

DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2

Diagnostics, Resource and Mechanics *of materials and structures*

<http://dream-journal.org>

2,2022

March-April

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Konovalov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povolotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D., (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)
Мионов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурувич, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

Bratsun A. D., Bratsun D. A. and Krasnyakov I. V. Microscopic simulation of the chemomechanics of squamous cell tissue	6
Nazarov V. V. Review of the author's own results obtained from mechanical testing of titanium alloys	21
Zimina V. A. and Smolin I. Yu. Features of the stress state of porous brittle materials under tensile conditions	35
Baymetova E. S. Determination of optimal design parameters of a heat exchanging section by numerical modeling	45
Struzhanov V. V. and Chaikin A. E. Destruction of a protective pipe coating under cyclic loading by internal pressure	55

СОДЕРЖАНИЕ

Брацун А. Д., Брацун Д. А., Красняков И. В. Микроскопическое моделирование хемомеханики плоской клеточной ткани	6
Назаров В. В. Обзор по собственным результатам механических испытаний титановых сплавов	21
Зимина В. А., Смолин И. Ю. Особенности напряженного состояния пористых хрупких материалов в условиях растяжения	35
Байметова Е. С. Определение оптимальных конструктивных параметров теплообменной секции путем численного моделирования	45
Стружанов В. В., Чайкин А. Е. Разрушение защитного покрытия трубы при ее циклическом нагружении внутренним давлением	55

Received: 10.02.2022

Revised: 11.03.2022

Accepted: 15.04.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.006-020

MICROSCOPIC SIMULATION OF THE CHEMOMECHANICS OF SQUAMOUS CELL TISSUE

A. D. Bratsun¹, D. A. Bratsun^{2, a), *} and I. V. Krasnyakov²

¹Academician Ye.A. Vagner Perm State Medical University of the Ministry of Healthcare of the Russian Federation,
26 Petropavlovskaya St., Perm, 614990, Russian Federation

²Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomolskiy Ave., Perm, 614990, Russian Federation

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-3229-2330>  DABracun@pstu.ru

*Corresponding author. E-mail: DABracun@pstu.ru

Address for correspondence: Komsomolskiy Pr., 29, Perm, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (342) 239 14 14; fax: +7 (342) 239 14 14

The development of computer technologies makes it possible to implement a mathematical model of tissue dynamics, which includes the behavior of individual cells. The paper describes a mathematical model of a quasi-two-dimensional tissue, which consists of cells represented by dynamically changing polygons. The model includes two important processes that mimic the properties of real cells, namely mitotic division and intercalation. An equation of motion based on the elastic potential energy is written for each vertex of the polygonal cell. In the course of evolution, the tissue tends to take a position corresponding to the minimum of potential energy. The model allows a simple extension to the case of the feedback between the biomechanical and chemical properties of the medium and the introduction of several competing tissue types. The results of numerical simulation of heterogeneous carcinoma of the solid type are given as an example. The prospects for the development of this approach to simulation are discussed.

Keywords: simulation modeling, epithelial tissue, discrete model with individual dynamics, chemo-mechanical interaction.

Acknowledgment

The work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant FSNM-2020-0026).

References

1. Bratsun D., Merkuriev D., Zakharov A., Pismen L. Multiscale modeling of tumor growth induced by circadian rhythm disruption in epithelial tissue. *J. Biol. Phys.*, 2016, vol. 42, pp. 107–132. DOI: 10.1007/s10867-015-9395-y.
2. Lesne A., Foray N., Cathala G., Forne T., Wong H., Victor J.-M. Chromatin fiber allostery and the epigenetic code. *J. Phys. Condens. Matter*, 2015, vol. 27, 064114. DOI: 10.1088/0953-8984/27/6/064114.
3. Kolobov A.V., Polezhaev A.A. Influence of random malignant cell motility on growing tumor front stability. *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, No. 2, pp. 225–232. (In Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-2-225-232.
4. Stein A.A., Yudina E.N. Mathematical model of a growing plant tissue as a three-phase deformable medium. *Russ. J. Biomech.*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 42–51. (In Russian).

5. Basan M., Elgeti J., Hannezo E., Rappel W.-J., Levine H. Alignment of cellular motility forces with tissue flow as a mechanism for efficient wound healing. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2013, vol. 110, No. 7, pp. 2452–2459. DOI: 10.1073/pnas.1219937110.
6. Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata*. London, University of Illinois Press, 1966, 388 p.
7. Simpson M.J., Landman K.A., Hughes B.D. Distinguishing between directed and undirected cell motility within an invading cell population. *Bull. Math. Biol.*, 2009, vol. 71, pp. 781–799. DOI: 10.1007/s11538-008-9381-7.
8. Chung C.A., Lin T.H., Chen S.D., Huang H.I. Hybrid cellular automaton modeling of nutrient modulated cell growth in tissue engineering constructs. *J. Theor. Biol.*, 2010, vol. 262, no. 2, pp. 267–278. DOI: 10.1016/j.jtbi.2009.09.031.
9. Interian R., Rodriguez-Ramos R., Valdes-Ravelo F., Ramirez-Torrez A., Ribeiro C.C., Conci A. Tumor growth modelling by cellular automata. *Mathematics and Mechanics Complex Systems*, 2017, vol. 5, no. 3–4, pp. 239–259. DOI: 10.2140/memocs.2017.5.239.
10. Markov M. A., Markov A.V. Computer simulation of the ontogeny of organisms with different types of symmetry. *Paleontol. J.*, 2014, vol. 48, No. 11, pp. 1–9. DOI: 10.1134/S0031030114110070.
11. Drasdo D., Loeffler M. Individual-based models to growth and folding in one-layered tissues: Intestinal crypts and early development. *Nonlinear Anal.*, 2001, vol. 47, No. 1, pp. 245–256. DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00173-0.
12. Viktorinova I., Pismen L., Aigouy B., Dahmann C. Modeling planar polarity of epithelia: the role of signal relay in collective cell polarization. *J. R. Soc. Interface.*, 2011, vol. 8, pp. 1059–1063. DOI: 10.1098/rsif.2011.0117.
13. Salm M., Pismen L.M. Chemical and mechanical signaling in epithelial spreading. *Phys. Biol.*, 2012, vol. 9, No. 2, pp. 026009–026023. DOI: 10.1088/1478-3975/9/2/026009.
14. Bratsun D.A., Krasnyakov I.V., Pismen L.M. Biomechanical modeling of invasive breast carcinoma under a dynamic change in cell phenotype: collective migration of large groups of cells. *Biomech. Model. Mechanobiol.*, 2020, vol. 19, pp. 723–743. DOI: 10.1007/s10237-019-01244-z.
15. Krasnyakov I.V., Bratsun D.A., Pismen L.M. Mathematical modeling of carcinoma growth with a dynamic change in the phenotype of cells. *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, No. 6, pp. 879–902. DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-879-902.
16. Krasnyakov I.V., Bratsun D.A., Pismen L.M. Mathematical modelling of epithelial tissue growth. *Russ. J. Biomech.*, 2020, vol. 24, no. 4, pp. 375–388. DOI: 10.15593/RJBiomech/2020.4.03.
17. Denisov E.V., Gerashchenko T.S., Zavyalova M.V., Litviakov N.V., Tsyganov M.M., Kaigorodova E.V., Slonimskaya E.M., Kzhyshkowska J., Cherdyntseva N.V., Perelmuter V.M. Invasive and drug resistant expression profile of different morphological structures of breast tumors. *Neoplasma*, 2015, vol. 62, no. 3, pp. 405–411. DOI: 10.4149/neo_2015_041.
18. Guillot C., Lecuit T. Mechanics of epithelial tissue homeostasis and morphogenesis. *Science*, 2013, vol. 340, No. 6137, pp. 1185–1189. DOI: 10.1126/science.1235249
19. Bratsun D.A., Krasnyakov I.V. Study of architectural forms of invasive carcinoma based on the measurement of pattern complexity. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2022. (In print).

Подана в журнал: 10.02.2022

УДК 519.876.5

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.006-020

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХЕМОМЕХАНИКИ ПЛОСКОЙ КЛЕТОЧНОЙ ТКАНИ

А. Д. Брацун¹, Д. А. Брацун^{2, а), *}, И. В. Красняков²

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Пермский государственный медицинский университет имени академика Е.А. Вагнера,
ул. Петропавловская, 26, Пермь, 914990, Российская Федерация

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский проспект, 29, Пермь, 914990, Российская Федерация

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-3229-2330>  DABracun@pstu.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: DABracun@pstu.ru

Адрес для переписки: Комсомольский проспект, 29, Пермь, 620049, Российская Федерация

Тел.: +7 (342) 239–14–14; факс: +7 (342) 239–14–14

Развитие компьютерных технологий позволяет реализовать математическую модель динамики клеточной ткани, которая включает поведение отдельных клеток. В работе представлена математическая модель квазидвумерной ткани, которая состоит из клеток, представленных динамически меняющимися многоугольниками. Модель включает два важных процесса, которые имитируют свойства реальных клеток: митотическое деление и интеркаляцию клеток. Для каждой вершины клетки-многоугольника записано уравнение движения, основанное на эластичной потенциальной энергии. В ходе эволюции ткань стремится занять положение, отвечающее минимуму потенциальной энергии. Модель допускает простое обобщение на случай обратной связи между биомеханическими и химическими свойствами среды, введения нескольких конкурирующих типов ткани. Приведен пример численного расчета гетерогенной карциномы солидного типа. Обсуждены перспективы развития такого подхода к моделированию.

