяя в системе (11) усилия взаимодействия контактной нагрузкой  $q_i = X_i \Delta \xi^{-1}$ , имеем:

$$q_1^{(1)} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} q_i^{(1)} + \frac{1}{D\Delta\xi} Z^{(1)} \cos \theta_1, \quad (16)$$

....,

$$q_N^{(1)} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} q_i^{(1)} + \frac{1}{D\Delta\xi} Z^{(1)} \cos \theta_N.$$

Видно, что системы (15) и (16) совпадают с точностью до констант. Следовательно, система (11) является аналогом одномерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численно определенная функция  $\delta_{ij}$  для системы (11) является аналогом функции Грина  $G$ . Функция Грина краевой задачи для дифференциального уравнения есть фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Функция Грина позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям. Необходимо добавить, что только для ограниченного класса изотропных оболочек – прямоугольных пластин, круглых пластин, сферических оболочек, цилиндрических оболочек бесконечной длины – существуют аналитические выражения для функции Грина [8, 10, 11]. Для оболочек вращения конечной длины, оболочек с переменными параметрами вдоль образующей, анизотропных оболочек и т. д. построить аналитическую функцию Грина не представляется возможным. Однако численно определить такую функцию для любой оболочки, подчиняющейся гипотезам Кирхгофа–Лява, с переменными параметрами вдоль образующей достаточно просто, интегрируя систему (10) от нагрузки, выраженной соотношением (13). В этой универсальности и простоте заключается преимущество численных методов.

#### 4. Разрешающая система для двумерных контактных задач

В системе (11) внешнее усилие осуществляется в виде жесткого нагружения, т. е. за счет заданного перемещения  $Z$ . Однако в прикладных задачах нагружение оболочки обычно осуществляется за счет внешних механических сил. При использовании смешанного метода, применяемого в строительной механике [24], система (11) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \delta_{2i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_2 + DX_2^{(1)} &= 0, \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i^{(1)} = P^{(1)}.$$

Здесь  $P^{(1)}$  – проекция внешней силы на вертикальную ось  $x$ , которая действует на первое кольцо.

В этом случае в системе (17) перемещение  $Z$  будет неизвестной величиной. Если учесть влияние оставшихся колец на первое, то уравнения (17) примут вид

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \delta_{li}^{(j)} X_i^{(j)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} = 0,$$

...,

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \delta_{Ni}^{(j)} X_i^{(j)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i^{(1)} = P^{(1)}.$$

Уравнения (18) в матричном виде, учитывая симметрию задачи относительно вертикальной оси  $x$ , запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} [W_D^{(1)}] \{X\}^T - Z^{(1)} \{C\} &= 0 \\ \{C\}^T \{X^{(1)}\} &= 0,5P^{(1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь  $\{X\}^T = \{X_1^{(1)} \dots X_M^{(1)} \dots X_1^{(k)} \dots X_M^{(k)}\}$  – вектор размера  $M \times K$  неизвестных усилий,  $M = N/2$ ;  $Z^{(1)}$  – смещение центра окружности в первом кольце;  $\{C\}^T = \{\cos \theta_1 \dots \cos \theta_M\}$  – вектор косинусов;  $\{X^{(1)}\}^T = \{X_1^{(1)} \dots X_M^{(1)}\}$ ,

$$[W_D^{(1)}] = \begin{bmatrix} w_1^{(1)} + w_2^{(1)} + D & w_2^{(1)} + w_3^{(1)} & \dots & w_M^{(1)} + w_{M+1}^{(1)} \dots \\ & w_1^{(1)} + w_4^{(1)} + D & \dots & w_{M-1}^{(1)} + w_{M+2}^{(1)} \dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & \text{симм.} & \dots w_1^{(1)} + w_{2M}^{(1)} + D \dots \\ w_1^{(k)} + w_2^{(k)} & w_2^{(k)} + w_3^{(k)} & \dots & w_M^{(k)} + w_{M+1}^{(k)} \\ & w_1^{(k)} + w_4^{(k)} & \dots & w_{M-1}^{(k)} + w_{M+2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \text{симм.} & \dots w_1^{(k)} + w_{2M}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где  $w_i = \delta_{li} = u_{ri}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Система (19) состоит из  $M + 1$  уравнения и имеет  $M \times (K + 1)$  неизвестных. Используя блочный вид матрицы (20), уравнение (19) можно записать как

$$[H_{11} \ H_{12} \dots H_{1K}] \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(K)}\} \end{bmatrix} - Z^{(1)}\{C\} = 0.$$

После введения трехмерной индексации  $n, m, p$  ( $n = 1 \div 2M$  – номер элемента на окружности,  $m = 1 \div K$  – номер кольца,  $p = 1 \div K$  – номер кольца, на котором приложена единичная сила) матрица  $H$  будет иметь вид

$$H_{mp} = \begin{bmatrix} w_{1mp} + w_{2mp} + \delta_{mp}^* D & w_{2mp} + w_{3mp} & \dots & w_{Mmp} + w_{M+1,mp} \\ & w_{1mp} + w_{4mp} + \delta_{mp}^* D & \dots & w_{M-1,mp} + w_{M+2,mp} \\ & \dots & \dots & \dots \\ \text{симм.} & & & w_{1mp} + w_{2M,mp} + \delta_{mp}^* D \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В матрице (21)  $\delta_{mp}^*$  – символ Кронекера.

Аналогичным образом составляются уравнения для оставшихся  $K-1$  колец, и все уравнения сводятся в одну систему

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(k)}\} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \dots \\ Z^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \times \{C\} + \begin{bmatrix} \{0^{(1)}\} \\ \{0^{(2)}\} \\ \dots \\ \{0^{(k)}\} \\ -0.5P \end{bmatrix} = 0, \quad (22)$$

где  $P$  – проекция внешних сил на вертикальную ось  $x$ , действующих на оболочку.

Система (22) состоит из  $K \times (M+1)$  уравнений и имеет  $K \times (M+K)$  неизвестных величин. Однако, учитывая, что вектор  $\{Z\}^T = \{Z^{(1)} \dots Z^{(k)}\}$  имеет простой физический смысл (прогиб оси окружности) и что размер области  $b$  намного меньше длины оболочки  $L$ , можно принять

$$Z^{(j)} = Z^* = const, \quad j = 1 \dots K. \quad (23)$$

Учитывая допущение (23), систему (22), определяющую контактное давление и прогиб оси окружности  $Z$ , можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$[A]\{\hat{X}\} = \{B\}, \quad (24)$$

где



$$[A] = \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] & -\{C\}^T \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] & -\{C\}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] & -\{C\}^T \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{\hat{X}\}^T = \left\{ \{X^{(1)}\} \dots \{X^{(k)}\} Z^* \right\}, \quad \{B\}^T = -\left\{ \{0^{(1)}\} \dots \{0^{(k)}\} -0,5P \right\}.$$

### 5. Разрешающие уравнения для оболочек, контактирующих по поверхностям несогласованной формы

Во многих прикладных задачах контакт оболочки происходит по несогласованной форме поверхности основания, например, как сказано выше, из-за разности радиусов  $R_1 > R_2$  между оболочкой и основанием. Следовательно, для топографически гладких тел будет существовать первоначальный геометрический зазор в окружном направлении  $\Delta(\theta)$ . Также зазор  $\Delta(s)$  может появиться, если образующие оболочки и основания не совпадают в меридиональном направлении  $s$ . Например, если основание имеет конусность, то зазор будет зависеть от меридиональной координаты  $\Delta(s)$ . Следовательно, в общем случае первоначальный зазор в каждой точке может быть функцией двух переменных  $\Delta(s, \theta)$ . Если поверхность имеет шероховатость, то она также будет нарушать непрерывность первоначального контакта. Большинство обработанных поверхностей в первом приближении можно моделировать одномерными либо двумерными шероховатостями. Зазор между плоской поверхностью и поверхностью, обладающей регулярной волнистостью в двух направлениях, можно представить в виде [2]

$$\Delta(x, y) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1 \cos(2\pi x / \lambda_1) + \Delta_2 \cos(2\pi x / \lambda_2),$$

где  $\Delta_i$  и  $\lambda_i$  – амплитуда и длина волны соответственно.

В общем случае зазор будет состоять из суммы первоначального геометрического зазора и зазора, вызванного волнистостью.

Таким образом, в случае контакта оболочки с основанием, имеющим первоначальные зазоры произвольной формы, или в случае контакта с топографически негладкими поверхностями основания разрешающая система (22) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(k)}\} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \dots \\ Z^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \times \{C\} + \begin{bmatrix} \{\Delta_R^{(1)}\} \\ \{\Delta_R^{(2)}\} \\ \dots \\ \{\Delta_R^{(k)}\} \\ -0,5P \end{bmatrix} = 0, \quad (25)$$

где  $\{\Delta_R^{(j)}\} = \{\Delta_{R1}^{(j)} \dots \Delta_{RM}^{(j)}\}$  – вектор суммарного зазора ( $j = 1 \dots K$ ).

При этом, если  $R_1 \neq R_2$ , между оболочкой и основанием для топографически гладких тел будет существовать первоначальный геометрический зазор  $\Delta(\theta)$ . Однако для всех колец он будет одинаков:  $\{\Delta_R^{(1)}\} = \{\Delta_R^{(2)}\} \dots = \{\Delta_R^{(K)}\}$ .

При учете зазора за счет разности радиусов и конусности, т. е. для тел с несогласованными по форме профилями в двух координатных направлениях, вектор зазоров  $\Delta(s, \theta)$  для всех колец будет разным:

$$\{\Delta_R^{(1)}\} \neq \{\Delta_R^{(2)}\} \dots \neq \{\Delta_R^{(K)}\}.$$

Таким образом, последний столбец в системе (25), вычисленный из геометрических соображений, будет учитывать произвольный в двух координатных направлениях первоначальный зазор между оболочкой и основанием в недеформированном состоянии. Таким образом, показана возможность исследовать контакт оболочки с основанием, имеющим первоначальные зазоры произвольной формы, и с топографически негладкими поверхностями основания, и в этом заключается научная новизна предлагаемой работы.

## 6. Алгоритм поиска области контакта

Система линейных алгебраических уравнений (25) при решении задач с двухсторонними связями (если оболочка не отходит от основания, например, за счет клея или сварки) полностью определяет вектор контактных (положительных и отрицательных) давлений. Следовательно, после решения системы (25) находится  $K \times M$  значений контактного давления для всех виртуальных элементов по области  $\omega_{\max}$  в первом приближении. Поскольку в прикладных задачах возможно отставание оболочки от основания, то затем необходимо применять итерационные процедуры поиска реальной области контакта  $\omega$ . Для определения тех виртуальных элементов, которые необходимо исключить из системы (25), используется метод последовательных приближений, который обычно используется при решении контактных задач для оболочечных конструкций [14, 25]. Алгоритм поиска заключается в том, что  $j$ -е приближение строится с использованием предыдущих  $j-1$  и с учетом отсутствия основания (т. е. связи) на тех элементах, где  $X_{ij} < 0$ . Алгоритм реализуется в лагранжевой координатной системе с использованием согласованных виртуальных элементов. Следовательно, после решения системы уравнений (25) для первого шага и определения виртуального элемента с максимальным отрицательным контактным давлением  $X_{qr} < 0$  на втором шаге строится неконденсированная (вида (24) первоначального порядка) система [27] с нулевым столбцом и нулевой строкой при  $X_{qr}$ . Процесс продолжается до тех пор, пока все значения определяемых усилий не станут неотрицательными.

При определении достоверности полученной конечной разрешающей системы алгебраических уравнений (как системы с односторонними связями) за ее характеристику принимаются следующие ее свойства [28]:

- 1) усилия во всех ее односторонних связях, при выключении остальных односторонних связей, должны получиться положительными;
- 2) включение в частичную систему каких-либо дополнительных связей из числа отброшенных должно привести к отрицательным значениям усилий в них;
- 3) перемещения по направлению односторонних связей, не входящих в состав рабочей системы, должны быть положительными.

Затем, как сказано выше, при необходимости можно определить напряженно-деформированное состояние оболочки от найденного контактного давления и внешнего нагружения. Определение напряженного состояния оболочки от произвольного давления, которое приложено на множестве виртуальных элементов, в данной работе не рассматривается, поскольку оно подробно рассмотрено в работах [15, 20, 21].

## 7. Численный пример и обсуждение результатов вычисления

В качестве примера рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки (часть обечайки вагона-цистерны), лежащей на жестком основании с прокладкой (рис. 1). При расчете принималось: длина оболочки  $L = 1,25$  м, внешний радиус оболочки  $R_2 = 1,50$  м, толщина стенки  $h = 0,006$  м, модуль упругости  $E = 2,1 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Главный вектор внешней нагрузки  $P = 4,5 \times 10^5$  Н приложен симметрично относительно сечения  $s = L/2$ . Оболочка лежит на жестком основании шириной  $b=0,25$  м, расположенном симметрично относительно граничных контуров. Между основанием и оболочкой имеется упругая прокладка. Длина основания по окружности  $2t\theta$  стягивается углом  $128^\circ$ . Коэффициент постели, учитывающий упругие свойства прокладки, принимался как для вакуумной резины,  $c = 10^8$  Н/м<sup>3</sup>.

Граничные условия для обоих контуров,  $s = s_0, s_L$ , приняты в виде

$$u_r = u_z = v = \mathcal{S}_S = 0.$$

Максимально возможная область контакта  $\omega_{\max}$  разбивалась по длине области  $2t\theta$  углами, равными  $\Delta\theta = 2^\circ$  ( $N = 64$ ), а ширина в меридиональном направлении  $b$  делилась на пять элементов ( $K=5$ ). Следовательно, площадь виртуального элемента равна  $a = 5,24 \times 5 = 26,2$  см<sup>2</sup>. В выражении (13) удерживалось 170 гармоник.

На рис. 3 показано распределение контактного давления  $q$  на области  $\omega_{\max}$ . Оболочка контактирует с основанием одинакового радиуса  $R_1 = R_2$ , т. е. по поверхности согласованной формы. На данном и последующих рисунках по вертикальной оси откладывается контактное давление  $q$  в МПа. Горизонтальные оси определяют сетку ( $64 \times 5$ ) виртуальных элементов по координатам  $\theta$  и  $s$  соответственно. Для лучшего восприятия рисунка сетка нарисована с уменьшенным в пять раз размером по координате  $\theta$ . Из рисунка видно, что принятые при расчете упругие свойства прокладки (как для резины) обеспечивают полное прилегание оболочки к основанию по всей первоначальной области контакта  $\omega_{\max}$ .