Ключевые слова: имитационное моделирование, эпителиальная ткань, дискретная модель с индивидуальной динамикой, хемомеханическое взаимодействие.

1. Введение

Согласно закону Мура плотность транзисторов, размещаемых на кристалле микропроцессора, удваивается каждые 24 месяца. Таким образом, мощность вычислительных устройств растет со временем экспоненциально. Это означает, что потенциал использования вычислительной техники для обработки больших массивов данных и имитационного моделирования больших сложных систем все время возрастает. Причем возможности компьютеров растут быстрее, чем растут амбиции специалистов по численному моделированию применять эти технологии.

Человеческий организм представляет собой сложную систему большого числа клеток, которые координируют свою жизнедеятельность в рамках единой системы. Всего среднестатистический организм человека состоит из примерно 30 триллионов клеток, которые включают около 200 клеточных фенотипов. Характерный размер большинства структурных элементов организма лежит в пределах 5–50 мкм. Но это не единственная сложность, с которой сталкивается имитационное моделирование ткани. Проблема в том, что жизненные процессы протекают на разных пространственных масштабах: процессы генной регуляции про-

исходят на уровне ядер клеток, хемомеханическое взаимодействие регулируется на уровне клеток, процессы морфогенеза и коллективного поведения наблюдаются на уровне тканей и органов. Это означает, что любое математическое моделирование живой ткани, претендующей на реалистичность, должно быть многоуровневым. Можно дискутировать о количестве уровней пространственной самоорганизации, но сам факт многоуровневости не ставится под сомнение в абсолютном большинстве работ. По мнению авторов, минимальный набор должен включать три уровня рассмотрения: ядро – клетка – орган [1], хотя в некоторых работах предлагается булыжная детализация. Например, в работе [2] только внутри ядра клетки выделяется три пространственных уровня протекающих процессов.

Обсудим некоторые подходы к моделированию клеточной ткани. Наиболее популярным подходом до сих пор является разработка моделей сплошной среды [3–5]. Клеточная среда здесь представлена некоторой эффективной средой, свойства которой описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Модельные уравнения могут включать уравнения реакции-диффузии для концентрации веществ в ткани (например для описания геной регуляции), уравнение Навье–Стокса для скорости элементов среды (в случае наличия текучести) и уравнения упругости для распределения механических напряжений (при условии, если среда твердая, но деформируемая). Сильной стороной этого подхода является использование хорошо разработанного аппарата теории сплошных сред. Слабость подхода заключается в том, что теряется детализация процесса, так как динамика отдельных клеток в описании теряется.

Другой подход в моделировании принципиально строится с уровня отдельных элементов сложной системы. Клетки рассматриваются как отдельные динамические объекты со своей эволюцией. Ранние попытки такого моделирования связаны с клеточными автоматами [6], которые представляли собой фиксированные в пространстве элементы среды с заданными правилами взаимодействия с соседями. Работы [7–9] дают недавние примеры применения клеточных автоматов для описания живой ткани. Применение этого подхода позволило получить новые результаты, невидимые в рамках приближения сплошной среды, однако классический клеточный автомат также не способен описывать индивидуальную динамику клеток. Попытка инкорпорировать в модель микроскопическое описание привели к разработке методов сферических частиц [10, 11]. Модель сферических частиц рассматривает каждую клетку в виде сферы, которая может взаимодействовать с соседними клетками с помощью эффективного потенциала. Модель легко обобщается на случай трехмерной ткани, но является, по сути, феноменологической.

Наиболее современные модели деформируемой клетки принимают во внимание геометрию и возможность ее деформации, обусловленную как внешними, так и внутренними силами [1, 12–16]. Учитывается также возможность появления активной силы, которая может быть результатом белковой команды, генерируемой экспрессией генов. Существуют различные реализации модели деформируемых клеток. Вопрос о геометрической поляризации клеток в ткани рассматривался в работе [12]. Задача о заживлении раны была рассмотрена в [13]. В работах [1, 14–16] авторами было изучено структурообразование при росте карциномы при помощи модели деформируемой клетки. При численной реализации использовались массивы из тысяч и десятков тысяч индивидуальных клеток.

Сильной стороной дискретных моделей с индивидуальной динамикой деформируемых клеток является полноценное детализованное описание деформаций на микроскопическом уровне отдельных клеток. Численная реализация позволяет отследить динамику отдельных частиц. При этом описание всей ткани, как целого, также обеспечивается. Определенным недостатком подхода является его сложная программная реализация (особенно в части обобщения на случай 3D) и проблемы со структурной устойчивостью кода.

В работе мы описываем методологию построения модели ткани, которая включает деформируемые клетки с индивидуальной динамикой. Приводятся примеры численного расчета. Обсуждаются перспективы данного подхода к моделированию.

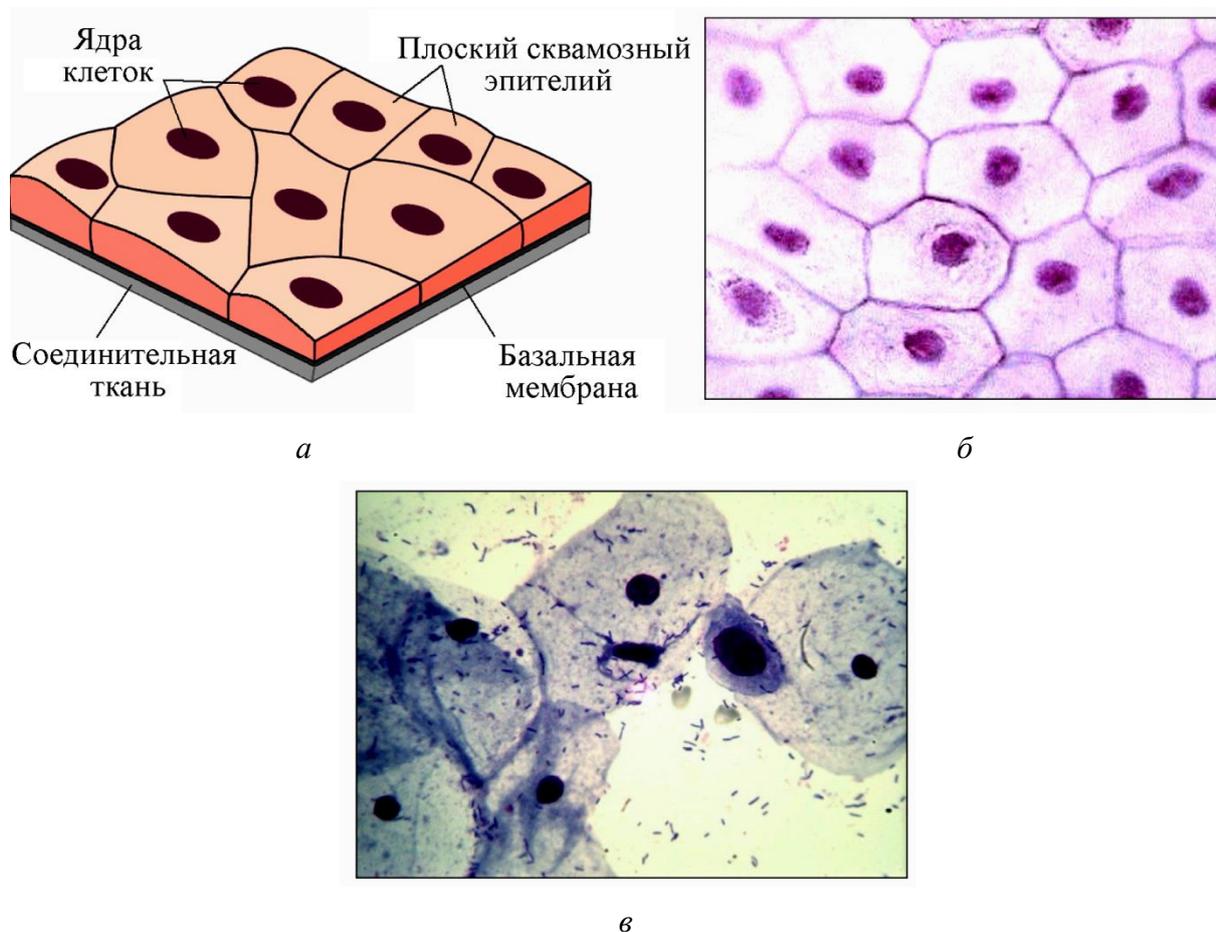


Рис. 1. Эпителиальная ткань: *а* – схематичное изображение однослойного плоского эпителия, выстилающего поверхность базальной мембраны; *б* – микрофотография здоровой ткани однослойного плоского эпителия, окраска гематоксилином и эозином; *в* – микрофотография мазка Папаниколау, демонстрирующая наличие клеток карциномы шейки матки (у раковой клетки меньший размер и более крупное ядро). Микрофотографии выполнены на оборудовании ПГМУ имени академика Е.А. Вагнера

2. Эпителиальная ткань

Наиболее удобной для отработки технологий моделирования является эпителиальная ткань. Во многих случаях эта ткань может считаться двумерной, что существенно упрощает построение модели. Даже если базальная мембрана, подстилающая эпителий, имеет сложную топологию (плотную упаковку), локальные взаимодействия клеток все равно остаются квазидвумерными.

Стоит напомнить, что ткань вообще – это эволюционно возникшая частная система организма, которая состоит из одного или нескольких дифферонов клеток и их производных и обладает специфическими функциями благодаря кооперативной деятельности всех ее элементов. Таким образом, ткань не сводится к простой сумме свойств входящих в нее элементов, что является ярким признаком сложной системы, возникшей в результате процессов самоорганизации.

Эпителий относится к одной из четырех морфофункциональных групп тканей организма (остальные три – кровь, мышечная и нервная ткани). Основная функция эпителия в организме заключается в создании разделительного барьера между средами, выполняющего защитную роль. Клетки покрывают поверхности органов, внутренних полостей и сосудов, а также формируют железы.

Эпителиальная ткань отделена от органа, который она покрывает, базальной мембраной, толщина которой не более 1 мкм (рис. 1 а). Питание клеток осуществляется, как правило, через мембрану посредством механизма диффузии. Таким образом, покровные эпителии не содержат кровеносных сосудов.

Важной особенностью эпителия является плотное прилегание клеток друг к другу. Микрофотография однослойного плоского эпителия, представленная на рис. 1 б, демонстрирует пласт эпителиоцитов, в котором практически отсутствует межклеточное вещество. Клетки связываются друг с другом при помощи десмосом. Такой же плотный контакт наблюдается между клетками и базальной мембраной. Из-за внутреннего давления форма клеток однослойного плоского эпителия близка к многоугольникам (рис. 1). Причем, отрицательные углы у вершин этих многоугольников практически не наблюдаются, так как клетки пытаются принять наиболее выгодную энергетически форму (минимальную площадь поверхности при фиксированном объеме).

Отметим, что клетки любых тканей подвергаются постоянному обновлению, вследствие чего некоторые из них отмирают. На смену им приходят новые клетки, которые появляются в результате митотического деления. Случивание умерших клеток в однослойном эпителии до последнего момента происходит без потери контакта умершей клетки с базальной мембраной. Обычно этот процесс описывается в литературе как выдавливание (экструзия) отмирающих клеток из пласта соседями. Слой эпителия при этом не теряет свою непрерывность. Как экструзия изношенных клеток, так и появление новых приводят к локальному возникновению в ткани избыточных механических напряжений, которые снимаются за счет небольшого перераспределения (шевеления) клеток в пласте, несмотря на прикрепление десмосомами друг к другу. Этот процесс происходит медленно по сравнению с характерными временами биохимических реакций, большинство из которых определяются циркадианными и ультрадианными биоритмами. В целом, клетки в эпителии свободно перемещаться не могут, что и определяет их фенотип как *эпителиальный*. Под этим понимается клетка, которая полностью подчинена командам со стороны ткани. Противоположным по смыслу является *мезенхимальный* фенотип клеток, который подразумевает свободное движение клеток в эпителии. Такое поведение свойственно, например, раковым клеткам, которые не подчиняются системным командам со стороны ткани. Отдельные раковые клетки ведут себя в ткани настолько активно, что этот тип поведения вызывает прямую ассоциацию с поведением микроорганизмов. Отсюда такой фенотип клеток называют *амебoidalным* [17]. Такое движение в пласте эпителия характерно для одиноких раковых клеток, которые приводят к метастазированию опухоли.

На рис. 1 в представлен цитологический тест, в котором присутствует раковая клетка карциномы шейки матки, раковая клетка имеет морфологию, которая заметно отличает ее от здоровых эпителиальных клеток. Характерный размер злокачественной клетки меньше, ее ядро увеличено. Таким образом, при построении модели раковые клетки следует рассматривать как конкурирующую разновидность клеток эпителия, которые имеют свой набор хемомеханических свойств.

3. Дискретная модель эпителия с индивидуальной динамикой клеток

Основываясь на базовых свойствах эпителиальной ткани, опишем основные особенности разработанной математической модели. Как видно из рис. 1 б, форма произвольной клетки однослойного плоского эпителия в замкнутом пласте с хорошей точностью может

быть представлена в виде многоугольника. Мы используем это наблюдение и вводим в рассмотрение объект индивидуальной динамики *клетки*, который представляет собой набор вершин (зеленые кружки), и соединяющих их линий красного цвета (рис. 2). Число сторон многоугольника является индивидуальной особенностью каждой клетки и может динамически меняться в ходе ее эволюции посредством нескольких механизмов, которые описываются ниже.

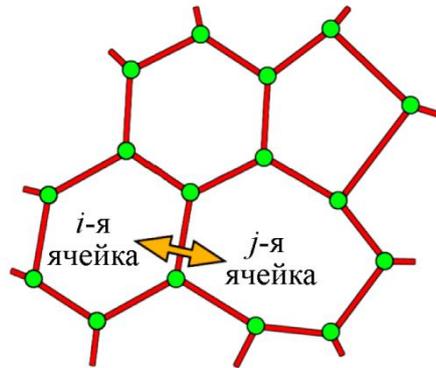


Рис. 2. Модель эпителиальной ткани, состоящей из клеток, задаваемых деформируемыми многоугольниками. Зеленые точки отмечают вершины, для которых производится расчет действия сил. Красными линиями обозначены границы клеток. Обмен химическими сигналами производится за счет диффузионных потоков белков между соседними клетками

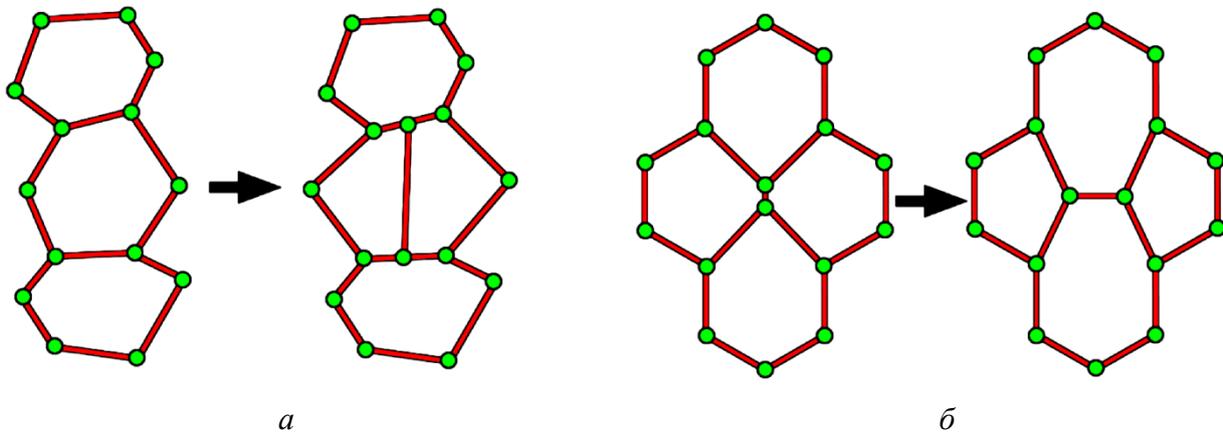


Рис. 3. Стандартные деформации клеток, заложенные в модель: *a* – митотическое деление клетки, которое в общем случае зависит от хемомеханики среды, но может происходить и случайным образом; *б* – интеркаляция двух клеток, которая наступает при уменьшении длины общей границы меньше значения, задаваемого параметром интеркаляции l_0

Пространственный уровень процессов, протекающих в масштабах клеточного ядра, задается системой дифференциальных уравнений, которые описывают экспрессию генов и генную регуляцию в клетках:

$$\frac{dC_i}{dt} = \Phi_i(C) + \alpha \sum_j l_{ij} (C_j - C_i), \quad (1)$$

где C_i – вектор концентраций веществ, участвующих в генной регуляции в i -й клетке; Φ_i – в общем случае нелинейная функция, описывающая кинетику генных реакций. Здесь и далее индексы, описывающие ансамбль клеток, будем обозначать латинскими буквами, а индексы для узлов клеток – греческими. Как видно из (1), обмен между клетками зада-

ется с помощью простого диффузионного механизма, характеризуемого коэффициентом b (рис. 2). Диффузионный поток вещества пропорционален разности его концентраций в соседних клетках и длине перемычки l_{ij} между клетками, сумма в (1) ведется только по соседям i -й клетки. Будем полагать, что внутри одной клетки концентрации веществ релаксируют настолько быстро, что в любой момент времени можно считать их постоянными в пределах рассматриваемой клетки. Таким образом, поле концентраций \mathbf{C} – дискретно, и каждая клетка является пикселем этого поля. Клетки плотно примыкают друг к другу (рис. 2), образуя сплошную поверхность без просветов, как и в естественном эпителии (рис. 1 б).

Динамическое изменение размера и формы клетки в процессе эволюции ткани происходит под действием локальных сил \mathbf{F}_ξ , приложенных к j -му узлу многоугольника:

$$\mathbf{F}_\xi = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_\xi}, \quad (2)$$

где \mathbf{R}_ξ – радиус-вектор ξ -го узла. Смещение узлов приводит к деформации клетки, а следовательно – к изменению ее площади $A(t)$ и периметра $L(t)$. Потенциальная энергия ткани в (2) задается на основе ее эластичных свойств:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N(t)} \left(\mu(\mathbf{C}_i) L_i(t)^2 + \eta(\mathbf{C}_i) (A_i(t) - A_0)^2 \right), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем $N(t)$ клеткам рассматриваемой системы, число которых может меняться со временем (например за счет деления клеток). Коэффициенты эластичности среды $\mu(\mathbf{C})$ и $\eta(\mathbf{C})$ являются важными величинами модели, определяющими свойства деформации среды. Первое слагаемое в энергии (3) описывает действие сил, стремящихся сократить периметр каждой клетки, а второе – представляет собой сопротивление клетки действию сил растяжения и сжатия со стороны среды и стремление клетки сохранить свою среднюю площадь A_0 (входной параметр модели). В общем случае коэффициенты эластичности являются функциями химических сигналов, поступающих с уровня генной регуляции, управляемой уравнениями (1). Таким образом, биохимические процессы в ядрах могут служить непосредственным триггером для изменения локальных механических свойств ткани. Это формирует свойство хемозластичности среды.