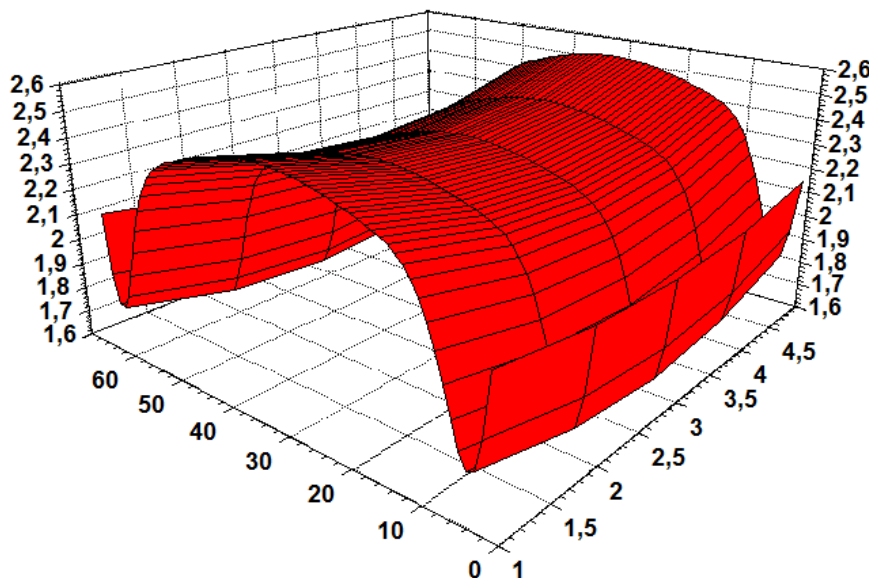


Рис. 3. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega_{\max}$  с учетом упругих свойств прокладки для случая  $R_1 = R_2$

На рис. 4 показано распределение контактного давления для случая контакта оболочки с основанием большого радиуса  $R_1 = 1,52$  м. Следовательно, контакт происходит по поверхности несогласованной формы с первоначальным зазором  $\Delta(\theta)$  вдоль окружности. Из рисунка видно, что в этом случае контактное давления распределяется не по всей первоначальной области  $\omega_{\max}$ . С помощью предложенного выше алгоритма определяется область  $\omega$ , на которой контактное давление положительно. На полоске по краям области, равной двум виртуальным элементам параллельной оси оболочки, контакт отсутствует.

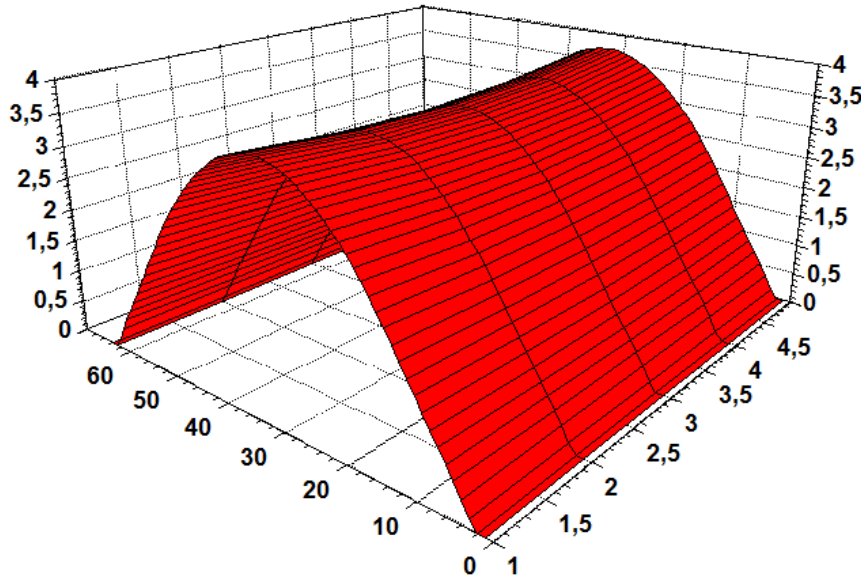


Рис. 4. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega$  с учетом упругих свойств прокладки для случая  $R_1 > R_2$

На рис. 5 показано распределение контактного давления для случая повышенной в тысячу раз жесткости прокладки ( $c = 10^{11}$  Н/м<sup>3</sup>). Следовательно, можно считать, что контакт происходит с абсолютно жестким основанием. Оболочка контактирует с основанием радиуса  $R_1 = R_2$ , т. е. по поверхности согласованной формы.

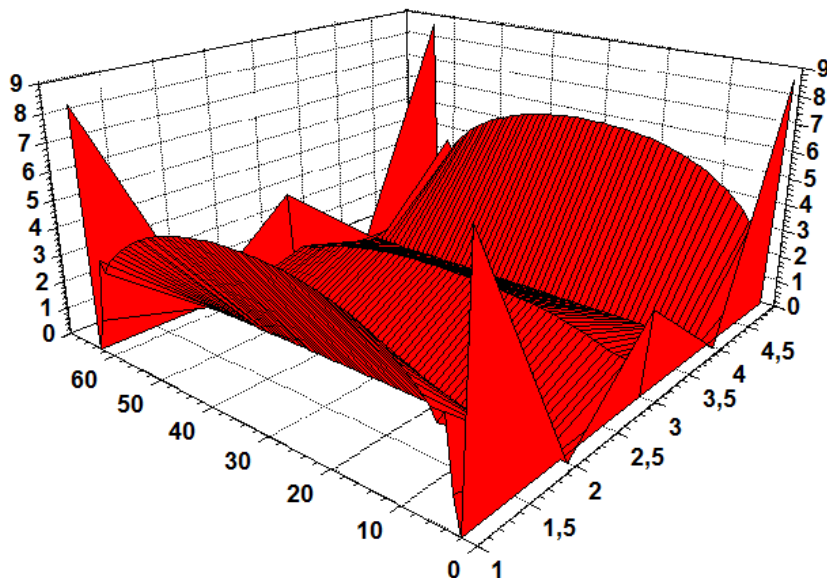


Рис. 5. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega_{\max}$  при контакте с жестким основанием для случая  $R_1 = R_2$

На рис. 5 видно увеличение контактного давления на границе области, параллельной оси оболочки. Даже при достаточно крупной сетке области  $\omega_{\max}$  видны локальные силы на этой границе области контакта. Это явление согласуется с известным эффектом образования локальных сил на границе области при решении аналитическими методами одномерных контактных задач [8, 9]. Наличие таких локальных сил может определять прочность и устойчивость оболочечных конструкций. Из рисунка видно, что существуют области виртуальных элементов, на которых отсутствует контактное давление. Эти области определяют реальную область контакта  $\omega$ .

На рис. 6 показано распределение контактного давления для случая контакта оболочки с абсолютно жестким основанием с большим радиусом  $R_1 = 1,52$  м, т. е. по поверхности несогласованной формы. Из рисунка видно, что из-за первоначального зазора контактное давление распределяется не по всей первоначальной области  $\omega_{\max}$ . Область контакта  $\omega$  при заданной внешней силе значительно уменьшается. На полоске по краям области, равной восьми виртуальным элементам параллельной оси оболочки, контакт отсутствует.

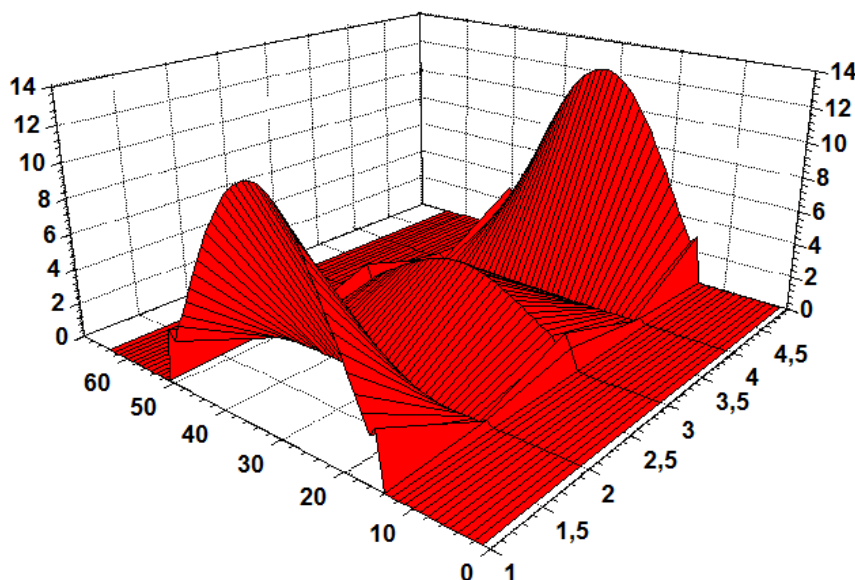


Рис. 6. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega$  при контакте с жестким основанием для случая  $R_1 > R_2$

На рис. 7 показано распределение контактного давления для случая, когда оболочка контактирует по поверхности несогласованной формы в двух координатных направлениях. За счет учета небольшой конусности основания от левой границы области (уклон 1/20) будет образовываться первоначальный геометрический зазор в меридиональном направлении. Следовательно, имеется первоначальный геометрический зазор в двух направлениях  $\Delta(\theta, s)$ . На рис. 7 показано распределение контактного давления, если контакт происходит с упругим основанием ( $c = 10^8$  Н/м<sup>3</sup>). Из рисунка видно, что область виртуальных элементов, на которых отсутствует контактное давление, увеличивается от левой границы к правой.

На рис. 8 показано распределение контактного давления для случая с небольшой конусностью жесткого ( $c = 10^{11}$  Н/м<sup>3</sup>) основания.

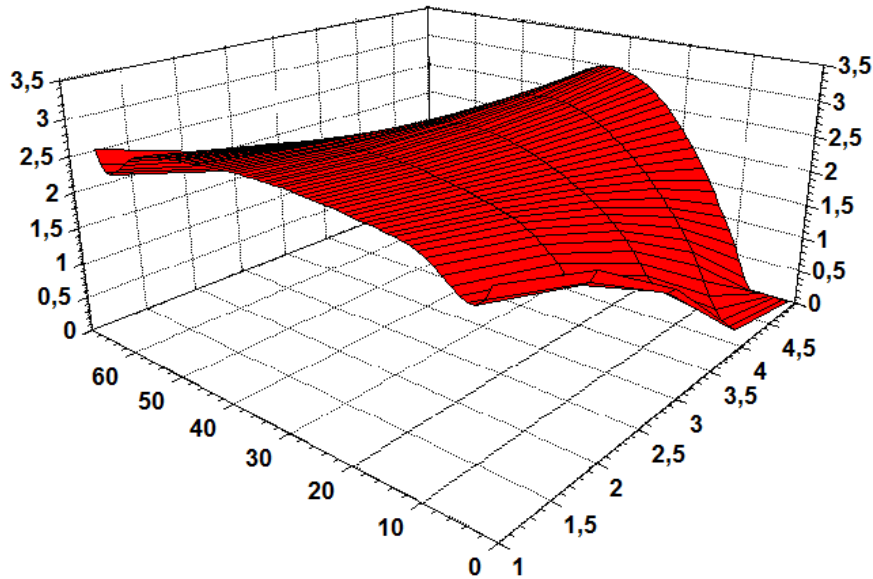


Рис. 7. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega$  с учетом упругих свойств прокладки и небольшой конусности основания

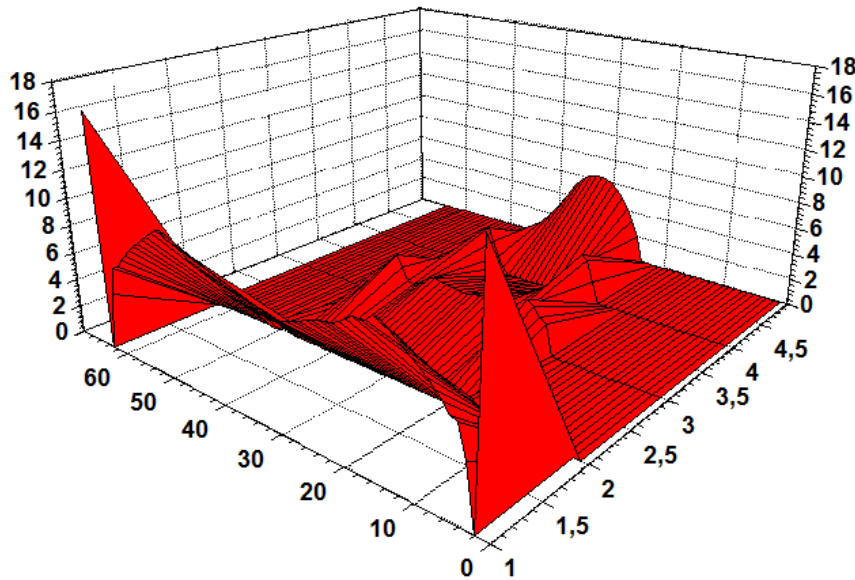


Рис. 8. Распределение контактного давления  $q$  по области  $\omega$  при контакте с жестким основанием и с учетом небольшой конусности основания

Из рис. 8 видно, что при жёстком основании и первоначальном зазоре первоначальная область  $\omega_{\max}$  значительно уменьшается. На полоске, ширина которой увеличивается слева направо, контакт отсутствует.

## 8. Заключение

Таким образом, численный метод, основанный на методе виртуальных элементов, обобщен для решения контактных задач для тонкой оболочки, лежащей на основании с поверхностью несогласованной формы. Метод позволяет определить область контакта и контактное давление по неизвестной по двум координатным направлениям области кон-

такта. В работе показана аналогия между разрешающими уравнениями метода виртуальных элементов и интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Проведенный численный эксперимент для конструкции в виде обечайки вагона-цистерны показывает, что контактное давление и область контакта зависят от величины несогласованности формы контактирующих поверхностей и упругих характеристик основания.

### Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН (тема АААА-А18-118020790140-5).*

### Литература

1. Механика контактного взаимодействия / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – 672 с.
2. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
3. Bourago N. G., Kukudzhanov V. N. A review of contact algorithms // Mech. Solids. – 2005. – Vol. 40 (1). – P. 35–71.
4. Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. – Philadelphia : Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1988. – 485 p.
5. Computational Methods in Contact Mechanics / ed. by M. H. Aliabadi and C. A. Brebbia. – Southampton; Boston : Computational Mechanics Publ., Cop., 1993. – 352 p. – ISBN 1-85312-184-3 (Southampton). – (Intern. Ser. on Computational Engineering).
6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – 92. – 156–171.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – Москва; Ленинград : Гостехиздат, 1949. – 270 с.
8. Grigolyuk E. I. and Tolkachev V. M. Contact Problems in the Theory of Plates and Shells. – М. : Mir Publ., 1987. – 424 p.
9. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – Киев : Наукова думка, 1990. – 136 с.
10. Артюхин Ю. П., Малкин С. А. Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений в задачах упругого воздействия тел. – Казань : Казанский государственный университет, 2007. – 292 с.
11. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / пер. с англ. и польск. Б. Н. Ушакова. – Москва : Мир, 1982. – 542 с.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 285 с.
13. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. – Berlin–Heidelberg : Springer, 2006. – 518 p. – DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0.
14. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный., П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач, Ю. И. Матюхин, Г. Л. Хавин. – Киев : Наукова думка, 1989. – 232 с.
15. Механика композитов : в 12 т. Том 8 : Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев : А.С.К, 1999. – 389 с.
16. Emelyanov I. G. Numerical analysis of contact interaction of cylindrical shells // Soviet Applied Mechanics. – 1987. – Vol. 23, No. 6. – P. 569–573. – DOI: 10.1007/BF00887024.
17. Emelyanov I. G. A study of contact interaction of two-layer shells // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1996. – Vol. 37, iss 1. – P. 129–134. – DOI: 10.1007/BF02369412.