Уравнение движения клеток среды записывается на основе механики Аристотеля:

$$\mathbf{V}_\xi = \frac{d\mathbf{R}_\xi}{dt} = k \left[\mathbf{F}_\xi + \mathbf{F}_\xi^1 \right] \mathbf{H}(|\mathbf{F}_\xi + \mathbf{F}_\xi^1| - F_0), \quad (4)$$

где \mathbf{H} – функция Хэвисайда; k – коэффициент мобильности; F_0 – параметр, определяющий критическую силу, ниже которой ξ -й узел остается неподвижным. Запись уравнения движения в виде (4) объясняется тем, что движение клеток эпителия, как было отмечено ранее, происходит при значительном сопротивлении среды, что приводит к сильно диссипативному движению, похожему, например, на конвекцию Дарси в пористой среде.

Кроме активных сил (2), которые генерируются хемозластичностью среды, в правую часть уравнения (4) можно добавить и другие силы, которые описывают различные биологические и физические явления. Например, в работах [12, 13] было учтено групповое поведение клеток эпителия с помощью введения в рассмотрение дополнительной силы, учитывающей поляризацию клеточной ткани:

$$\mathbf{F}_i^1 = \sum_{j=1}^{N_0(t)} X_j \mathbf{P}_j, \quad (5)$$

где \mathbf{P}_j – вектор поляризации j -й клетки; X_j – концентрация протеина, ответственного за поляризацию. Усреднение в (5) ведется по соседним клеткам, их число $N_0(t)$ для каждой клетки может меняться со временем. Как правило, клетки эпителия выстраивают свой цитоскелет таким образом, чтобы соответствовать общему паттерну ткани, в которую они включены. Таким образом, сила (5) заставляет каждую клетку ориентировать свой цитоскелет, задаваемый вектором поляризации, в соответствии с общим правилом для клеток ткани. Правила могут меняться от точки к точке, давая возможность создавать сложные структуры из клеток различной поляризации.

В работах [14, 15] авторы исследовали развитие гетерогенной опухоли. Для этого все клетки опухоли были классифицированы на разные фенотипы в зависимости от того, какое положение эти клетки занимали в опухоли. Ключевой величиной для классификации был определен индекс эпителиально-мезенхимального перехода S_j раковой клетки:

$$S_i = 1 - \frac{1}{N_0(t)} \sum_{j=1}^{N_0(t)} Z_j, \quad (6)$$

где Z_j – функция состояния j -й клетки, равной 1, если клетка раковая, и 0, если клетка здоровая. Как видно из определения (6), функция S_j равна 0, если раковая клетка находится внутри опухоли (эпителиальный фенотип) и равна 1, если раковая клетка инвазивно продвигается в пласте здоровых клеток (амебоидный или мезенхимальный фенотип). В зависимости от значения индекса клетка обладает индивидуальным набором хемомеханических свойств. Выражения (5) и (6) дают два примера задания свойств модели на уровне ткани.

Митотическое деление клеток в модели происходит согласно сценария, изображенного на рис. 3 а. Для клеток эпителия в модели предполагается, что вероятность p деления клетки зависит от количества ее узлов:

$$p = p_0(\mathbf{C}) q^{n-6}, \quad (7)$$

где $p_0(\mathbf{C})$ и q – параметры задачи. В общем случае p_0 может зависеть от процессов генной регуляции. В случае $q > 1$ деление клеток с большим числом узлов предпочтительно, хотя наиболее выгодной формой клетки остается многоугольник в виде гексагональной ячейки. Новая клетка заносится в реестр и начинает свою индивидуальную эволюцию в ткани эпителия. При этом она наследует от материнской клетки мгновенные значения химических и механических полей в момент деления.

Движение узлов клеток (4) и появление новых клеток (7) вызывают в среде локальные напряжения, которые связаны с ростом потенциальной энергии [18]. Для снятия этих напряжений клетки ткани должны иметь еще одну степень свободы, связанную с процессом интеркаляции (рис. 3 б). Алгоритм интеркаляции может быть записан следующим образом:

$$p_{\text{int}} = \begin{cases} 1, & l_{ij} < l_0(\mathbf{C}) \\ 0, & l_{ij} \geq l_0(\mathbf{C}) \end{cases} \quad (8)$$

Алгоритм (7) срабатывает, если перемычка между i - и j -клетками становится меньше критического значения l_0 , которое в общем случае зависит от процессов в ядрах клеток.

Численное моделирование динамической системы (1–8) может быть выполнено с помощью подходящей конечно-разностной схемы, в которой временной шаг уравнений реакции-диффузии (1) должен быть синхронизирован с шагом механической подсистемы (4).

Выше описана лишь общая методология построения дискретной математической модели клеточной среды с индивидуальной динамикой. Для каждой конкретной задачи базовая модель должна быть существенно доработана и изменена с учетом условий задачи. Разработанную модель можно классифицировать как дискретную сложную систему, которая включает индивидуальную динамику отдельных элементов, а также групповые эффекты коллективного поведения. Описание включает процессы генной регуляции, протекающие в ядрах клеток (1), процессы хемомеханики отдельных клеток (движение (4), деление (7), интеркаляция (8)), процессы коллективного поведения клеток на уровне ткани (активная сила поляризации среды (5) для здорового эпителия, индекс эпителиально-мезенхимального перехода (6) в случае неоднородной карциномы).

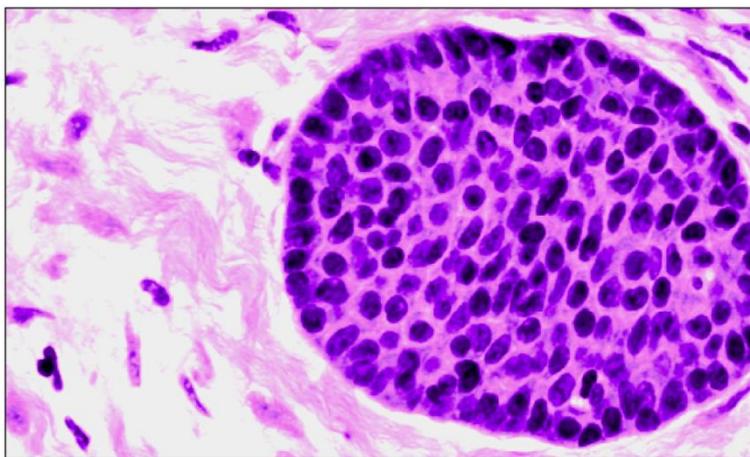


Рис. 4. Микрофотография карциномы молочной железы солидного типа, окраска гематоксилином и эозином. Опухоль характеризуется компактным расположением раковых клеток с четкой границей со здоровой тканью. Микрофотография выполнена на оборудовании ПГМУ имени академика Е.А. Вагнера

4. Пример численного моделирования: карцинома солидного типа

В случае равной подвижности здоровых и раковых клеток реализуется сценарий формирования карциномы солидного типа [14]. Сolidные структуры карциномы представляют собой компактные образования различного размера и формы, состоящие либо из мелких клеток с мономорфными ядрами, либо из крупных клеток с полиморфными ядрами. На рис. 4 представлена микрофотография, которая характерна для гистологических образцов опухоли подобного типа.

За подвижность раковых и здоровых клеток отвечает параметр интеркаляции l_0 , который используется в формуле (8) в качестве критического параметра для наступления интеркаляции. Чем ниже значение этого параметра, тем ниже вероятность интеркаляции и тем менее подвижны клетки в ткани. Сolidная структура формируется, когда подвижность как здоровых, так и раковых клеток понижена. Такая опухоль в медицинской практике считается слабо инвазивной, наступление метастазирования маловероятно (если не предпринимать действий, которые могут вывести опухоль из равновесия). В этом случае прогноз для пациента, как правило, положительный.

Гетерогенность опухоли в расчете достигалась тем, что деление раковых клеток зависело от индекса S_j , задаваемого формулой (6), согласно следующего распределения вероятностей:

$$p_i^{can} = p_1 \frac{S_i^n}{1 + S_i^n} \frac{(1 - S_i)^m}{1 + (1 - S_i)^m}, \quad (9)$$

где p_1 – параметр распределения. Формула (9) сконструирована из двух функций Хилла таким образом, чтобы внутренние ($S \rightarrow 0$) и внешние клетки опухоли ($S \rightarrow 1$) практически не делились. За этим стоят следующие обоснованные соображения: внутренние клетки опухоли эпителиального фенотипа страдают от недостатка питания, а внешние клетки мезенхимального фенотипа вынуждены мигрировать во враждебной среде. И то и другое не способствует делению клеток. Максимальный темп деления согласно распределению (6) имеют клетки промежуточного фенотипа, которые располагаются на границе раковой и здоровой ткани ($S \approx 0,5$). Таким образом, основная масса раковых клеток рождается на границе опухоли. Процессами генной регуляции в данном случае мы пренебрегаем, что предполагает уравнение (1) отключенным.