18. Emelyanov I. G. contact interaction of shells of revolution in unknown two-dimensional regions // *International Applied Mechanics*. – 1997. – Vol. 33, No. 7. – P. 548–555. – DOI: 10.1007/BF02700735.
19. Emelyanov I. G. investigation into the contact interaction between shell and base with notches // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2015. – Vol. 44, No. 3. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S1052618815030048.
20. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В. Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 245–252. – DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.24.
21. Емельянов И. Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 245–253. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20.
22. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек : в 5 т. Т. 4 : Теория оболочек переменной жесткости. – Киев : Наукова думка, 1981. – 544 с.
23. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 171–174.
24. Тимошенко С. П., Гере Д. Ж. Механика материалов. – М. : Мир, 1976. – 669 с.
25. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. – Киев : Наукова думка, 1988. – 288 с.
26. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений : учебник. – 3-е изд. – М. : Наука, 1965. – 128 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
28. Рабинович И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М. : Стройиздат, 1975. – 144 с.



**Received:** 14.02.2023

**Revised:** 30.03.2023

**Accepted:** 28.04.2023

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.2.041-048

## STUDYING THE MECHANICAL PROPERTIES OF IRON ORE CONCENTRATE BRIQUETTES



L. I. Polyansky<sup>1, a)</sup>, N. A. Babailov<sup>2, b), \*</sup>, and Yu. N. Loginov<sup>3, c)</sup>



<sup>1</sup>Spidermash LLC, 54 Studencheskaya St., Ekaterinburg, 620912, Russia

<sup>2</sup>Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

<sup>3</sup>Yeltsin UrFU, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia

a)  info@spidermash.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0002-6245-2841>  n.a.babailov@urfu.ru;

c)  <https://orcid.org/0000-0002-7222-2521>  j.n.loginov@urfu.ru

\*Corresponding author. E-mail: n.a.babailov@urfu.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia  
Tel.: +7 (343) 374-2594

This paper studies the properties of metallurgical briquettes of iron ore concentrate with coke screenings and liquid glass as a binder. The briquettes are produced by one-sided pressing in a closed die mounted on the plates of a vertical press with a force of 100 kN. The studies were carried out in the laboratory of Spidermash LLC. The following properties of briquettes were determined: density, impact strength and compressive strength (for green and dry briquettes). The functional dependences of the mechanical properties on 4 parameters are plotted, namely on charge mixture composition (the content of iron ore concentrate and coke), binder (liquid glass) percentage in the mixture, moisture content in the mixture, and charge mixture compacting pressure. The obtained experimental data are approximated with the use of a multiplicative model, with the application of the least squares method. Various analytical models for describing the behavior of the material to be briquetted are studied. It is concluded that the multiplicative model provides a more adequate description of the mechanical properties. The quality of the multiple regression model is assessed by the adjusted coefficient of determination. The significance of the regression equation is evaluated by the Fisher criterion, and the significance of the regression coefficients is evaluated according to Student.

The mechanical properties of briquettes from iron ore concentrate with coke screenings, presented in the form of analytical dependencies, are necessary to assess the strength of the briquettes when designing the briquetting process. For example, it is necessary to take into account the change in yield during briquette transportation after briquetting. These dependences are also necessary for formulating and solving problems of pressing/briquetting of finely dispersed materials, including iron ore concentrate with coke screenings.

**Keywords:** briquetting, metallurgical briquette, iron ore concentrate, coke, liquid glass, data approximation, non-linear regression, least square method.

### Acknowledgment

*We appreciate the assistance of I. L. Polyansky, lead engineer of Spidermash LLC, who performed extensive work on testing the briquettes with the aim to determine their mechanical properties.*

## References

1. Ravich B.M. *Briketirovanie rud* [Briquetting of Ores]. Moscow, Nedra Publ., 1982, 183 p. (In Russian).
2. Avdokhin B.M. *Osnovy obogashcheniya poleznykh iskopaemykh* [Fundamentals of Mineral Processing]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 2006, 417. (In Russian).
3. Salman A.D., Hounslow M.J., Seville J.P.K., eds. *Handbook of Powder Technology*. Vol. 11. Granulation, Elsevier, 2007, 1375 p.
4. Wang Z., Xu A.-J., He D.-F. Influence factors of compressive strength of stainless-steel dust pellets by cold bonded briquetting. *Journal of Iron and Steel Research*, 2015, vol. 27 (5), pp. 25–29. DOI: 10.13228/j.boyuan.issn1001-0963.20140114.
5. Mohanty M.K., Mishra S., Mishra B., Sarkar S., Samal S.K. A novel technique for making cold briquettes for charging in blast furnace. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 115. DOI: 10.1088/1757-899X/115/1/012020.
6. Kuskov V., Kuskova Ya., Udovitsky V. Effective processing of the iron ores. In: *E3S Web of Conferences: The Second International Innovative Mining Symposium*, Kemerovo, 20–22 November, 2017, vol. 21, 02010, EDP Sciences Publ., 2017. DOI: 10.1051/e3sconf/20172102010.
7. Kuskov V., Kuskova Ya. Research of physical and mechanical properties of briquettes, concentrated from loose high-grade iron ores. In: *17th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2017*, Albena; Bulgaria; 29 June–5 July 2017, vol. 17: conference proceedings, STEF92 Tekhnologi Publ., 2017, pp. 1011–1016. DOI: 10.5593/sgem2017/11/S04.129.
8. Loginov Yu.N., Burkin S.P., Babailov N.A., Polyanskiy L.I. *Mekhanika valkovogo briketirovaniya sypushikh materialov* [Mechanics of Roll Briquetting of Loose Materials]. Ekaterinburg, AMB Publ., 2011, 304 p. (In Russian).
9. Babailov N.A., Polyanskii L.I., Loginov Yu.N. Briquetting metallurgical lime screenings and parameters making it possible to improve process efficiency. *Metallurgist*, 2016, vol. 60, pp. 576–580. DOI: 10.1007/s11015-016-0334-3.
10. Loginov Yu.N., Babailov N.A., Polyanskii L.I. Effect of the precompaction pressure on the density distribution in a metallurgical briquette during roller pressing. *Metallurgist*, 2018, vol. 61 (9–10), pp. 849–852. DOI: 10.1007/s11015-018-0574-5.
11. Babailov N.A., Loginov Yu.N., Polianskiy L.I. Mechanical properties of briquettes of chromic concentrates. *Obogashchenie Rud*, 2019, No. 6. DOI: 10.17580/or.2019.06.06. (In Russian).
12. *GOST 21289-75*. (In Russian).
13. *GOST 25471-82*. (In Russian).
14. Lvovskiy E.N. *Statisticheskie metody postroeniya empiricheskikh formul* [Statistical Methods for Constructing Empirical Formula]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1988. (In Russian).
15. *Specification 3821-001-50316524-2004*. (In Russian).

Подана в журнал: 14.02.2023

УДК 622.788

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.041-048

## ИЗУЧЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БРИКЕТОВ ИЗ ЖЕЛЕЗОРУДНОГО КОНЦЕНТРАТА



Л. И. Полянский<sup>1, а)</sup>, Н. А. Бабайлов<sup>2, б), \*</sup>, Ю. Н. Логинов<sup>3, в)</sup>



<sup>1</sup>ООО «Спайдермаш», ул. Студенческая, 54, г. Екатеринбург, 620912, Россия

<sup>2</sup>ФГБУН Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

<sup>3</sup>Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,  
ул. Мира 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

<sup>а)</sup>  info@spidermash.ru;

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-6245-2841>  n.a.babailov@urfu.ru;

<sup>в)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-7222-2521>  j.n.loginov@urfu.ru

\* Ответственный автор. E-mail: n.a.babailov@urfu.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

Tel.: +7 (343) 374-25-94

В работе изучены свойства металлургических брикетов из железорудного концентрата, отсева кокса и жидкого стекла, используемого в качестве связующего. Брикеты получены методом одностороннего прессования в закрытой матрице, которая устанавливается на плитах вертикального пресса усилием 100 кН. Исследования проведены в лаборатории промышленного предприятия ООО «Спайдермаш». Определены следующие свойства брикетов: плотность, ударная прочность и прочность на сжатие (для сырых и сухих брикетов). Построены функциональные зависимости механических свойств от 4 параметров: состава шихтовой смеси (содержания железорудного концентрата и кокса), процентного содержания связующего в смеси (жидкого стекла), влажности смеси и давления прессования шихтовой смеси. В работе полученные экспериментальные данные аппроксимированы с использованием мультипликативной модели, использован метод наименьших квадратов. Исследованы различные аналитические модели описания поведения брикетируемого материала. Сделан вывод, что мультипликативная модель дает более адекватное описание механических свойств. Выполнена оценка качества множественной регрессионной модели по скорректированному коэффициенту детерминации. Оценка значимости уравнения регрессии выполнена по критерию Фишера, а оценка значимости коэффициентов регрессии – по Стьюденту.

Механические свойства брикетов из железорудного концентрата с отсевом кокса, представленные в виде аналитических зависимостей, необходимы для оценки прочности брикетов при проектировании технологического процесса брикетирования. Например, необходимо учитывать изменение выхода годного при выполнении транспортировки брикетов после брикетирования. Эти зависимости необходимы также при постановке и решении задач прессования/брикетирования мелкодисперсных материалов, в том числе железорудного концентрата с отсевом кокса.

**Ключевые слова:** брикетирование, металлургический брикет, железорудный концентрат, кокс, жидкое стекло, аппроксимация данных, нелинейная регрессия, метод наименьших квадратов.

## 1. Введение

Валковое брикетирование как способ окускования мелкодисперсных материалов в черной и цветной металлургии успешно используется для подготовки сырья к дальнейшему переделу, а также для утилизации отходов производства [1–3]. Общеизвестно, что валковое брикетирование отсевов материалов, используемых в металлургическом производстве, повышает экономическую эффективность их использования [4–8].

Авторы имеют опыт брикетирования техногенных отходов и отсевов рудного сырья, брикеты из которых используются в металлургическом (в т. ч. сталеплавильном) производстве. Изучены процессы брикетирования отсевов (мелких фракций), например: кокса и кокса с окалиной [9], ферросплавов и железорудного концентрата, металлургической извести [10], а также других техногенных отходов черной металлургии и рудных материалов (с использованием различных связующих или без них).

Ранее авторами были получены аналитические зависимости механических свойств от различных параметров брикетирования для хромовых концентратов [11]. Построены функции зависимости механических свойств получаемых брикетов от содержания металлургической пыли (например, пыли газоочисток, снятой с фильтров и циклонов), жидкого стекла в качестве связующего, влажности брикетируемой шихты и давления прессования подготовленной смеси.

Цель работы – изучение механических свойств металлургических брикетов из железорудного концентрата с отсевом кокса, а также построение аналитических зависимостей плотности и прочности брикетов от технологических параметров брикетирования материала.

## 2. Материал и методика

Изучаемый в работе железорудный концентрат получен обогащением руды с месторождений близ г. Жезказган (Республика Казахстан) по комбинированной магнитно-флотационной схеме. Химический состав железорудного концентрата приведен в табл. 1.

Таблица 1

Химический состав железорудного концентрата

Материал	Содержание, %							
	Fe <sub>общ.</sub>	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	P	S <sub>общ.</sub>	MnO	MgO	CaO
Железорудный концентрат	66,0	3,0	1,5	0,116	0,035	0,018	0,11	0,15

Гранулометрический состав железорудного концентрата и кокса определен методом ситового анализа. Фракционный состав концентрата – менее 0,1 мм, фракция для отсева кокса – менее 5 мм.

Способ изготовления брикетов и методика проведения исследований механических свойств аналогичны описанным авторами в работе [11]. Работы выполнены в исследовательской лаборатории ООО «Спайдермаш».

1. Подготовку шихтовых смесей перед прессованием осуществляли в лабораторном смесителе гравитационного типа («пьяная бочка»). Прессование выполняли без подогрева шихтовых смесей или инструмента. Влажность брикетируемой смеси и брикетов определялась с помощью анализатора влажности ЭВЛАС-2М с точностью измерения не более  $\pm 0,2$  %.

2. Прессование цилиндрических брикетов выполнено методом одностороннего прессования в закрытой матрице на вертикальном гидравлическом прессе с номинальным усилием 100 кН.

Матрица для брикетирования состоит из трех основных элементов (рис. 1 а): цилиндрическая пресс-форма с диаметром внутреннего отверстия 36 мм, шток с вогнутым основанием и основание вогнутое. Внутренняя поверхность пресс-формы шлифованная.

Форма брикета – «подушка» (рис. 1 б). Данная форма в большей мере приближена к форме брикета промышленного производства (например, при валковом брикетировании), следовательно, она позволяет получать максимально точные показатели в дальнейших исследованиях.



Рис. 1. Матрица для брикетирования (а) и форма получаемого брикета «подушка» (б)

3. Масса брикетов составляла 45÷60 г, и определялась на электронных весах Ohaus Explorer Pro с точностью измерения 0,1 мг.

4. Значения факторов для исследования механических свойств брикетируемых смесей при получении брикетов из железорудного концентрата приведены в табл. 2. Определены следующие механические свойства полученных брикетов: плотность  $\rho$ , ударная прочность  $\sigma_{y\delta}$  (или прочность на сбрасывание) и прочность на сжатие  $\sigma_p$ . Определение прочностных характеристик выполнено по ГОСТ 21289-75 и ГОСТ 25471-82 [12, 13].

5. Изучены два типа полученных брикетов: так называемые сырые и сухие брикеты. Сырые брикеты исследуются сразу после прессования (без сушки или вылеживания на воздухе); сухие брикеты исследуются после проведения операции сушки (приняты следующие режимы сушки сырых брикетов в сушильной печи: температура сушки – 100 °С, время сушки – 15 мин).

### 3. Результаты и обсуждение

Массив исходных данных составил 240 позиций. Было проведено по 3 опыта на каждую точку измерения, далее значения полученных данных усреднялись. Значения факторов при исследовании прессования брикетов из железорудного концентрата приведены в табл. 2.

В работе были исследованы различные аналитические модели описания поведения материала. На основе обработки данных по брикетированию железорудного концентрата сделан вывод, что более точной для исследуемых зависимостей механических свойств от параметров брикетирования можно считать мультипликативную модель вида [14], которая была использованная также при обработке результатов брикетирования хромовых концентратов [11]:

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4}, \quad (1)$$

где  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  – коэффициенты регрессии, представленные в табл. 3.

Для определения коэффициентов регрессии линеаризованного уравнения (1) использован метод наименьших квадратов. Коэффициент детерминации для разных составов брикетируемых шихт и условий прессования находится в интервале  $R^2 = 0,9 \div 0,99$  (данные приведены в табл. 3).

Таблица 2

Значения факторов при исследовании прессования брикетов из железорудного концентрата с отсевом кокса

Факторы		Значения параметров прессования шихты				
$x_1$	Содержание связующего (жидкое стекло), %	0	1	3	5	7
$x_2$	Состав шихты (содержание отсева кокса), %	0	10	15	–	–
$x_3$	Влажность шихты, %	2	4	6	8	–
$x_4$	Давление прессования шихтовой смеси, МПа	25	50	100	150	–

Таблица 3

Коэффициенты регрессии уравнения (1) и коэффициенты детерминации

Свойства железорудного концентрата	Параметры уравнения регрессии (1)						
	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_4$	$R^2$	$A_{cp}, \%$
Плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup> (сырой брикет)	1,8811	0,0235	0,003	0,067	0,061	0,999	1,822
Ударная прочность $\sigma_{уд}$ , % (сырой брикет)	3,633	0,257	0,098	0,491	0,353	0,990	3,079
Ударная прочность $\sigma_{уд}$ , % (сухой брикет)	22,364	0,458	0,045	0,091	0,092	0,987	7,134
Прочность на сжатие $\sigma_p$ , Н/бр. (сухой брикет)	3,913	0,997	0,102	0,053	0,296	0,970	13,364

Для оценки качества аппроксимации полученных экспериментальных данных по уравнению (1) на рис. 2 приведены графические зависимости плотности сырых брикетов

из железорудного концентрата с 10 % кокса и 3 % жидкого стекла (рис. 2 а) и прочности на сбрасывание сырых брикетов из железорудного концентрата с 15 % кокса и 5 % жидкого стекла (рис. 2 б). Сплошными линиями показаны расчетные значения параметров для соответствующих параметров брикетирования по аппроксимирующей формуле (1).

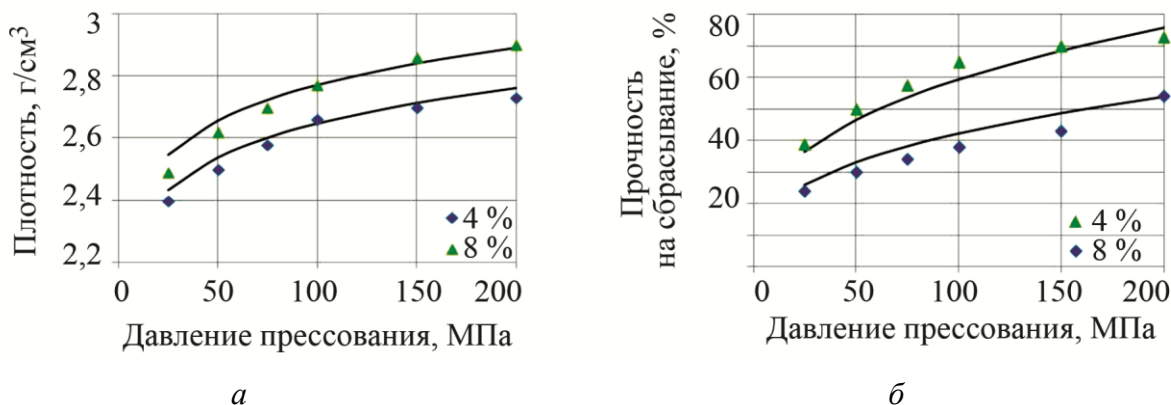


Рис. 2. Зависимость плотности брикетов из железорудного концентрата (10 % кокса + 3 % жидкого стекла) (а) и прочности на сбрасывание брикетов из железорудного концентрата с 15 % кокса и 5 % жидкого стекла (б) от удельного давления прессования и влажности брикетируемой смеси перед прессованием

Для оценки качества множественной регрессионной модели определен скорректированный коэффициент детерминации. Значимость уравнения регрессии определена по критерию Фишера. Сделан вывод, что представленные модели значимы. Также выполнена оценка значимости коэффициентов регрессии по *t*-статистике Стьюдента. Коэффициенты регрессии значимы.

Полученные данные могут быть использованы для разработки технологических процессов брикетирования и определения характеристик валковых брикетных прессов, например для их проектирования [15].

#### 4. Заключение

С использованием нелинейного регрессионного анализа получены аналитические уравнения механических свойств для рудотопливных брикетов из железорудного концентрата с отсевом кокса в зависимости от различных параметров брикетирования. Используя полученную модель, можно оценивать уровень получаемых свойств брикетов из шихтовой смеси, состоящей из железорудного концентрата, отсева кокса и жидкого стекла, применяемого в качестве связующего. Используя полученные уравнения регрессии, возможно, реализовать процесс проектирования технологии получения металлургических брикетов с различным содержанием компонентов в шихтовой смеси.

#### Благодарность

Авторы выражают благодарность ведущему инженеру ООО «Спайдермаш» Полянскому И. Л. за проведение большого объема испытаний брикетов с целью определения их механических свойств.

## Литература

1. Равич Б. М. Брикетирование руд. – М. : Недра, 1982. – 183 с.
2. Авдохин В. М. Основы обогащения полезных ископаемых. – М. : Изд-во МГУ, 2006. – 417 с.
3. Handbook of Powder Technology / ed. by A. D. Salman, M. J. Hounslow, J. P. K. Seville. – Elsevier, 2007. – Vol. 11. – 1375 p.
4. Wang Z., Xu A.-J., He D.-F. Influence factors of compressive strength of stainless-steel dust pellets by cold bonded briquetting // Journal of Iron and Steel Research. – 2015. – Vol. 27 (5). – P. 25–29. – DOI: 10.13228/j.boyuan.issn1001-0963.20140114.
5. Novel technique for making cold briquettes for charging in blast furnace / M. K. Mohanty, S. Mishra, B. Mishra, S. Sarkar, S. K. A. Samal // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 115. – DOI: 10.1088/1757-899X/115/1/012020.
6. Kuskov V., Kuskova Ya., Udovitsky V. Effective processing of the iron ores // E3S Web of Conferences. 2017, The Second International Innovative Mining Symposium. Section “Environment Problems in Mining Regions”, Kemerovo, 20–22 November, 2017. – EDP Sciences Publ., 2017. – DOI: 10.1051/e3sconf/20172102010. – Vol. 21.
7. Kuskov V., Kuskova Ya. Research of physical and mechanical properties of briquettes, concentrated from loose high-grade iron ores // 17th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2017, Albena, Bulgaria, 29 June–5 July 2017. – STEF92 Tekhnologi Publ., 2017. – DOI: 10.5593/sgem2017/11/S04.129. – Vol. 17, iss. 11. – P. 1011–1016.
8. Механика валкового брикетирования сыпучих материалов / Ю. Н. Логинов, С. П. Буркин, Н. А. Бабайлов., Л. И. Полянский. – Екатеринбург : АМБ, 2011. – 304 с.
9. Babailov N. A., Polyanskiy L. I., Loginov Yu. N. Briquetting metallurgical lime screenings and parameters making it possible to improve process efficiency // Metallurgist. – 2016. – Vol. 60. – P. 576–580. – DOI: 10.1007/s11015-016-0334-3.
10. Loginov Yu. N., Babailov N. A., Polyanskii L. I. Effect of the precompaction pressure on the density distribution in a metallurgical briquette during roller pressing // Metallurgist. – 2018. – Vol. 61. – P. 849–852. – DOI: 10.1007/s11015-018-0574-5.
11. Бабайлов Н. А., Логинов Ю. Н., Полянский Л. И. Изучение механических свойств брикетов из хромовых концентратов // Обогащение руд. – 2019. – № 6. – С. 30–34. – DOI: 10.17580/or.2019.06.06.
12. ГОСТ 21289–75. Брикеты угольные. Методы определения механической прочности.
13. ГОСТ 25471–82. Руды железные, агломераты и окатыши. Метод определения прочности на сбрасывание.
14. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М. : Высшая школа, 1988. – 239 с.
15. ТУ 3821-001-50316524–2004. Прессы брикетировочные валковые серии ПБВ.



**Received:** 28.02.2023

**Revised:** 21.04.2023



**Accepted:** 28.04.2023



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064

## ANALYTICAL AND NUMERICAL RADially SYMMETRIC SOLUTIONS TO A HEAT EQUATION WITH ARBITRARY NONLINEARITY

A. L. Kazakov<sup>a)</sup> and L. F. Spevak<sup>b),\*</sup>

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>a)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);

<sup>b)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia  
Tel.: +7 (343) 362-3022; fax: +7 (343) 374-5330

The paper deals with the construction of radially symmetric heat waves, which are solutions to the heat conduction equation with an arbitrary form of nonlinearity under nonzero boundary condition specified on a moving manifold. The boundary value problem under study is a generalization of those solved by us earlier. Firstly, the class of the considered parabolic equations is extended; secondly, the boundary condition generating a heat wave in a space of arbitrary dimensionality has a more general form. A new theorem of the existence and uniqueness of the heat-wave-type analytical solution is proved for this problem. An approximate method of constructing solutions of the required form is proposed, which is based on expansion in radial basis functions combined with the collocation method. At each time step, the solution is constructed in two stages. The first stage is solving a problem in the region bounded by a specified moving manifold and a heat wave front, which is *a priori* unknown and evaluated during solving. Herewith, a special substitution is used, i.e. the required function and the spatial variable change their roles. In the second stage, the solution is completed in the region bounded by the positions of the specified moving manifold on a current step and at the initial time. The boundary conditions are defined from the first-step solution. In the test example, the solutions constructed by the developed algorithm are compared with the known exact solution. Calculations show a good accuracy of the numerical solutions at various values of the numerical parameters, including space dimensionality. The observed numerical convergence with respect to the time step shows the correctness of the proposed computational procedure.

**Keywords:** nonlinear heat equation, radially symmetric solution, heat wave, power series, collocation method, radial basis functions.

### Acknowledgment

*The study was carried out in accordance with state assignment No. AAAA-A18-118020790140-5 for the IES UB RAS.*

### References

1. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p. ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.

2. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, NY, Berlin, Walter de Gruyter, 1995, 534 p. ISBN 3-11-012754-7.
3. Zeldovich Ya.B., Kompaneets A.S. On the theory of heat propagation with temperature-dependent thermal conductivity. In: *Sbornik, posvyashchennyi 70-letiyu akademika A.F. Ioffe* [Collection Dedicated to the 70<sup>th</sup> Anniversary of Academician A.F. Ioffe]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1950, pp. 61–71. (In Russian).
4. Barenblatt G.I., Vishik I.M. On the final velocity of propagation in problems of non-stationary filtration of liquid and gas. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1956, vol. 20, No. 3, pp. 411–417. (In Russian).
5. Oleynik O.A., Kalashnikov A.S., Chzhou Y.-L. The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of non-stationary filtration. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1958, vol. 22, No. 5, pp. 667–704. (In Russian).
6. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: matematika, mekhanika* [Selected Works: Mathematics, Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian). ISBN 5-9221-0103-X.
7. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary elements method and power series method for one-dimensional nonlinear filtration problems. *Izvestiya IGU, Seriya Matematika*, 2012, vol. 5, No. 2, pp. 2–17. (In Russian).
8. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 10–11, pp. 6918–6928. DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
9. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, No. 1, pp. 119–129. (In Russian).
10. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 100–116. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
11. Kazakov A.L., Nefedova O.A., Spevak L.F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, No. 6, pp. 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.
12. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A., Lempert A.A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term. *Symmetry*, 2020, vol. 12, iss. 6, pp. 921 (3–15). DOI: 10.3390/sym12060921.
13. Kazakov A.L., Spevak L.F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, iss. 6, pp. 54–67. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6\\_350.html](http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html)
14. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. (In Russian). Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v16>
15. Kazakov A.L., Spevak L.F. Approximate and exact solutions to the singular nonlinear heat equation with a common type of nonlinearity. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, vol. 34, pp. 18–34. (In Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18.
16. Kazakov A.L., Spevak L.F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10, 1559. DOI: 10.3390/math10091559.

17. Powell M.J.D. The theory of radial basis function approximation in 1990. In: *Advances in Numerical Analysis*, vol. 2: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions, Light W.A., ed., 1992, Clarendon Press, Oxford, pp. 105–210.
18. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, vol. 24, pp. 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130.
19. Buhmann M.D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, 2003, 272 p. ISBN 0521633389, 9780521633383.
20. Golberg M.A., Chen C.-S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, pp. 285–296. DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
21. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*, U.S., McGraw-Hill Inc., 1981, 452 p. ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.
22. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, 466 p. ISBN 978-3-642-48862-7. DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3.
23. Nardini D., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 1983, vol. 7, No. 3, pp. 157–162. DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
24. Wrobel L.C., Brebbia C.A., Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. In: *Finite Elements in Water Resources VI*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, pp. 801–811.
25. Wrobel L.C., Brebbia C.A. The dual reciprocity boundary element formulation for diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 65, iss. 2, pp. 147–164. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
26. Golberg M.A. Numerical evaluation of particular solutions in the BEM – A review. *Boundary Elements Communications*, 1995, vol. 6, pp. 99–106.
27. Golberg Michael A. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, vol. 75, iss. 1, pp. 91–101. DOI: 10.1016/0096-3003(95)00123-9.
28. Chen Wen, Fu Zhuo-Jia, Chen C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
29. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, No. 2, pp. 255–263. DOI: 10.1134/S1990478918020060.
30. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*, Springer New York, 1993, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
31. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem and its Applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2006, 397 p. (In Russian). ISBN 5-02-032540-6.
32. Kozlov V.V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person. *Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, iss. 6, pp. 1175–1192. DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.
33. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*, New York, Interscience Publishers, Inc., 2008.

Подана в журнал: 28.02.2023



УДК 517.958:519.633



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

А. Л. Казаков<sup>а)</sup>, Л. Ф. Спевак<sup>б)</sup>, \*

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация*

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

\* Ответственный автор. Электронная почта: [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-22; факс: +7 (343) 374-53-30

Статья посвящена построению радиально симметричных тепловых волн, которые являются решениями уравнения теплопроводности с произвольным видом нелинейности при заданном на подвижном многообразии ненулевом краевом режиме. Рассмотренная краевая задача является обобщением задач, решенных авторами ранее. Во-первых, расширяется класс исследуемых уравнений параболического типа; во-вторых, более общий вид имеет краевое условие, порождающее тепловую волну в пространстве произвольной размерности. Для данной задачи доказана новая теорема существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны. Предложен приближенный метод построения решений искомого вида, основанный на разложении по радиальным базисным функциям в сочетании с методом коллокаций. Решение на каждом шаге по времени строится в два этапа. На первом этапе решается задача в области, ограниченной заданным подвижным многообразием и фронтом тепловой волны, который заранее неизвестен и определяется в процессе решения. При этом используется специальная замена – искомая функция и пространственная переменная меняются ролями. На втором этапе решение достраивается в области, ограниченной положениями заданного подвижного многообразия на текущем шаге и в начальный момент. При этом граничные условия определяются из решения на первом этапе. В рассмотренном тестовом примере решения, построенные по разработанному алгоритму, сравнивались с известным точным решением. Расчеты показали хорошую точность численных решений при различных значениях числовых параметров, в том числе размерности пространства. Наблюдаемая численная сходимость относительно шага по времени показывает корректность предложенной вычислительной процедуры.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение теплопроводности, радиально-симметричное решение, тепловая волна, степенной ряд, метод коллокаций, радиальные базисные функции.

### 1. Введение

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$T_t = \Delta P(T) + Q(T), \quad (1)$$

где  $T(t, \mathbf{x})$  – искомая функция (температура);  $t$  – время;  $\mathbf{x}$  – вектор пространственных координат в рассматриваемом пространстве, нижним буквенным индексом здесь и далее обозначены частные производные;  $P(0) = Q(0) = 0$ ,  $Q(T)$  – функция источника (стока) [1, 2]. Помимо распространения тепла, уравнение (1) применяется для моделирования диффузии, фильтрации газов в пористом грунте и других процессов. В связи с этим, его иногда называют полным уравнением пористой среды (the complete porous medium equation [1]). В обзорной работе [1] описаны различные виды этого уравнения и подходы к его решению.