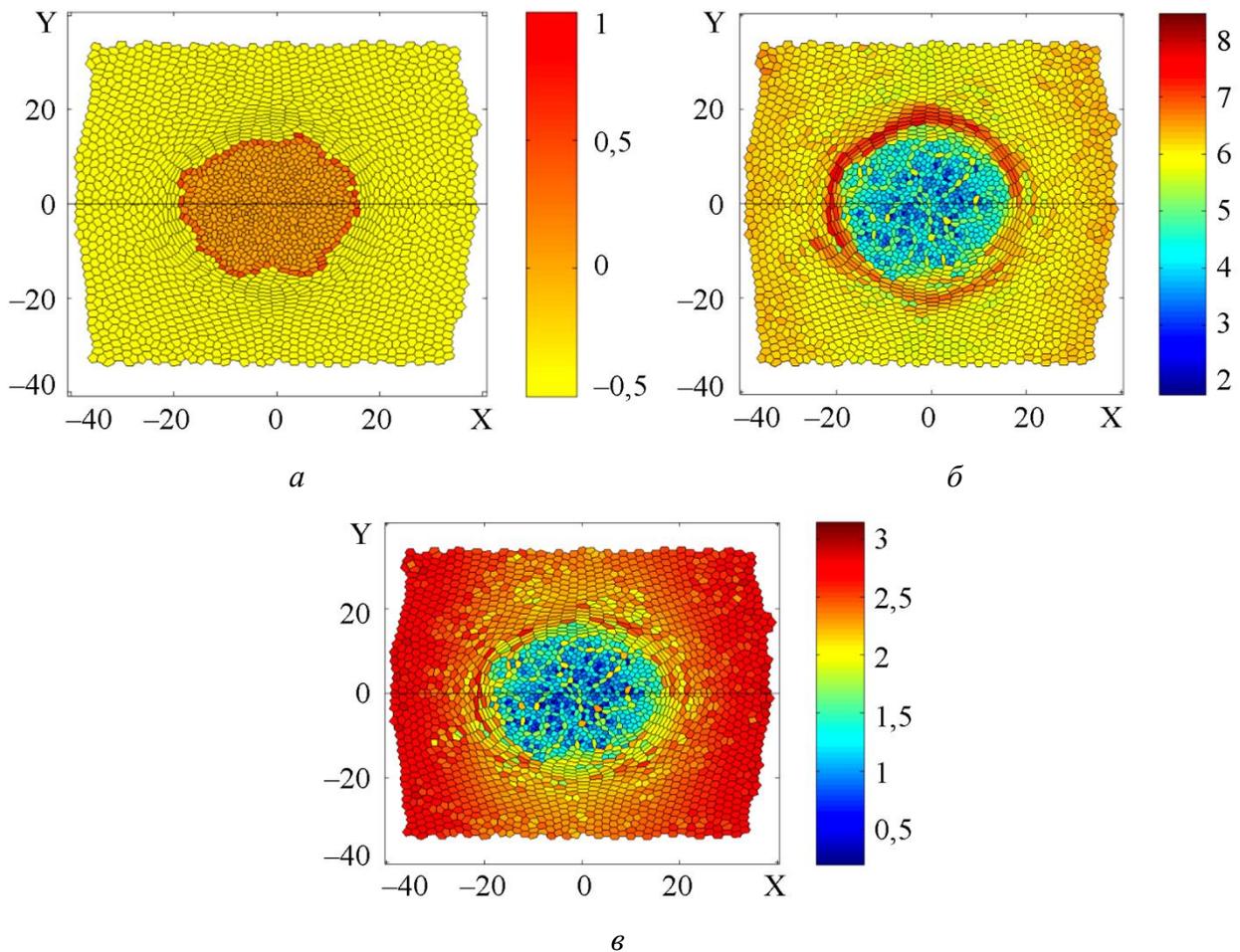


Рис. 5. Результат развития гетерогенной карциномы солидного типа: *a* – поле индекса эпителиально-мезенхимального перехода в раковой опухоли (здоровые клетки эпителия отмечены желтым); *б* – поле периметра клеток; *в* – поле площади клеток. Показаны мгновенные значения полей после интегрирования с начального пласта эпителия, состоящего из правильных гексагонов и одной раковой клетки в центре

На рис. 5 представлены результаты численного расчета системы (2–4, 7–8) со следующими значениями параметров. Для здоровых клеток: $l_0 = 0,2$; $\mu = 1,0$; $\eta = 4,5$; $k = 2,1$; $F_0 = 0,1$; $\alpha = 0,005$; $A_0 = 3\sqrt{3}/2$; $p_0 = 0,0002$; $q = 1,4$. Для раковых клеток: $l_0 = 0,2$; $\mu = 1,0$; $\eta = 1,0$; $k = 2,1$; $F_0 = 0,1$; $\alpha = 0,005$; $A_0 = 3\sqrt{3}/2$; $p_0 = 0,0002$; $q = 1,4$; $n = 8$; $m = 8$

Равновесные значения объемов клеток для обеих популяций взяты одинаковыми, чтобы четче выявить средний эффект изменения размера клеток в ходе эволюционного развития системы. На рис. 5 представлены финальные значения полей индекса эпителиально-мезенхимального перехода в раковой опухоли (a), периметра клеток (b), объема клеток (v). Начальное состояние включало пласт правильных гексагональных клеток, в центре которого была инкорпорирована одна раковая клетка. На верхней и нижней границах ткани поставлены периодические граничные условия. Боковые границы считаются свободными. Начальное состояние включало 1560 клеток, в ходе численного расчета эволюции их число увеличивалось более чем на 40 %.

Изучая результаты имитационного моделирования, представленные на рис. 5, можно заметить, что развитие солидной карциномы приводит к нарастанию существенных напряжений в ткани. Это можно заметить по значительному росту периметров здоровых клеток, примыкающих к опухоли. В среднем периметр этих клеток вырос примерно на 30 % по сравнению с обычным значением периметра здоровых клеток в нормальных условиях. Сравнение здоровых с раковыми клетками еще более существенное: здесь фиксируется превышение практически в два раза (рис. 5 b). Очевидно, что пограничные клетки здорового эпителия испытывают растяжение, находясь под давлением растущей опухоли. Объем раковых клеток в среднем в 2–2,5 раза меньше, чем здоровых клеток (рис. 5 v). При этом равновесное значение объема у обоих видов клеток было задано одинаковым. И первый и второй эффект приводят к сильному росту эластичной потенциальной энергии системы (3), уменьшить которую ткань не может, так как массивы раковых и здоровых клеток находятся в динамическом равновесии друг с другом.

Можно заметить, что проблема была бы еще серьезнее, если бы система частично не находила решение в минимизации избыточного напряжения в опухоли посредством образования нитевидных подструктур, которые состоят из сравнительно крупных клеток. Если типичная величина объема клетки внутри опухоли равна примерно 1, то клетки нитевидных структур имеют объем больше на 50–100 %. Так как размеры клеток в нитях в среднем равны размерам клеток на периферии ткани (рядом со свободной границей), то напряжения вдоль нитей практически отсутствуют.

Сравнение полученной численно солидной структуры (рис. 5 a) с реальным гистологическим образцом демонстрирует хорошее качественное согласие (рис. 4). Для количественного сравнения необходимо получить статистику клеток раковой опухоли, распределяющей их по размерам и форме, а это является непростой задачей. При численном моделировании собрать статистику сообщества раковых клеток гораздо проще. На рис. 6 представлено динамическое изменение числа клеток эпителиального и фронтального фенотипов в опухоли при ее росте из одной переродившейся клетки. Под клетками первого типа мы понимаем клетки со значением индекса S равным 0 (здоровые клетки среди соседей отсутствуют). Фронтальные клетки должны иметь хотя бы одного здорового соседа, но общее число таких соседей не должно превышать половину ($0 < S < 0,6$). Если индекс S больше 0,6, то это означает выдавливание клетки из опухоли, которое в литературе получило название *почкование* (англ. *budding*). Механизмы, которые служат спусковым крючком для почкования, до сих пор исследованы плохо, но биомеханика самой опухоли здесь играет скорее вторичную роль. Очевидно, что клеток мезенхимального фенотипа в солидной опухоли нет, так как здесь наблюдается структурно устойчивая граница между опухолью и здоровой тканью (рис. 5). Как видно из рис. 6, число раковых клеток эпителиального фенотипа нарастает быстрее, что отражает рост внутреннего объема опухоли. При этом надо помнить, что процесс деления в основном происходит вблизи границы. Поэтому большинство клеток при рождении имеют фронтальный фенотип, но затем быстро дифференцируются во внутренний фенотип.

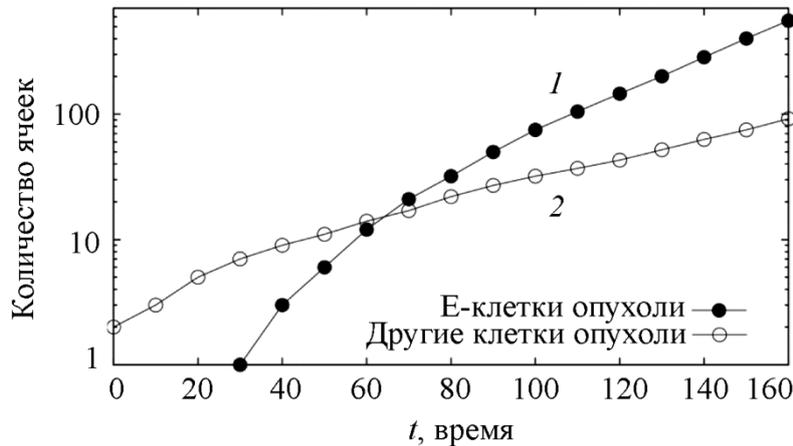


Рис. 6. Динамика изменения количества клеток в опухоли солидного типа:
1 – клетки эпителиального фенотипа ($S = 0$); 2 – клетки фронтального фенотипа ($0 < S < 0,6$).
Вертикальная ось представлена в логарифмическом масштабе

5. Перспективы применения моделей с индивидуальной динамикой

Численная реализация математической модели клеточной ткани с индивидуальной динамикой клеток позволяет получать в ходе расчета полноценную микроскопическую информацию о поведении каждой клетки в пласте эпителия. Это включает в себя нахождение полей сил и давлений, которые локально действуют в ткани. Количество клеток, которые составляют массив ткани или органа в ходе расчета, ограничен только мощностью компьютера. Уже сейчас на больших компьютерах вполне реалистичны расчеты с сотнями тысяч и миллионами клеток. В недалеком будущем это число вполне может сравниться с общим числом клеток в организме человека.