Уравнение (1) заменой искомой функции  $u = P'(T)$  может быть приведено к виду

$$u_t = u\Delta u + p(u)(\nabla u)^2 + q(u), \quad (2)$$

где  $p(u) = 1 - \frac{P'''(\varphi(u))}{[P''(\varphi(u))]^2}$ ,  $q(u) = Q(\varphi(u))$ ,  $T = \varphi(u)$  – функция, обратная к  $u = P'(T)$ .

При  $u = 0$  в уравнении (2) имеет место вырождение параболического типа уравнения, вследствие чего для него существуют решения типа тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью по нулевому фону [3–6]. Тепловая волна является составной конструкцией, состоящей из двух частей: положительного решения и тривиального решения (нулевого фона), которые состыкованы вдоль некоторой гладкой гиперповерхности в рассматриваемом пространстве, называемой фронтом волны. Метод поиска таких решений определяется заданным краевым условием. Наиболее простой с точки зрения построения тепловой волны является задача для уравнения (2) при заданном уравнении движения фронта тепловой волны:

$$u|_{a(t, \mathbf{x})=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь уравнение  $a(t, \mathbf{x}) = 0$  задает в каждый момент времени нулевой фронт тепловой волны. Самой естественной постановкой является задача об иницировании тепловой волны, в которой краевым условием задается значение искомой функции в каждый момент времени на некотором неподвижном многообразии:

$$u|_{b(\mathbf{x})=0} = f(t, \mathbf{x}). \quad (4)$$

В данной работе мы рассмотрим краевой режим

$$u|_{G(t, \mathbf{x})=0} = F(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

задающий в каждый момент времени ненулевые, вообще говоря, значения искомой функции на некотором подвижном многообразии. Условие (5) принимает вид (4), если функция  $G(t, \mathbf{x})$  не зависит от времени, и вид (3), если  $F(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ . Таким образом, задача (2), (5) является постановкой, включающей в себя задачи (2), (3) и (2), (4).

В случае когда условие (5) обладает радиальной симметрией, задачу (2), (5) можно свести к следующей задаче с одной пространственной переменной:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + p(u)u_{\rho}^2 + \frac{(n-1)uu_{\rho}}{\rho} + q(u), \quad (6)$$

$$u|_{\rho=g(t)} = f(t). \quad (7)$$

Здесь  $u = u(t, \rho)$ ,  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,  $q(0) = 0$ ,  $x_i$  – декартовы координаты,  $n$  – размерность пространства,  $g(t)$  и  $f(t)$  – непрерывно дифференцируемые в окрестности нуля функции,  $f'(0) > 0$ ,  $g'(0) > 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $g(0) \geq 0$  при  $n = 1$ ,  $g(0) > 0$  при  $n > 1$ . Задача (6), (7) является основным объектом исследования настоящей статьи. Отметим существенное для дальнейшего изложения свойство уравнения (6) – существование тривиального решения  $u \equiv 0$ .

Подходы к исследованию поставленных выше задач диктуются стоящими перед исследователями целями. Например, метод специальных рядов [6] применяется при доказательстве теорем существования и единственности аналитического решения. Построенные при доказательстве решения являются локальными, причем область сходимости зачастую оценить невозможно. В связи с этим, для построения решений в заданном интервале времени применяются численные методы. Авторы настоящей статьи уже более десяти лет развивают собственный подход, сочетающий аналитические и численные методы решения.

Ранее авторами уравнение (6) рассматривалось только в случае  $p(u) = const$ , что соответствует степенному виду функции  $P(T)$  [7–13]. В данной работе функция  $p(u)$  может иметь произвольный вид при условии непрерывной дифференцируемости и выполнении неравенства  $p'(0) > 0$ . Для уравнения (6) такого вида с краевыми условиями, соответствующими (3) и (4), ранее были доказаны теоремы существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны, а также разработаны численно-аналитические алгоритмы решения [14–16]. В численных алгоритмах использовались радиальные базисные функции (РБФ) [17–20] при реализации метода граничных элементов (МГЭ) [21–27] и метода коллокаций [28]. Краевое условие (7) для уравнения (6) ранее не рассматривалось.

Данное исследование является продолжением большого цикла работ авторов, однако в большинстве опубликованных ранее статей рассматривались условия (7) в частном случае, когда  $f \equiv 0$  [14, 15]. В качестве непосредственно предшествующих настоящему исследованию укажем работы [13, 29], в которых рассмотрена задача (6), (7) при  $n = 1, 2$  в частных случаях. Таким образом, новизна данной статьи состоит в рассмотрении более общего, чем ранее, вида уравнения (6) вкуче с краевым условием (7). Отметим, что в доступных источниках мы не нашли решений задач, подобных (6), (7). Для задачи (6), (7) в следующих разделах представлена теорема существования и единственности аналитического решения, разработан алгоритм численного решения, описан тестовый пример.

## 2. Теорема существования и единственности

Под аналитической функцией в окрестности точки мы понимаем функцию действительной переменной, которая совпадает в этой окрестности со своим разложением в ряд Тейлора. Сформулируем теорему, обеспечивающую существование и единственность аналитического решения задачи (6), (7). Поскольку случай  $n=1$  рассматривался ранее, будем далее считать, что  $n > 1$ .

**Теорема.** Пусть в задаче (6), (7) функции  $p(u)$ ,  $q(u)$ ,  $f(t)$  и  $g(t)$  являются аналитическими в некоторой окрестности точек  $u = 0$  и  $t = 0$  соответственно, и справедливы соотношения  $p'(0) > 0$ ,  $q(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $g'(0) > 0$ ;  $g(0) > 0$ . Тогда задача (6), (7) при вы-

боре направления движения фронта тепловой волны имеет единственное аналитическое решение в точке  $t = 0$ ,  $\rho = g(0)$ .

**Доказательство.** Предваряя доказательство, подчеркнем, что в условиях теоремы задача (6), (7) вырождается [30] в точке  $t = 0$ ,  $\rho = g(0)$ , что препятствует применению классических теорем и приводит к необходимости доказательства специального утверждения, обеспечивающего существование и единственность решения. Обоснование теоремы проводится по схеме, ранее неоднократно использованной в аналогичных (более простых) случаях в работах авторов [9, 29], поэтому опишем его кратко, останавливаясь только на ключевых моментах.

Доказательство состоит из трех этапов: предварительного и двух основных. На предварительном этапе определяется направление движения тепловой волны. Для этого необходимо сделать в задаче (6), (7) замену  $z = \rho - g(t)$ ,  $y = t$  (несложно убедиться, что она невырожденная),

$$u_y - g'(y)u_z = uu_{zz} + p(u)u_z^2 + \frac{(n-1)uu_z}{z + g(y)} + q(u), \quad u|_{z=0} = f(y), \quad (8)$$

и положить  $y = z = 0$ . Получившееся квадратное уравнение  $p(0)u_z^2(0,0) + q'(0)u_z(0,0) - f'(0) = 0$  в условиях теоремы имеет два действительных корня  $u_z(0,0) = u_{\pm}$ , выбор одного из них определяет направление тепловой волны:  $u_-$  – движение вправо;  $u_+$  – движение влево, в сторону особой точки  $\rho = 0$ .

Первый основной этап посвящен построению решения в виде двойного ряда по степеням переменных  $y$ ,  $z$ , коэффициенты которых определяются путем последовательного дифференцирования уравнения с учетом граничных условий. Фактически выполняется построение ряда Тейлора для функции  $u(y, z)$ , причем в условиях теоремы коэффициенты определяются однозначно при решении трехдиагональных невырожденных систем линейных алгебраических уравнений [31].

Второй основной этап состоит в доказательстве сходимости построенного ряда. С учетом особенностей параболических уравнений, в частности примера С. В. Ковалевской [32], это нетривиальная задача. Тем не менее, путем серии последовательных замен удастся свести задачу (8) к характеристической задаче Коши [33], которая подпадает под действие ранее доказанного аналога [9] теоремы Коши–Ковалевской [33], что и гарантирует существование аналитического решения, которое по построению при определенном выборе корня  $u_{\pm}$  является единственным.

Вернемся к физическим переменным. В силу аналитичности функции  $g(t)$  построенное решение является аналитическим в некоторой окрестности точки  $t = 0$ ,  $\rho = g(0)$ , причем  $u(0,0) = 0$ ,  $u_t^2(0,0) + u_{\rho}^2(0,0) > 0$ . Отсюда по непрерывности имеем, что при  $t \geq 0$  существует линия  $\rho = a(t)$ , на которой выполнено условие

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, построенное в ходе доказательства решение, стыкуясь с тривиальным  $u \equiv 0$ , образует тепловую волну с фронтом  $\rho = a(t)$ .

### 3. Алгоритм численного решения

Опираясь на разработанный ранее подход [7, 11, 13], задачу (6), (7) на заданном промежутке  $t \in [0, T]$  будем решать по шагам, используя разностную аппроксимацию по времени. На каждом шаге  $t_k = kh$  требуется найти функцию  $u(t_k, \rho)$ , удовлетворяющую уравнению (6) и условию (7), в области ее положительных значений. Эта область определяется движением нулевого фронта тепловой волны  $\rho = a(t)$ , где выполняется условие (9).

Отметим, что функция  $a(t)$  в задаче (6), (7) не задана, поэтому область решения  $\rho \in [a(0), a(t_k)]$  неизвестна. Укажем также, что в общем случае  $g(t_k) \in (a(0), a(t_k))$ .

Для корректной формулировки задачи на шаге  $t_k$  в известной области, по аналогии с работами [11, 13], сделаем специальную замену переменных. А именно, поменяем ролями пространственную переменную  $\rho$  и искомую функцию  $u$ , поскольку из условия (7) с учетом (9) следует, что  $u \in [0, f(t_k)]$  (известная область) при  $\rho \in [g(t_k), a(t_k)]$ . Предположим при этом, что функция  $f(t)$  монотонна при  $t \in [0, T]$ . Тогда уравнение (6) в новых переменных примет вид

$$\rho_t \rho_u^2 = u \rho_{uu} - p(u) \rho_u - \frac{(n-1)u \rho_u^2}{\rho} - q(u) \rho_u^3, \quad (10)$$

где  $\rho = \rho(t_k, u)$  – функция, обратная к  $u(t_k, \rho)$ . Задачу (6), (7) в момент  $t_k$  будем далее решать в два этапа.

Этап 1. Рассмотрим задачу (6), (7) на отрезке  $\rho \in [r, R]$ , где  $r = g(t_k)$ ,  $R = a(t_k)$ . После замены переменных ей будет соответствовать следующая задача в известной области  $u \in [0, U]$ ,  $U = f(t_k)$ :

$$\rho_{uu} = \frac{1}{u} \left( \rho_t \rho_u^2 + p(u) \rho_u + \frac{(n-1)u \rho_u^2}{\rho} + q(u) \rho_u^3 \right), \quad (11)$$

$$\rho|_{u=U} = r. \quad (12)$$

Фактически уравнение (11) является обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка, и для решения задачи (11), (12) необходимо сформулировать дополнительное граничное условие. Отметим, что значение новой искомой функции  $\rho$  при  $u = 0$  соответствует неизвестному положению нулевого фронта в рассматриваемый момент,

$$\rho|_{u=0} = a(t_k). \quad (13)$$

Можно показать [7], что из (13) следует условие для производной:

$$\rho_u|_{u=0} = -\frac{p(0)}{a'(t_k)}. \quad (14)$$



Функция  $a(t)$  неизвестна, поэтому использовать в исходном виде условие (14) невозможно. Построим его приближенный вид, для выполнения которого достаточно исходных данных. Используя квадратичную аппроксимацию функции  $\rho(0,t)=a(t)$  на промежутке  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ , уравнение (14) можно привести к следующему разностному виду [11]:

$$\frac{2(\rho(t_k,0) - \rho(t_{k-1},0))}{h} = -\frac{p(0)}{\rho_u(t_k,0)} - \frac{p(0)}{\rho_u(t_{k-1},0)}. \quad (15)$$

Равенство (15) связывает значения искомой функции и ее производной на текущем шаге  $t_k$  и предыдущем шаге  $t_{k-1}$ . Для использования этого уравнения на первом шаге ( $t = t_1 = h$ ) необходимо знать эти значения в начальный момент  $t = 0$ . Очевидно, что  $\rho(0,0) = 0$ . Для нахождения  $\rho_u(0,0)$  возьмем полную производную по времени в условии (12), записанном в произвольный момент времени:

$$(\rho_t + \rho_u f'(t))|_{u=f(t)} = g'(t). \quad (16)$$

Из (16) следует, что при  $u = f(t)$

$$\rho_t = -\rho_u f'(t) + g'(t). \quad (17)$$

Подстановка (17) в уравнение (10) приводит к соотношению

$$(-\rho_u f'(t) + g'(t))\rho_u^2 = u\rho_{uu} - p(u)\rho_u - \frac{(n-1)u\rho_u^2}{\rho} - q(u)\rho_u^3. \quad (18)$$

Тогда при  $t = 0$ ,  $u = f(0) = 0$  имеем

$$f'(0)\rho_u^2(0,0) - g'(0)\rho_u(0,0) - p(0) = 0. \quad (19)$$

В принятых предположениях квадратное уравнение (19) имеет два действительных корня разных знаков, которые соответствуют корням  $u_{\pm}$  из предыдущего раздела. Примем для определенности, что  $\rho_u < 0$  (при другом выборе выкладки абсолютно аналогичны), тогда

$$\rho_u(0,0) = \frac{g'(0) - \sqrt{[g'(0)]^2 + 4f'(0)p(0)}}{2f'(0)}. \quad (20)$$

Учитывая (20), можно утверждать, что условие (15) связывает граничные значения искомой функции и ее производной для уравнения (11) в момент  $t_k$  с помощью известных значений на предыдущем шаге:

$$\left( \frac{2\rho(t_k, u)}{h} + \frac{p(0)}{\rho_u(t_k, u)} \right) \Big|_{u=0} = \frac{2\rho(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{p(0)}{\rho_u(t_{k-1}, 0)} = v^*. \quad (21)$$

Таким образом, мы имеем второе граничное условие для уравнения (11). Решение задачи (11), (12), (21) будем искать в виде

$$\rho(t_k, u) = \lambda(u) + \mu(u), \quad (22)$$

где  $\lambda(u)$  – частное решение уравнения (11) в момент  $t_k$ ,  $\mu(u)$  – решение следующей задачи для ОДУ:

$$\mu'' = 0, \quad (23)$$

$$\mu|_{u=U} = r - \lambda(U), \quad (24)$$

$$\frac{2(\lambda(0) + \mu)}{h} + \frac{p(0)}{\lambda'(0) + \mu'|_{u=0}} = v^*. \quad (25)$$

Если частное решение  $\lambda(u)$  найдено, то решение задачи (23)–(25) определяется однозначно и имеет вид

$$\mu(u) = s(u - U) + r - \lambda(U), \quad (26)$$

где  $s = s(\lambda)$  – отрицательный корень квадратного уравнения

$$2Us^2 + (hv^* - 2(\lambda(0) - \lambda(U) - U\lambda'(0) + r))s - 2\lambda'(0)(\lambda(0) - \lambda(U) + r) - hp(0) + hv^*\lambda'(0) = 0, \quad (27)$$

к которому сводится условие (25).

Ввиду зависимости правой части уравнения (11) от искомой функции, решение вида (22) задачи (11), (12), (21) будем строить итерационно, по следующей процедуре:

$$\lambda_0 \equiv 0, \quad (28)$$

$$\mu_i(u) = s(\lambda_i)(u - U) + r - \lambda_i(U), \quad (29)$$

$$\rho_i = \lambda_i + \mu_i, \quad (30)$$

$$\lambda_{i+1}'' = \frac{1}{u} \left( \rho_{i,t}(\rho_i')^2 + p(u)\rho_i' + \frac{(n-1)(\rho_i')^2 u}{\rho_i} + q(u)(\rho_i')^3 \right). \quad (31)$$

где  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  –  $i$ -е итерации решений. Уравнение (31) будем решать методом коллокаций с помощью разложения правой части по РБФ:

$$\frac{1}{u} \left( \rho_{i,t}(\rho_i')^2 + p(u)\rho_i' + \frac{(n-1)(\rho_i')^2 u}{\rho_i} + q(u)(\rho_i')^3 \right) = \sum_{m=1}^M \alpha_{i+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(u), \quad (32)$$

где  $\varphi^{(m)}(u) = \varphi^{(m)}(|u - u_m|)$  – РБФ,  $u_1, \dots, u_M$  – точки коллокации, расположенные на отрезке  $[0, U]$ . Каждой  $\varphi^{(m)}(u)$  соответствует функция  $\psi^{(m)}(u)$ , такая что  $d^2\psi^{(m)}/du^2 = \varphi^{(m)}$ . Производная по времени вычисляется методом конечных разностей через значение, найденное на предыдущем шаге. Коэффициенты  $\alpha_{n+1}^{(k)}$ , найденные как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{u} \left( \rho_{i,t} (\rho'_i)^2 + p(u) \rho'_i + \frac{(n-1)u(\rho'_i)^2}{\rho_i} + q(u)(\rho'_i)^3 \right) \Big|_{u=u_j} = \sum_{m=1}^M \alpha_{i+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u_j), \quad j=1, \dots, M, \quad (33)$$

определяют очередную итерацию частного решения:

$$\lambda_{n+1} = \sum_{m=1}^M \alpha_{n+1}^{(m)} \psi^{(m)}(u). \quad (34)$$

При достаточной близости итераций  $\rho_{i+1}$  и  $\rho_i$  итерационная процедура останавливается, и в качестве решения задачи (11), (12), (21) в момент  $t = t_k$  принимается непрерывно дифференцируемая по  $u$  функция

$$\rho(t_k, u) = \lambda_{i+1}(u) + \mu_{i+1}(u). \quad (35)$$

Обратную функцию  $u(t_k, \rho)$  – решение задачи (6), (7) на отрезке  $\rho \in [r, R]$  – можно построить без потери точности. Отметим, что в результате решения мы также найдем положение нулевого фронта тепловой волны в момент  $t = t_k$ :

$$a(t_k) = \rho(t_k, 0). \quad (36)$$

Этап 2. Рассмотрим теперь задачу (6), (7) на отрезке  $\rho \in [r_0, r]$ ,  $r_0 = g(0) = a(0)$ . Поскольку решение предполагается непрерывно дифференцируемым в точке  $\rho = r$ , задача может быть сформулирована следующим образом:

$$u_{\rho\rho} = \frac{1}{u} (u_t - p(u)u_\rho^2 - q(u)) - \frac{(n-1)u_\rho}{\rho}, \quad \rho \in [r_0, r], \quad (37)$$

$$u|_{\rho=r} = U, \quad (38)$$

$$u_\rho|_{\rho=r} = u_\rho(t_k, r). \quad (39)$$

Здесь  $u_\rho(t_k, r)$  – значение, найденное на этапе 1. Задача (37)–(39) может быть решена итерационно, аналогично (22)–(35). В результате мы найдем непрерывно дифференцируемое по пространственной координате решение  $u(t_k, \rho)$  задачи (6), (7) в области  $\rho \in [r_0, r]$ . С учетом этапа 1 получим решение типа тепловой волны в момент  $t_k$ :

$$u = \begin{cases} u(t_k, \rho), \rho \in [g(0), a(t_k)] \\ 0, \rho > a(t_k). \end{cases} \quad (40)$$

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет построить радиально симметричное решение уравнения теплопроводности произвольной размерности с произвольным видом нелинейности.

### Пример

Для верификации предложенного алгоритма рассмотрим задачу с известным точным решением. Пусть в задаче (6), (7)  $p(u) = 1/\sigma$ . Тогда в пространстве размерности  $n$  она имеет точное радиально симметричное решение

$$u_e(\rho, t) = -\frac{\rho^2}{C + \mu t} + \frac{C^{\alpha-1} R^2}{(C + \mu t)^\alpha}, \quad (41)$$

где  $\sigma, C, R$  – положительные константы,  $\mu = \frac{2n\sigma + 4}{\sigma}$ ,  $\alpha = \frac{n\sigma}{n\sigma + 2}$ . Уравнение движения нулевого фронта тепловой волны, соответствующее решению (41), имеет вид

$$\rho = a(t) = R \left( 1 + \frac{\mu t}{C} \right)^\beta, \quad (42)$$

где  $\beta = \frac{1}{n\sigma + 2}$ .

Для тестирования алгоритма численного решения в качестве  $g(t)$  в условии (7) была принята функция

$$g(t) = R \left( 1 + \frac{2\mu t}{3C} \right)^\beta. \quad (43)$$

Тогда условие (7) принимает вид

$$u|_{\rho=g(t)} = u_e(g(t), t). \quad (44)$$

Уравнение (6) с краевым условием (44) было решено с помощью предложенного в предыдущем разделе алгоритма при  $\sigma = 4, R = 1, C = 8$ . В качестве РБФ были приняты функции  $\varphi^{(k)}(u) = |u - u_k|$ . Были построены решения для различных размерностей при различных значениях шага по времени  $h$ . В табл. 1 приведена погрешность найденного положения нулевого фронта относительно функции (42) в два момента времени. Результаты расчетов показывают, что погрешность немного растет с ростом размерности, но ее порядок остается тем же. Также наблюдается сходимость относительно шага по времени. Отметим, что положение нулевого фронта определяется на этапе 1, и именно в этой точке наблюдается

наибольшее отклонение построенного решения от точного. Таким образом, данные таблицы 1 показывают корректность расчетов на этапе 1.

Таблица 1

Погрешность определения нулевого фронта

$n$	$h$	$t$	Погрешность
2	0,1	0,5	$5,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	0,5	$2,8 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	0,5	$1,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	1	$8,3 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	1	$4,4 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	1	$2,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	0,5	$6,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	0,5	$3,5 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	0,5	$1,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	1	$9,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	1	$4,9 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	1	$2,6 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	0,5	$8,5 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	0,5	$4,3 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	0,5	$2,2 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	1	$1,0 \cdot 10^{-4}$
5	0,05	1	$5,2 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	1	$2,7 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Погрешность численного решения в точке  $\rho = g(0)$

$n$	$h$	$t$	Погрешность
2	0,1	0,5	$6,2 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	0,5	$3,6 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	0,5	$2,1 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	1	$9,3 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	1	$5,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	1	$3,6 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	0,5	$7,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	0,5	$4,3 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	0,5	$2,5 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	1	$9,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	1	$5,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	1	$3,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	0,5	$8,6 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	0,5	$4,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	0,5	$2,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	1	$9,4 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	1	$5,7 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	1	$3,5 \cdot 10^{-5}$

В табл. 2 для оценки эффективности решения на этапе 2 сравниваются погрешности численных решений в точке  $\rho = g(0) = R$ . В этой точке, как наиболее удаленной от точки, где заданы граничные условия, наблюдается наибольшее отклонение от точного решения. Данные табл. 2 демонстрируют сходимость относительно шага по времени, а следовательно, корректность расчетов на этапе 2.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность разработанного алгоритма численного построения радиально симметричной тепловой волны.

#### 4. Заключение

В работе рассмотрено нелинейное уравнение теплопроводности с источником. Для него сформулирована задача построения в пространстве произвольной размерности радиально симметричного решения типа тепловой волны, порождаемой ненулевым краевым режимом, заданным на подвижном многообразии. Для поставленной задачи доказана новая теорема существования и единственности решения в классе кусочно-аналитических функций, а также предложен пошаговый алгоритм численного построения решения на основе метода коллокаций с использованием радиальных базисных функций. На одном из этапов численного алгоритма используется замена типа преобразования годографа. Рассмотренный тестовый пример продемонстрировал хорошую точность предложенного алгоритма и сходимость относительно шага по времени.

Проведенные исследования позволили расширить область применения разрабатываемого авторами комплексного подхода к построению решений вырождающихся нелинейных уравнений параболического типа и открывают широкие перспективы для дальнейшего развития методов решения нелинейных задач математической физики высокой размерности с особенностями.

#### Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН (тема АААА-А18-118020790140-5).*

#### Литература

1. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
2. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
3. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. : Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
4. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 3. – С. 411–417.
5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика, механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.

7. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
8. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
9. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
10. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
11. Kazakov A. L., Nefedova O. A., Spevak L. F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 59, No. 6. – P. 1015–1029. – DOI: 10.1134/S0965542519060083.
12. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term / A. L. Kazakov, L. F. Spevak, O. A. Nefedova, A. A. Lempert // Symmetry. – 2020. – Vol. 12, iss. 6. – P. 921 (3–15). – DOI: 10.3390/sym12060921.
13. Kazakov A. L., Spevak L. F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 6. – P. 54–67. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6\\_350.html](http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html)
14. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v16ru.html> (accessed: 14.12.2021).
15. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Приближенные и точные решения вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности с произвольной нелинейностью // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2020. – Т. 34. – С. 18–34. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18.
16. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.
17. Powell M. J. D. The theory of radial basis function approximation // Advances in Numerical Analysis : vol. 2 / ed. by W. Light. – Clarendon Press, Oxford, 1992. – P. 105–210.
18. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // Acta Numerica. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: 10.1017/S0962492914000130.
19. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. – Cambridge Univ. Press, 2003. – 272 p. – ISBN 0521633389.
20. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – Vol. 23. – P. 285–296. – DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
21. Banerjee P. K., Butterfield R. Boundary element methods in engineering science. – US : McGraw-Hill Inc., 1981. – 452 p. – ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.

22. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques* – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer-Verlag, 1984. – 464 p.– DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3. – ISBN 978-3-642-48862-7.
23. Nardini D., Brebbia C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Applied Mathematical Modelling*. – 1983. – Vol. 7, No. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
24. Wrobel L. C., Brebbia C. A., Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction // *Finite Elements in Water Resources VI*. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – P. 801–811.
25. Wrobel L. C., Brebbia C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for diffusion problems. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* – 1987. – Vol. 65, iss. 2. – P. 147–164. – DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
26. Golberg M. A. The numerical evaluation of particular solutions in the BEM – A review // *Boundary Elements Communications*. – 1995. – Vol. 6. – P. 99–106.
27. Golberg M. A. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method // *Applied Mathematics and Computation*. – 1996. – Vol. 75, iss. 1. – P. 91–101. – DOI: 10.1016/0096-3003(95)00123-9.
28. Chen C. S., Chen W., Fu Z.-J. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. – DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
29. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates // *Journal of Applied and Industrial Mathematics* – 2018. – Vol. 12. – No. 2. – P. 255–263. – DOI: 10.1134/S1990478918020060.
30. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. – New York : Springer-Verlag, 1993. – 388 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
31. Баутин С. П., Казаков А. Л. *Обобщенная задача Коши и ее приложения*. – Новосибирск : Наука, 2006. – 397 с. – ISBN 5-02-032540-6.
32. Kozlov V. V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person // *Russian Mathematical Surveys*. – 2000. – Vol. 55, iss. 6. – P. 1175–1192. – DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.
33. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II : Partial Differential Equations*. – New York : Interscience Publishers, Inc., 2008.



**Received:** 28.02.2023

**Revised:** 24.04.2023



**Accepted:** 28.04.2023



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.2.065-074



## THE IMPACT OF BRIDGE CROSSING SPAN DAMAGE UNDER MOVING LOAD

V. V. Korepanov<sup>a)\*</sup>, T. O. Korepanova<sup>b)</sup>, and R. V. Tsvetkov<sup>c)</sup>

*Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
1 Ak. Koroleva St., Perm, 614013, Russia*

<sup>a)</sup>  <https://orcid.org/0009-0007-5224-820X>  kvv@icmm.ru;

<sup>b)</sup>  <https://orcid.org/0009-0001-4202-0734>  tansan2002@mail.ru;

<sup>c)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-9617-407X>  flower@icmm.ru

\*Corresponding author. E-mail: kvv@icmm.ru

Address for correspondence: ul. Ak. Koroleva Street, 1, Perm, 614013, Russia

Tel.: 8 (342) 237-8330

The structure of the bridge crossing span structure is simulated in order to determine the most informative parameters, which need to be measured in the process of monitoring system operation. To assess the influence of structural component integrity on the static deflections and dynamic response, damages were introduced into the model, which were simulated by removal of a part of the structural components. On the basis of a numerical model of calculating a span structure under static and dynamic moving load, it is shown how increasing damage changes deflection and natural frequencies, which can be reliably recorded by the monitoring system.

**Keywords:** damage, span, numerical calculation, monitoring system, moving load.

### Acknowledgment

*The work was performed under the state assignment to the Perm Federal Research center, UB RAS, theme No. AAAA-A19-19012290100-8.*

### References

1. Aganov I.A., Osadchiy G.V., Efanov D.V., Kiselev M.V., Kallistov A.S. Structured monitoring system on a road bridge across the Ob River near Surgut. *Mir Dorog*, 2021, vol. 139, pp.108–110. (In Russian).
2. Yashnov Andrey N., Baranov Timofey M. Monitoring of dynamic behavior of bridge across the Angara in Irkutsk. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta Arkhitektury i Stroitelstva*, 2017, vol. 1, pp. 199–209. (In Russian).
3. Nepomnyashchiy V.G., Yashchenko A.I., Osadchiy G.V. Continuous monitoring of the bridge over the Golden Horn Bay. *Dorogi. Innovatsii v Stroitelstve*, 2012, vol. 19, pp. 30–34. (In Russian).
4. Ovchinnikov I.G., Kosaurov A.P., Surov D.I. Continuous remote monitoring and diagnostics of technical condition of bridges. *Inzhenerno-Stroitelnyy Vestnik Prikaspiya*, 2019, No. 3 (29), pp. 16–24. (In Russian).
5. Shcheglova N.N. The analyses of natural frequencies of the bridge structures in the process of crippling. *Nauka i Obrazovanie*, 2012, No. 3, p. 40. (In Russian). Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/311032.html>
6. Zabelin A.V., Pyhalov A.A. Analysis of correlation of own frequencies and vectors of oscillations of finite-element models of a framework of bridges. *Izvestiya Vuzov. Investitsii*.

*Stroitelstvo. Nedvizhimost*, 2018, vol. 8, No. 1, pp. 143–159. (In Russian). DOI: 10.21285/2227-2917-2018-1-143-159.