Такое имитационное моделирование может найти свое применение при разработке различных устройств, которые в ходе своей работы соприкасаются с тканью. Например, очень востребована среди специалистов локальная информация о распределении сил вблизи поверхностей скаффолдов. Скаффолд изготавливается из твердых неживых материалов методом 3D печати и используется в качестве строительных лесов для регенерации органа или части ткани, которую требуется заменить у пациента. До сих пор взаимное влияние растущих клеточных тканей и твердых неорганических поверхностей изучено слабо.

В области моделирования опухолей описанный выше подход также может сыграть важную роль, так как позволяет проследить развитие опухоли от ее зарождения до зрелого состояния. Как правило, практикующий врач-онколог, изучая гистологические образцы пациента, при определении вида опухоли полагается только на свою интуицию и опыт. В недавней работе [19] мы показали, что цифровое изображение опухоли на базе, например, микрофотографии гистологического образца, может быть использован для классификации опухолей с помощью специальной обработки изображения и использования несложных алгоритмов компьютерного обучения. Данная методика была опробована на архитектурных формах опухолей, полученных численно.

6. Заключение

В работе представлена дискретная модель двумерной клеточной ткани, которая включает в себя описание индивидуальной динамики клеток и микроскопическую информации о деформациях отдельных клеток и клеточных групп. Ткань рассматривается как сложная система плотно примыкающих друг к другу структурных элементов, которые взаимодействуют друг с другом посредством обмена химических и механических сигналов. Каждая клетка описывается динамически деформируемым многоугольником, узлы которого пере-

мещаются для минимизации эластичной потенциальной энергии всей ткани. Приведены результаты численной реализации модели для нескольких задач.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FSNM-2020-0026).

Литература

1. Multiscale modeling of tumor growth induced by circadian rhythm disruption in epithelial tissue / D. Bratsun, V. Merkuriev, A. Zakharov, and L. Pismen // *J. Biol. Phys.* – 2016. – Vol. 42. – P. 107–132. – DOI: 10.1007/s10867-015-9395-y.
2. Chromatin fiber allostery and the epigenetic code / A. Lesne, N. Foray, G. Cathala, T. Forne, H. Wong, and J.-M. Victor // *J. Phys. Condens. Matter* – 2015. – Vol. 27. – 064114. – DOI: 10.1088/0953-8984/27/6/064114.
3. Колобов А. В., Полежаев А. А. Влияние случайной подвижности злокачественных клеток на устойчивость фронта опухоли // *Компьютерные исследования и моделирование.* – 2009. – Т. 1, № 2. – С. 225–232. – DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-2-225-232.
4. Штейн А. А., Юдина Е. Н. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды // *Российский журнал биомеханики.* – 2011. – Т. 15, № 1. – С. 42–51.
5. Alignment of cellular motility forces with tissue flow as a mechanism for efficient wound healing / M. Basan, J. Elgeti, E. Hannezo, W.-J. Rappel, H. Levine // *Proc. Natl. Acad. Sci.* – 2013. – Vol. 110, No. 7. – P. 2452–2459. – DOI: 10.1073/pnas.1219937110.
6. Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata.* – London, Press: University of Illinois, 1966. – 388 p.
7. Distinguishing between directed and undirected cell motility within an invading cell population / M. J. Simpson, K. A. Landman, B. D. Hughes // *Bull. Math. Biol.* – 2009. – Vol. 71. – P. 781–799. – DOI: 10.1007/s11538-008-9381-7.
8. Hybrid cellular automaton modeling of nutrient modulated cell growth in tissue engineering constructs / C. A. Chung, T. H. Lin, S. D. Chen, Huang H. I. // *J. Theor. Biol.* – 2010. – Vol. 262, Issue 2. – P. 267–278. – DOI: 10.1016/j.jtbi.2009.09.031.
9. Tumor growth modelling by cellular automata / R. Interian, R. Rodriguez-Ramos, F. Valdes-Ravelo, A. Ramirez-Torrez, C. C. Ribeiro, A. Conci // *Mathematics and Mechanics Complex Systems.* – 2017. – Vol. 5, Nos. 3–4. – P. 239–259. – DOI: 10.2140/memocs.2017.5.239.
10. Markov M. A., Markov A.V. Computer simulation of the ontogeny of organisms with different types of symmetry // *Paleontol. J.* – 2014. – Vol. 48, No. 11. – P. 1–9. – DOI: 10.1134/S0031030114110070.
11. Drasdo D., Loeffler M. Individual-based models to growth and folding in one-layered tissues: Intestinal crypts and early development // *Nonlinear Anal.* – 2001. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 245–256. – DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00173-0.
12. Modeling planar polarity of epithelia: the role of signal relay in collective cell polarization / I. Viktorinova, L. Pismen, B. Aigouy, C. Dahmann // *J. R. Soc. Interface.* – 2011. – Vol. 8. – P. 1059–1063. – DOI: 10.1098/rsif.2011.0117.
13. Salm M., Pismen L. M. Chemical and mechanical signaling in epithelial spreading // *Phys. Biol.* – 2012. – Vol. 9, No. 2. – P. 026009–026023. – DOI: 10.1088/1478-3975/9/2/026009.
14. Bratsun D. A., Krasnyakov I. V., Pismen L. M. Biomechanical modeling of invasive breast carcinoma under a dynamic change in cell phenotype: collective migration of large groups of cells // *Biomech. Model. Mechanobiol.* – 2020. – Vol. 19. – P. 723–743. – DOI: 10.1007/s10237-019-01244-z.

15. Krasnyakov I. V., Bratsun D. A., Pismen L. M. Mathematical modeling of carcinoma growth with a dynamic change in the phenotype of cells. *Computer Research and Modeling*. – 2018 – Vol. 10, No. 6. – P. 879–902. – DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-879-902.
16. Krasnyakov I. V., Bratsun D. A., Pismen L. M. Mathematical modelling of epithelial tissue growth // *Russ. J. Biomech.* – 2020. Vol. 24, No. 4. – P. 375–388. – DOI: 10.15593/RJBiomech/2020.4.03.
17. Invasive and drug resistant expression profile of different morphological structures of breast tumors / E. V. Denisov, T. S. Gerashchenko, M. V. Zavyalova, N. V. Litviakov, M. M. Tsyganov, E. V. Kaigorodova, E. M. Slonimskaya, J. Kzhyshkowska, N. V. Cherdyntseva, V. M. Perelmuter // *Neoplasma*. – 2015. – Vol. 62, No. 3. – P. 405–411. – DOI: 10.4149/neo_2015_041
18. Guillot C., Lecuit T. Mechanics of epithelial tissue homeostasis and morphogenesis // *Science*. – 2013. – Vol. 340, iss. 6137. – P. 1185–1189. – DOI: 10.1126/science.1235249.
19. Bratsun D. A., Krasnyakov I. V. Study of architectural forms of invasive carcinoma based on the measurement of pattern complexity // *Math. Model. Nat. Phenom.* – 2022 (принято в печать).

Received: 30.11.2021

Revised: 16.03.2022

Accepted: 15.04.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.021-034

REVIEW OF THE AUTHOR'S OWN RESULTS OBTAINED FROM MECHANICAL TESTING OF TITANIUM ALLOYS

V. V. Nazarov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Corresponding author. E-mail: inmec130@mail.ru

Address for correspondence: 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

Experimental data obtained at different times by the author for various titanium alloys are collected in one place. The mechanical properties of the VT1-0 alloy at normal temperature, the creep and creep rupture of the VT5 and VT6 alloys at 650 °C, the secondary creep of the VT1-0 alloy under complex stress conditions at 550 °C are considered. The final values of strains observed either at the rupture time or at mechanical test termination are taken as a criterion for combining all these data.

Keywords: titanium alloy, hydrogen, tension, torsion.

Acknowledgment

The work was partially financially supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant no. 20-08-00387.