7. Loktev A.A., Loktev D.A., Illarionova L.A., Barakat A. Features of the dynamic behavior of the span structure of low-water bridges. *Transport. Transportnyye Sooruzheniya. Ekologiya*, 2022, No. 2, pp. 72–81. (In Russian). DOI: 10.15593/24111678/2022.02.09 10.15593/24111678/2022.02.09.

8. Jenkins G.M., Watts D.G. *Spectral Analysis and Its Applications*, San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, Holden-Day, 1968, 525 p.

9. Marple S. Lawrence. *Digital Spectral Analysis: With Applications*, Prentice-Hall, 1987, 492 p. ISSN 1050-2769.

10. Valeev S.G., Faskhutdinova V.A. The cross-spectral analysis of time series. *Vestnik Ulyanovskogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2006, No. 4, pp. 30–33. (In Russian).

11. Krutikov O.V., Gershuni I.Sh., Ryzhov D.I. Evaluation of the self-induced vibrations modes of bridge superstructure during monitoring. *Transportnye Sooruzheniya*, 2022, vol. 9, No. 2, pp. 1–23. (In Russian). DOI: 10.15862/01SATS222. Available at: <https://t-s.today/PDF/01SATS222.pdf>

12. Kurakina E., Evtiukov S. Impact of static and dynamic loads of vehicles on pavement. In: *Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering 2019 (TPACEE 2019)*, Moscow, Russia, 19–22 November, 2019, E3S Web of Conferences, A. Zheltenkov, A. Mottaeva, eds., EDP Sciences, 2020, vol. 164, p. 03025. DOI: 10.1051/e3sconf/202016403025.

13. Safronov V.S., Antipov A.V. Pilot design investigation of deflected mode of road metal box span. *Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii*, 2011, No. 2 (3), pp. 63–73. (In Russian).

14. Belutsky I.Y., Kudryavtsev S.A., Lazarev I.V. Justification of the parameters of regulation of forces for steel-reinforced concrete span structures from project “43282 km” by TSNIIPSK. *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy*, 2022, vol. 18, No. 5, pp. 407–416. DOI: 10.22363/1815-5235-2022-18-5-407-416. (In Russian).

15. Kartopoltsev V.M., Kartopoltsev A.V. Regulation of dynamic characteristics of bridge spans in the conditions of the changing impact of the temporary moving load. *Professorskiy Zhurnal. Seriya Tekhnicheskie Nauki*, 2021, No. 1 (4), pp. 4–19. DOI: 10.18572/2686-8598-2021-4-1-4-19. (In Russian).

16. Averin A.N. Experimental and theoretical study of continuous bridge span vibrations under mobile load. *Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii*, 2019, No. 1 (20), pp. 41–51. (In Russian).

17. Tsvetkov R.V. Vibration-based diagnostics of the Krasavinskiy bridge over the Kama river. In: *Trudy konferentsii molodykh uchenykh “Pozdeevskie chteniya”* [The Pozdeev Readings Conference of Young Scholars, Perm, March 23–24, 2006: Proceedings]. Perm, 2006, pp. 132–136. (In Russian).

Подана в журнал: 28.02.2023



УДК 534.16



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.065-074



## ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ МОСТА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

В. В. Корепанов<sup>а)\*</sup>, Т. О. Корепанова<sup>б)</sup>, Р. В. Цветков<sup>в)</sup>

*ФГБУН Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013, Россия*

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0009-0007-5224-820X>  kvv@icmm.ru;

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0009-0001-4202-0734>  tansan2002@mail.ru;

<sup>в)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-9617-407X>  flower@icmm.ru

\* Ответственный автор. Электронная почта: kvv@icmm.ru  
Адрес для переписки: ул. Академика Королева, 1, г. Пермь, 614013, Россия  
Тел.: 8 (342) 237-83-30; факс: 8 (342) 237-84-87

Выполнено моделирование конструкции пролетного строения мостового перехода с целью определения наиболее информативных параметров, которые нужно измерять в процессе работы системы мониторинга. Для оценки влияния целостности конструктивных элементов на статические прогибы и динамический отклик в модель были внесены «повреждения», которые моделировались удалением части конструктивных элементов. На основе численной модели расчета пролетного строения при действии статической и динамической подвижной нагрузки показано, как с ростом поврежденности изменяются прогиб и собственные частоты, которые можно надежно регистрировать системой мониторинга.

**Ключевые слова:** поврежденность, пролетное строение, численный расчет, система мониторинга, подвижная нагрузка.

### 1. Введение

В настоящее время, в связи с увеличением числа автомобильного транспорта и вводом в эксплуатацию новых автодорожных объектов, приобретают большое значение вопросы безопасной эксплуатации мостовых переходов, которые являются сложными инженерными сооружениями и имеют большое социальное значение. В связи с этим вопрос безопасной эксплуатации имеет высокую значимость, и актуальным становится мониторинг таких объектов [1–4]. Основное целевое предназначение системы мониторинга – своевременная регистрация эволюций деформационного состояния, которая позволит оценить текущее деформационное состояние элементов конструкций и определить их остаточный ресурс.

Опыт создания и эксплуатации систем деформационного мониторинга сооружений показывает важность этапа предварительного моделирования конструкции с целью определения наиболее информативных параметров, которые нужно измерять в процессе работы системы мониторинга.

Поэтому в работах, посвященных мониторингу мостовых переходов, особое место уделяется созданию различных расчетных моделей и проводятся оценки основных параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние рассматриваемых объектов.

Так, в работе [5] выявляются признаки, по которым можно было бы определить место расположения опасного сечения пролета мостового перехода с точки зрения его разрушения. Для анализа выбиралась частотная математическая модель – модель колебаний системы с

распределенными параметрами. Пролет моста был представлен в виде прямолинейного стержня или балки, шарнирно опертой на концах.

Исследование эффективности использования собственных частот и векторов колебаний конечно-элементных моделей пролетных строений мостов для анализа их корреляции проведено в работе [6].

В работе [7] рассматриваются особенности эксплуатации низководных мостов с одним пролетным строением. Анализируются колебания пролетного строения моста с учетом его взаимодействия с другими элементами конструкции и окружающей среды (грунт, вода). В качестве характеристики, по изменению которой можно судить об изменении состояния мостового сооружения, предложено использовать собственную частоту колебаний.

Динамические характеристики конструкции могут быть получены из данных мониторинга методами спектрального анализа [8, 9]. Кросс-спектральный анализ для двух временных рядов, реализованный в виде модуля, включенного в автоматизированную систему, и результаты исследования зависимостей между гармоническими составляющими моделей динамики двух временных рядов описаны в работе [10].

В работе [11] рассматривается методика оценки динамических характеристик моста – частот и амплитуд форм собственных колебаний – с использованием экспериментальных данных.

Построена математическая модель динамической системы, совершающей свободные колебания. Приведены формулы частотной характеристики модели и ее составляющих: амплитудной и фазовой характеристик системы.

Исследование статических и динамических нагрузок от транспортных средств, воздействующих на дорожное покрытие, с целью выявления признаков его раннего износа рассмотрено в [12].

Идеи контроля динамических параметров конструкции мостовых переходов не новы, и они широко отражены в литературе. Также много работ посвящено идентификации форм колебаний по данным измерений и определению динамического отклика на различные подвижные динамические нагрузки [13–16]. Однако нет определенного ответа на вопрос, какие формы и в каких пропорциях будут возникать в конструкции от действия эксплуатационных нагрузок, таких как движение транспорта. Поэтому моделирование динамического отклика конструкции пролетных строений представляет практический интерес в связи с оценкой потенциального влияния тех или иных повреждений рассматриваемой конструкции на его параметры. Динамический (вибрационный) отклик в определенном месте конструкции фактически представляет собой виброграмму, снятую с установленного там датчика. Таким образом, такой численный эксперимент помогает перед установкой систем мониторинга понять, каким образом и где на конструкции лучше использовать вибродатчик.

Поэтому целью исследований в данной работе является численный анализ поведения рассматриваемого пролетного строения мостового перехода с учетом различных вариантов повреждений на статическую и подвижную динамическую нагрузку.

## 2. Постановка задачи и методы решения

### 2.1. Объект исследования

Мостовые переходы, как правило, подразделяются на русловую и эстакадную части. Эстакадная часть представляет собой строения типовой планировки, а конструкция русловой части, в связи с большим размером пролетов между опорами, нередко уникальна и, как правило, имеет отличительные особенности. Поэтому она является наиболее важной с точки зрения деформационной безопасности и мониторинга всего сооружения.

Рассмотрим русловую часть моста в виде неразрезного коробчатого металлического пролетного строения, активно применяемого в мостостроении, и опирающегося на него до-

рожного полотна. Именно эта коробчатая конструкция и обеспечивает несущую способность мостового перехода. Расчетная модель конструкции данного пролетного строения представлена на рис. 1. В модели железобетонные опоры моста считались абсолютно жесткими в сравнении с другими металлическими элементами конструкции, а в месте контакта неразрезного пролетного строения с опорой предполагалась заделка по перемещениям.

В модели были заданы следующие основные геометрические параметры: общая протяженность мостового перехода составляет 966 м; рассмотрено 9 точек опирания, что соответствует 8 пролетам, из которых самый протяженный имеет длину  $L = 147$  м (рис. 1). Основные геометрические параметры расчетной модели были взяты с реальной конструкции мостового перехода.

Коробчатое строение моделировалось с помощью оболочечных и балочных элементов, а дорожное полотно – в виде оболочечных элементов.

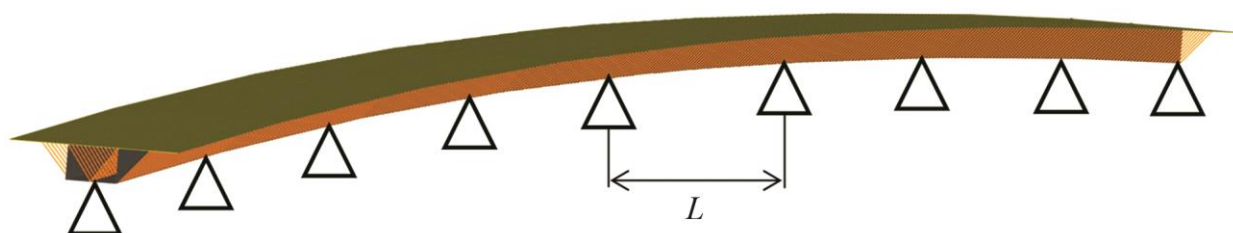


Рис. 1. Модель неразрезного пролетного строения мостового перехода

## 2.2. Методы решения

С данной расчетной моделью неразрезного пролетного строения был проведен ряд численных экспериментов, включающих решение статических и динамических задач, таких как модальный анализ и анализ переходных процессов. Численное решение данных задач реализовано в конечно-элементном пакете ANSYS.

Для оценки возможности контроля целостности конструкции в модель вносились повреждения, которые моделировались с помощью ослабления жесткости коробчатой конструкции пролетного строения. Следует отметить, что жесткость короба обеспечивается как оболочечными, так и балочными элементами. Ослабление конструкции моделировалось с помощью удаления части продольных балочных элементов в области самого длинного пролета.

В рамках статической постановки решалась задача нахождения прогиба пролетного строения мостового перехода под действием его собственного веса в упругой постановке.

Для анализа динамического отклика системы была рассмотрена задача при действии динамической нагрузки, которая возникает естественным образом при движении транспортных средств. Представим нагрузку в виде сил, возникающих при движении одного транспортного средства с постоянной скоростью. Принимается допущение, что нагрузка, равная весу автомобиля, имеет только вертикальную составляющую и передается на полотно дороги в месте контакта четырех колес. При движении нагрузки с постоянной скоростью в каждый момент времени вычисляется положение четырех колес автомобиля. Затем оценивается положение колеса относительно узлов сетки, и в случае положения колеса между узлами нагрузка распределяется на соседние узлы по линейному закону (рис. 2).

В начальный момент времени нагрузка располагалась над одной из опор мостового пролета длиной  $L = 147$  м (рис. 3) и перемещалась в направлении другой опоры. В процессе численного эксперимента фиксировались компоненты вектора перемещений в разных частях конструкции мостового перехода.

Решение динамической задачи с заданной подвижной нагрузкой было выполнено с использованием схемы прямого интегрирования по времени, которая базируется на методе Ньюмарка.

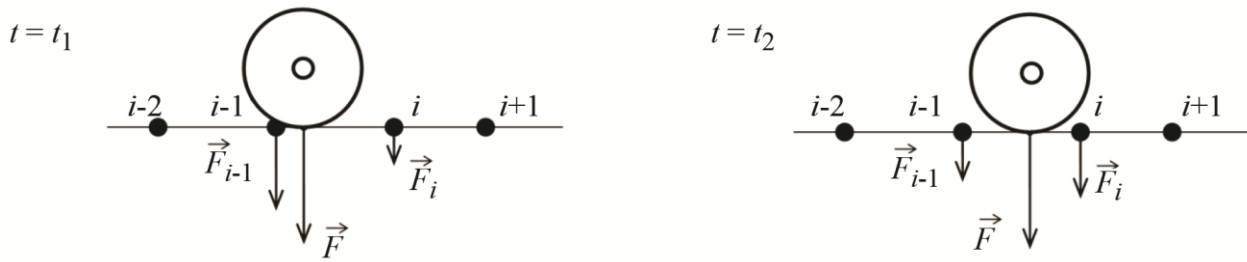


Рис. 2. Схема задания динамической нагрузки

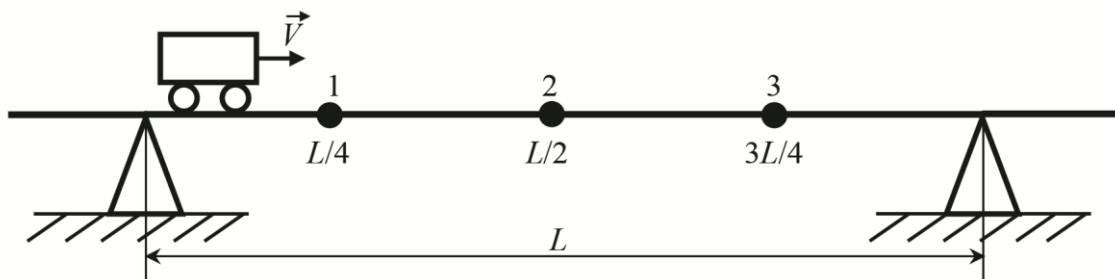


Рис. 3. Схема численного эксперимента

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1. Подбор параметров модели

Для более точной идентификации физико-механических параметров модели были использованы данные с приемо-сдаточных испытаний мостового перехода, в ходе которых производились статические и динамические нагружения [17] в окрестности самой протяженной части пролетного строения. Так, например, при испытаниях контролировался прогиб 147-метрового пролета под действием статической нагрузки. Эксперименты зафиксировали прогиб величиной около 20 см, соответствующий нагрузке 9 груженых автомобилей общей массой 200 тонн в середине пролета.

Решение соответствующей статической задачи в упругой постановке при силовой нагрузке от стоящего транспорта на элементы мостового перехода для различных граничных условий на опорах позволяло получить вертикальные смещения элементов конструкции. На основе проведенных численных расчетов этой задачи и сравнения полученных результатов с экспериментом был осуществлен подбор жесткостных характеристик элементов конструкции.

Также в ходе сдаточных испытаний проводилось динамическое нагружение конструкции мостового перехода, которое включало несколько режимов движения транспорта. При помощи соответствующих трехкомпонентных датчиков фиксировались виброскорости и ускорения конструкций в середине пролета и на опоре. Измеренные в эксперименте низшие собственные частоты использовались для уточнения массовых характеристик модели. Для этого решалась задача на собственные значения в той же постановке и с учетом тех же граничных условий, что и для статической задачи.

Полученные жесткостные и массовые характеристики использовались в дальнейшем при моделировании динамического отклика пролетного строения на подвижную нагрузку.

### 3.2. Численный расчет модели мостового перехода

Ниже представлены результаты статических и динамических задач, в которых становится заметно влияние степени поврежденности пролетного строения. Рассмотрено несколько сценариев: целая конструкция и 4 варианта ослабления конструкции (поврежденности), локализованные в первой половине пролета от 0 до  $L/2$  (рис. 3). В качестве интегральной оценки степени поврежденности конструкции была использована величина относительного изменения максимального прогиба рассматриваемого пролета под собственным весом. Нормирование проводилось по отношению к величине прогиба поврежденной конструкции. Например, степень поврежденности, составляющая 50 %, соответствует двукратному увеличению максимального прогиба пролета под собственным весом. В рассмотренных вариантах появление поврежденности снижало жесткость пролета с 2 до 15 %.

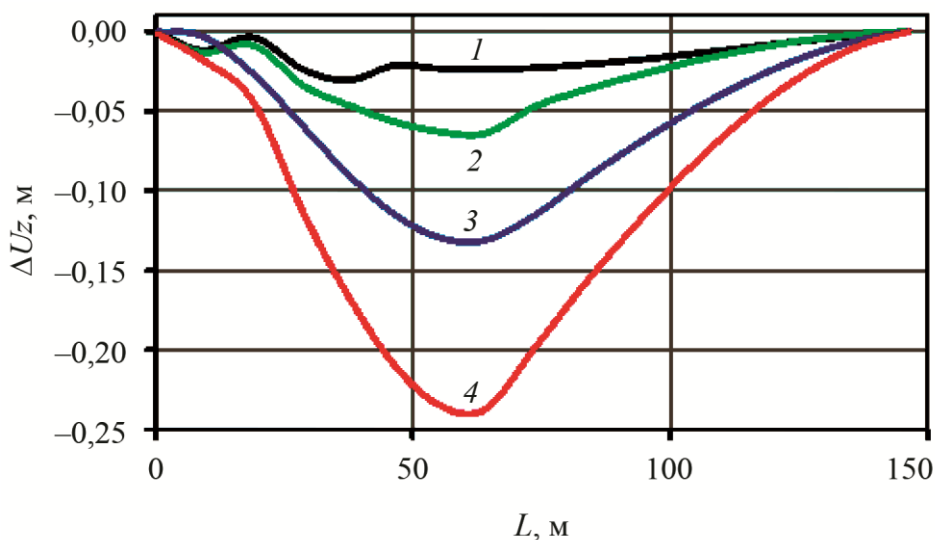


Рис. 4. Изменение прогиба пролета в зависимости от степени его поврежденности

На рис. 4 представлены численные расчеты по изменению статического прогиба  $U_z$  самого длинного пролета моста под действием его собственного веса при разной степени поврежденности по сравнению с моделью без повреждений, где 1 – это кривая изменения прогиба, соответствующая снижению жесткости пролета на 2,1 %, 2 – на 4,2 %, 3 – на 9,8 %, 4 – на 15,8 %. Как видно из приведенных результатов, ослабление конструкции ведет к увеличению прогиба; также можно отметить и влияние местоположения повреждения на кривую изменения прогиба. Увеличение максимального прогиба на 23 см для четвертого варианта поврежденности сопоставимо с результатом, полученным при испытаниях мостового перехода.

Для оценки влияния целостности конструктивных элементов на динамический отклик на подвижную нагрузку были сделаны численные эксперименты с учетом различных повреждений. В расчете моделировалось движение одного транспортного средства массой 20,1 тонн (по 5 кН на колесо) по центральной полосе со скоростью 10 м/с. На рис. 3 показаны точки, в которых фиксировались колебания конструкции пролетного строения мостового перехода.

На рис. 5 представлены графики вертикальной компоненты виброперемещений в точке 2 (рис. 3) при моделировании движения автомобиля со скоростью 10 м/с с различной степенью поврежденности. Полученные результаты (рис. 5) показывают, что с ростом поврежденности квазистатический прогиб увеличивается.

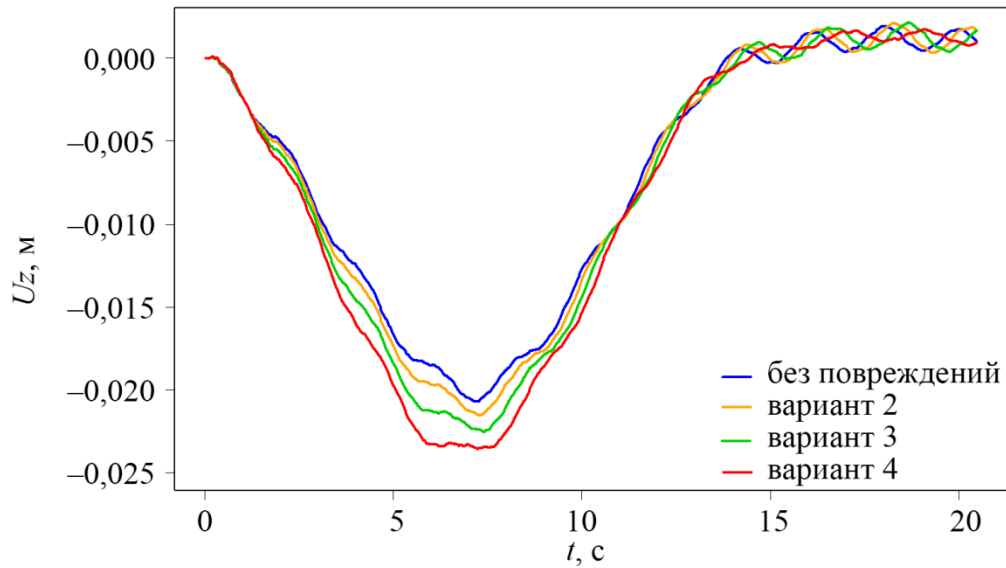


Рис. 5. Вертикальные компоненты виброперемещений  $U_z$  в точке 2 при моделировании движения автомобиля со скоростью 10 м/с

Для оценки амплитудно-частотного отклика конструкции использовалось фурье-преобразование для виброскоростей, полученных путем численного дифференцирования перемещений. Это сделано, чтобы исключить на фурье-спектре влияние квазистатического прогиба.

На рис. 6 представлены фурье-образы  $Fur(V_z)$  вертикальной компоненты виброскорости  $V_z$  отклика конструкции в точке 3 (рис. 3) на подвижную нагрузку. На графиках заметно смещение некоторых частот при наличии поврежденности в конструкции. Дополнительный модальный анализ позволяет уточнить значения данных частот (см. табл.). В приведенной таблице представлены результаты изменения четырех собственных частот при разной степени поврежденности относительно целой конструкции. Наблюдаемые в численном эксперименте формы колебаний соответствуют номерам полувольт в таблице. Частота № 1 – одна полуволна, № 2 – две полуволны и т. д.

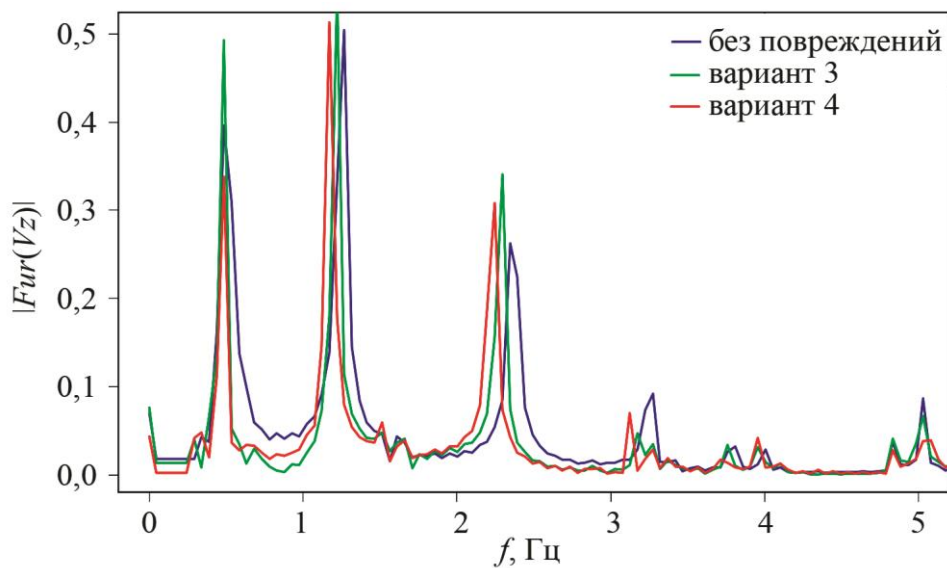


Рис. 6. Фурье-спектры вертикальной компоненты виброскоростей в точке 3



Таблица

Сдвиг частот для четырех собственных форм

№	Без повреждений $f$ , Гц	1 вариант $\Delta f$ , %	2 вариант $\Delta f$ , %	3 вариант $\Delta f$ , %	4 вариант $\Delta f$ , %
1	0,5126	1,0%	1,8%	4,3%	7,1%
2	1,252	0,6%	1,3%	3,10%	3,9%
3	2,386	0,7%	1,5%	3,7%	6,0%
4	3,282	0,4%	0,9%	2,2%	3,4%

Расчеты показали, что основной спектр частот конструкции располагается ниже 10–15 Гц.

Анализируя результаты численных расчетов для динамических задач при действии подвижной нагрузки, можно обратить внимание на то, что собственные частоты по-разному реагируют на появление повреждений. Заметный сдвиг по частотам можно увидеть для второй и третьей форм колебаний как на графиках (рис. 6), так и в приведенной таблице. Однако заметный сдвиг частот в модальном анализе не всегда можно зарегистрировать в реальном эксперименте. Так, низшая собственная частота 0,51 Гц в данном примере за 20 секунд измерений методом фурье-анализа определяется с шагом 0,02 Гц, что недостаточно для оценки степени поврежденности конструкции. Измерения необходимо проводить на более длительном интервале времени, за который автомобиль уедет за пределы пролета. Также можно отметить, что при нахождении датчика вблизи узла формы колебаний сильно снижается ее информативность (на рис. 6 четвертая форма колебаний при частоте 3,2 Гц малозаметна).

#### 4. Заключение

Проведены численные исследования по расчету модели пролетного строения моста, включающие в себя решения статических и динамических задач, в том числе с учетом подвижной нагрузки от транспорта. Анализ результатов с учетом введенных в модель повреждений позволил оценить их влияние на деформационную реакцию конструкции, выраженную в виде прогибов и собственных частот. Полученные результаты можно использовать для выбора параметров и положения датчиков для системы мониторинга мостового перехода.

#### Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания ПФИЦ УрО РАН (номер темы АААА-А19-19012290100-8).*

#### Литература

1. Система структурированного мониторинга на автодорожном мосту через реку Обь вблизи Сургута / И. А. Аганов, Г. В. Осадчий, Д. В. Ефанов, М. В. Киселёв, А. С. Каллистов // Мир дорог. – 2021. – № 139. – С. 108–110.
2. Яшнов А. Н., Баранов Т. М. Некоторые результаты работы системы динамического мониторинга Академического моста через р. Ангару в Иркутске // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2017. – № 1. – С. 199–209.
3. Непомнящий В. Г., Ященко А. И., Осадчий Г. В. Непрерывный мониторинг мостового перехода через бухту Золотой Рог // Дороги. Инновации в строительстве. – 2012. – № 19. – С. 30–34.

4. Овчинников И. Г., Косауров А. П., Сувор Д. И. Непрерывный удаленный мониторинг и диагностика технического состояния мостов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2019. – № 3 (29). – С. 16–24.
5. Щеглова Н. Н. Анализ собственных частот конструкций мостов при нарушении их целостности // Наука и образование. – 2012. – № 3. – С. 40.
6. Забелин А. В., Пыхалов А. А. Анализ корреляции собственных частот и векторов колебаний конечно-элементных моделей пролетных строений мостов // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2018. – Т. 8, № 1. – С. 143–159. – DOI: 10.21285/2227-2917-2018-1-143-159.
7. Особенности динамического поведения пролетного строения низководных мостов / А. А. Локтев, Д. А. Локтев, Л. А. Илларионова, А. Баракат // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. – 2022. – № 2. – С. 72–81. – DOI: 10.15593/24111678/2022.02.09.
8. Jenkins G. M., Watts D. G. Spectral Analysis and Its Applications. – San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam : Holden-Day, 1968. – 525 p.
9. Marple S. L. Digital Spectral Analysis with Applications. – Prentice-Hall, 1987. – 492 p.
10. Валеев С. Г. Кросс-спектральный анализ временных рядов // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2006. – № 4. – С. 30–33.
11. Крутиков О. В., Гершуни И. Ш., Рыжов Д. И. Оценка форм собственных колебаний пролетных строений моста при мониторинге // Интернет-журнал «Транспортные сооружения». – 2022. – Т. 9, № 2. – С. 1–23. – DOI: 10.15862/01SATS222. – URL: <https://t-s.today/PDF/01SATS222.pdf>
12. Kurakina E., Evtiukov S. Impact of static and dynamic loads of vehicles on pavement // Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering 2019 (TPACEE 2019), Moscow, Russia, November 19–22, 2019 : proceedings. – E3S Web of Conferences / ed. by A. Zheltenkov, A. Mottaeva. – EDP Sciences, 2020. – Vol. 164. – P. 03025. – DOI: 10.1051/e3sconf/202016403025.
13. Сафронов В. С., Антипов А. В. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния металлического коробчатого пролетного строения автодорожного моста // Строительная механика и конструкции. – 2011. – № 2 (3). – С. 63–73.
14. Белуцкий И. Ю., Кудрявцев С. А., Лазарев И. В. Обоснование параметров регулирования усилий сталежелезобетонных пролетных строений разработки ЦНИИПСК «43282 км» // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2022. – Т. 18, № 5. – С. 407–416. – DOI: 10.22363/1815-5235-2022-18-5-407-416.
15. Картопольцев В. М., Картопольцев А. В. Регулирование динамических характеристик пролетных строений мостов в условиях изменяющегося воздействия временной подвижной нагрузки // Профессорский журнал. Серия «Технические науки». – 2021. – № 1 (4). – С. 4–19. – DOI: 10.18572/2686-8598-2021-4-1-4-19.
16. Аверин А. Н. Экспериментально-теоретические исследования колебаний неразрезного пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1 (20). – С. 41–51.
17. Цветков Р. В. Вибродиагностика Красавинского мостового перехода через реку Кама // Научная конференция молодых ученых по механике сплошных сред, посвященная 80-летию со дня рождения чл.-корр. АН СССР Александра Александровича Поздеева «Поздеевские чтения», Пермь, 23–24 марта 2006 г. : сборник научных трудов. – Пермь, 2006. – С. 132–136.