References

1. Kolachev B.A., Elagin V.I., Livanov V.A. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka tsvetnykh metallov i splavov* [Metal science and heat treatment of non-ferrous metals and alloys]. Moscow, MISIS Publ., 2001, 416 p. ISBN: 5-87623-027-8. (In Russian).
2. Nazarov V.V., Lepeshkin A.R. Features of shaping and fracture of a rectangular plate with a circular hole. *Izvestiya VolgGTU*, 2016, No. 2 (181), pp. 75–78. (In Russian).
3. Nazarov V.V. Short-term creep of titanium alloys VT5 and VT6 at high temperature. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2015, vol. 81, No. 6, pp. 57–60. (In Russian).
4. Norton F.H. *Creep of Steel at High Temperatures*, New York, Mc. Graw-Hill Book Company, 1929, 67 p.
5. Bailey R.W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant, *Trans. World Power Conf. 3*, Tokyo Sectional Meeting, 1929, pp. 1089.
6. Shesterikov S.A., Yumasheva M.A. Specification of equation of state in creep theory. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1984, No. 1, pp. 86–91. (In Russian).
7. Liying Z., Yongqing Z., Xiaonan M., Quan H., Yunlian Q. Creep features of Ti-600 alloy at the temperature of 650°C. *Materials Science Forum*, 2018, vol. 941, pp. 995–1003. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.941.995.
8. Nazarov V.V. Approximation of the creep curve up to the moment of necking. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 3, pp. 61–66. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.061-066. Available at: https://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_116.html

9. Zamaraev L.M., Smirnov S.V. High-temperature short-term creep of the Grade 2 and Ti–5Al titanium alloys under heating in air and helium. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, pp. 040069. DOI: 10.1063/1.5017417.
10. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V., Il'in A.A., Mamonov A.M. Analysis of the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy with preliminarily injected hydrogen. *Materials Science*, 2008, vol. 44, No. 5, pp. 700–707. DOI: 10.1007/s11003-009-9128-0.
11. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V., Il'in A.A., Mamonov A.M. Experimental and theoretical study of the effect of hydrogen on the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy. *Russian metal-lurgy (Metally)*, 2008, vol. 2008, No. 2, pp. 142–147. DOI: 10.1134/S0036029508020109.
12. Nazarov V.V. Influence of hydrogen on the creep and rupture of titanium alloys. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2012, vol. 78, No. 12, pp. 59–65. (In Russian).
13. Nazarov V.V. Description of steady creep under tension and torsion of tubular samples. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2015, vol. 81, No. 7, pp. 60–61. (In Russian).
14. Nazarov V.V. Mechanical properties of a VT1-0 titanium alloy creep under tension and torsion of tubular specimens. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2017, vol. 83, No. 2, pp. 66–68. (In Russian).

Подана в журнал: 30.11.2021

УДК 539.376

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.021-034

ОБЗОР ПО СОБСТВЕННЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ

В. В. Назаров

*Научно-исследовательский институт механики
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Мичуринский проспект, 1, Москва, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: inmec130@mail.ru
Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация

Собраны экспериментальные данные, которые получены в разное время автором для различных титановых сплавов. Рассмотрены механические свойства сплава ВТ1–0 при комнатной температуре, ползучесть и длительная прочность сплавов ВТ5 и ВТ6 при 650 °С, установившаяся ползучесть сплава ВТ1–0 в условиях сложного напряженного состояния при 550 °С. Критерием объединения всех этих данных послужили конечные значения деформаций, которые наблюдались либо в момент времени разрушения, либо в момент прекращения проведения механического испытания.

Ключевые слова: титановый сплав, водород, растяжение, кручение.

1. Введение

Титановые сплавы обладают низкой плотностью, высокой удельной прочностью и значительной прочностью при высоких температурах. Применение титановых сплавов в авиационной и ракетной технике наиболее целесообразно в диапазоне температур от 250 до 600 °С, когда легкие алюминиевые сплавы и магниевые сплавы уже не могут работать, а стальные и никелевые сплавы уступают им по удельной прочности.

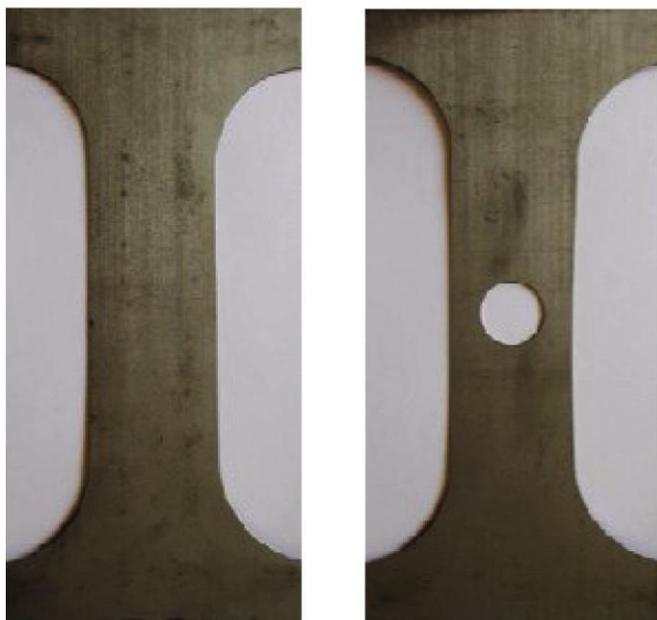
Титан особенно интенсивно взаимодействует с кислородом при температурах выше 700 °С [1]. При нагревании в воздушной среде на поверхности титановых сплавов образуется пленка в виде диоксида титана TiO_2 . Титан адсорбирует большое количество водорода при высоких температурах. Например, титан поглощает 32 000 кубических см на 100 г водорода, а железо и алюминий – лишь 1,31 и 0,026 кубических см при 600 °С и атмосферном давлении. Реакция водорода с титаном химически обратима, при этом водород обратно выводится из титанового сплава при разрушении поверхностной пленки диоксида титана TiO_2 при нагревании титанового сплава в вакууме.

Цель работы – собрать в одном месте экспериментальные данные, которые получены самим автором для различных титановых сплавов. Результаты этих экспериментальных исследований следует рассматривать как отдельные серии, которые не связаны между собой и перечисленные ниже в тексте.

2. Одноосное растяжение при комнатной температуре

Титановые сплавы различаются по содержанию примесей и механическим свойствам [1]. Прочностные свойства титановых сплавов повышаются, а пластические свойства снижаются с увеличением содержания примесей [1]. Кислород и азот приводят

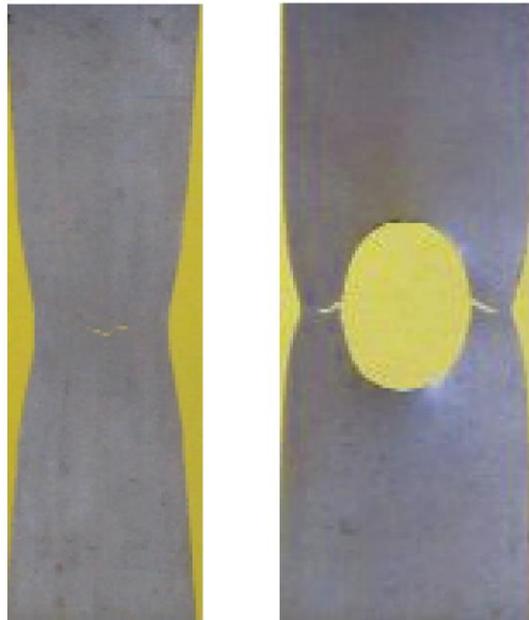
к увеличению предела кратковременной прочности в условиях высокотемпературной ползучести. Титановые сплавы с низким содержанием водорода (менее 0,002 %) сохраняют высокую пластичность до температуры жидкого гелия, и характеризуются конечными или большими предельными деформациями, что означает, что деформация с некоторого момента процесса деформирования оказывается больше 7 % и для описания процесса деформирования следует использовать логарифмическую деформацию (до начального момента влияния шейки на деформацию удлинения).



a

б

Рис. 1. Плоские образцы из титанового сплава VT1–0: сплошные (*a*) и с центральным круглым отверстием (*б*). Размеры: толщина 0,5 мм, рабочая длина 100 мм, ширина 40 мм, диаметр кругового отверстия 20 мм. Удлинение измерялось по положению захватных частей испытательной машины BISS P Ltd. Скорость изменения положения захватных деталей составляла 2 мм/с



a

б

Рис. 2. Изменение формы в момент разрушения для сплошного образца (*a*) и образца с круговым отверстием (*б*). Особенности возникновения магистральных трещин: для сплошного образца (удлинение 33 мм) от центра (*a*) и для образца с концентратором напряжений (удлинение 6,5 мм) от границы отверстия (*б*)

Из сравнения экспериментальных диаграмм, которые получены при одноосном растяжении двух типов прямоугольных пластин, установлено влияние центрального кругового отверстия на предел текучести и предел прочности титанового сплава VT1–0, который проявляет развитые пластические свойства (рис. 1–3) [2]. Центральное круговое отверстие приводит к уменьшению предела прочности σ_s на 10 % и увеличению предела текучести σ_y на 25 %.

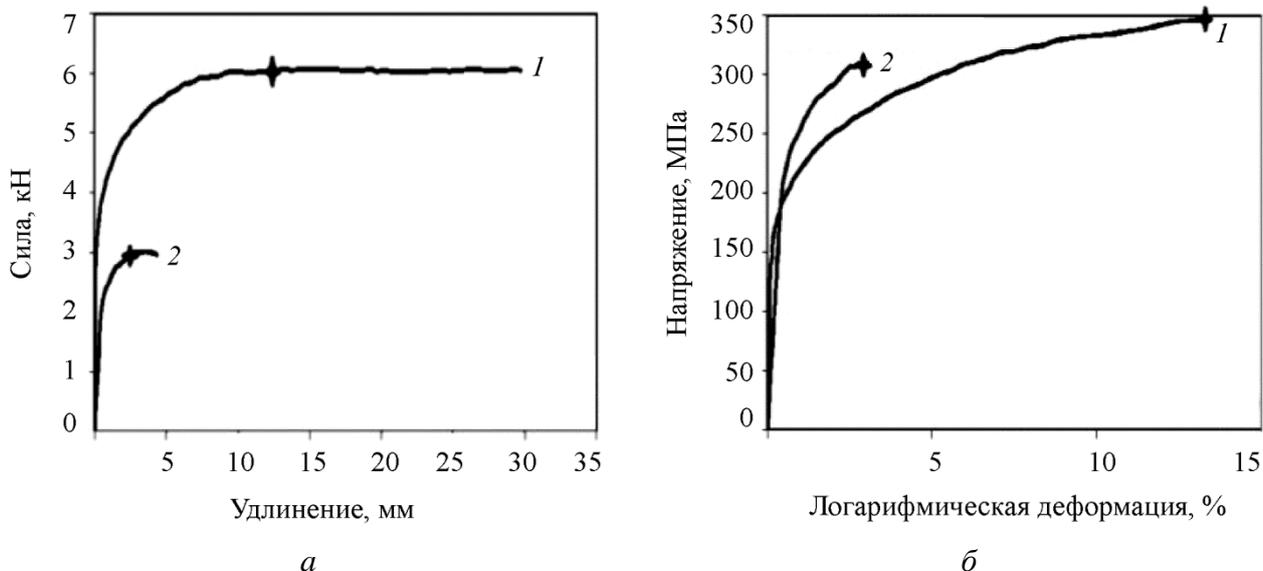


Рис. 3. Зависимость растягивающей силы от удлинения (а) и зависимость истинного напряжения от логарифмической деформации (б). Крестиками обозначен момент начала изменения формы плоских образцов:
1 – сплошные; 2 – с центральным круглым отверстием

Из экспериментальной диаграммы для сплошной прямоугольной пластины следует, что предел текучести $\sigma_y = 180$ МПа и предел прочности $\sigma_s = 384$ МПа, при этом изменение формы начинает развиваться при достижении предела прочности, при котором логарифмическая деформация составляет 13 %. Из экспериментальной диаграммы для плоского образца с центральным круглым отверстием с относительным диаметром 1/2 (диаметр центрального круглого отверстия сопоставим с шириной прямоугольной пластины) установлено, что круговое отверстие приводит к заметному ослаблению прямоугольной пластины, при этом предел прочности $\sigma_s = 311$ МПа достигается при деформации 3 % и наблюдается локальное упрочнение с пределом текучести $\sigma_y = 240$ МПа.

3. Одноосное растяжение при высокой температуре

В статье [3] представлены экспериментальные данные на ползучесть и длительную прочность двух титановых сплавов ВТ5 (структура представлена α -фазой) и ВТ6 (структура представлена $\alpha+\beta$ -фазами), в которых предельные деформации удлинения (в момент времени разрушения) принимали свои конечные (большие) значения. Результаты испытаний [3] получены на цилиндрических образцах в широком диапазоне значений стационарной осевой силы (рис. 4). Среднее предельное удлинение оказалось равным 53 % для титанового сплава ВТ5 (табл. 1). Среднее предельное удлинение для титанового сплава ВТ6 оказалось равным 239 %, что намного больше, чем для титанового сплава ВТ5 при одной и той же высокой температуре 650 °С (табл. 2). Из анализа данных (табл. 1 и 2) следует вывод, что при равных условиях (высокая температура, номинальное напряжение) титановый сплав ВТ5 сопротивляется ползучести лучше, чем титановый сплав ВТ6.

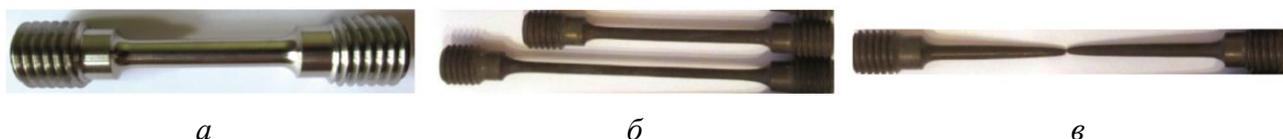


Рис. 4. Цилиндрические образцы диаметром 5 мм и длиной 25 мм: перед испытанием (а) растянуты до двух различных деформированных состояний (б), после разрыва (в)

Таблица 1

Экспериментальные данные для титанового сплава ВТ5 при 650 °С

Номинальное напряжение (МПа)	80	100	120	140	160
Скорость удлинения образца в условиях установившейся ползучести (мм/ч)	0,05	0,29	0,94	2,57	5,88
Время в момент разрушения (ч)	112,2	11,8	9,7	7,4	1,2
Удлинение образца в момент разрушения (мм)	13,6	10,0	16,2	11,1	15,1

Для описания процесса установившейся ползучести и длительной прочности рассматривают две аппроксимации [4, 5] и [6], первая из которых содержит два материальных параметра, вторая [6] – четыре материальных параметра, два из которых принимают физический смысл стартового напряжения ползучести (максимальное напряжение, при котором скорость деформации равна нулю) и предела кратковременной прочности (минимальное напряжение, когда происходит мгновенное разрушение). Визуальный анализ (рис. 5, 6) показывает, что обе зависимости [4, 5] и [6] удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные (табл. 1 и 2).

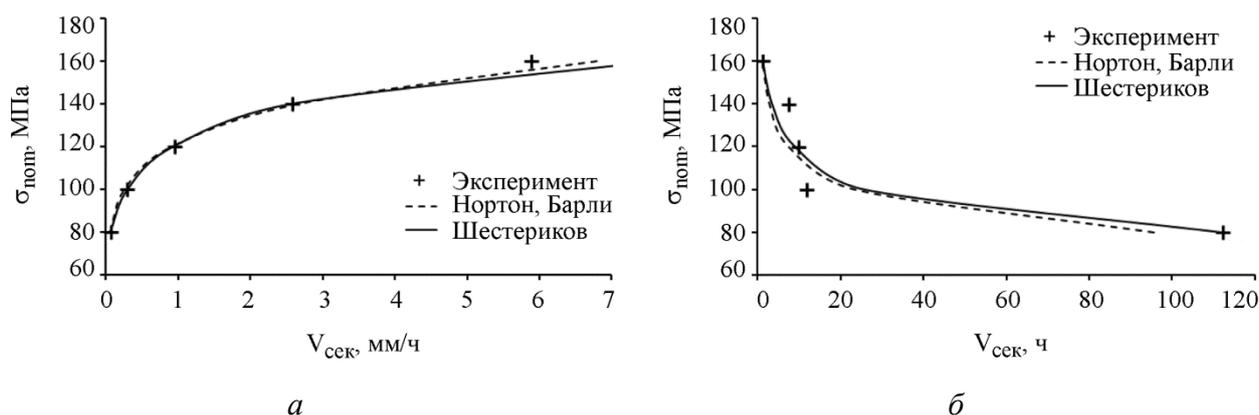


Рис. 5. Зависимости номинального напряжения от скорости удлинения (а) и номинального напряжения от времени в момент разрушения (б) для титанового сплава ВТ5 при 650 °С

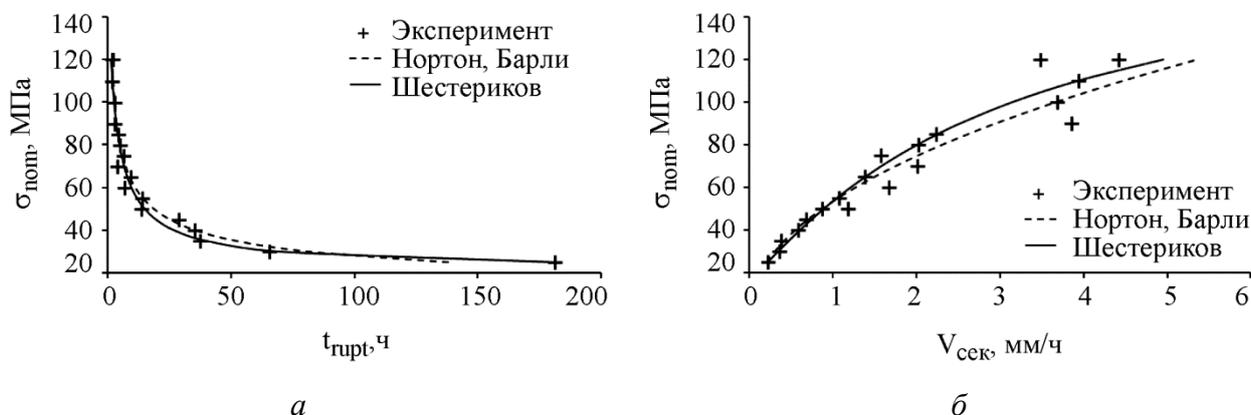


Рис. 6. Зависимости номинального напряжения от скорости удлинения (а) и номинального напряжения от времени в момент разрушения (б) для титанового сплава ВТ6 при 650 °С

Таблица 2

Экспериментальные данные для титанового сплава ВТ6 при 650 °С

	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110	120	120
Номинальное напряжение (МПа)	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110	120	120
Скорость удлинения образца в условиях установившейся ползучести (мм/ч)	0,22	0,34	0,37	0,57	0,66	1,16	1,07	1,67	1,37	2,00	1,57	2,01	2,22	3,85	3,67	3,93	3,47	4,41
Время в момент разрушения (ч)	181,4	65,4	37,2	35,0	28,6	13,5	14,0	6,7	9,0	3,7	6,4	4,8	4,0	2,5	2,5	1,7	2,1	1,4
Удлинение образца в момент разрушения (мм)	51,0	44,2	40,3	47,8	48,2	44,4	44,6	24,9	43,3	16,2	25,0	23,2	25,0	19,6	19,6	14,9	23,3	15,5

В статье [7] приведены кривые ползучести для титанового сплава Ti-600 (структура представлена α -фазой) при 650 °С. Для этой марки титанового сплава увеличение номинального напряжения от 300 до 350 МПа приводит к увеличению предельной деформации от 24 до 38 %. Поскольку отрезок кривой ползучести (зависимость деформации от времени) после времени появления шейки не имеет смысла, для описания процесса ползучести предложен критерий [8] появления шейки, который позволяет определить максимальное значение деформации удлинения до момента времени начала изменения формы, что желательно учитывать при описании процесса ползучести материалов с развитыми вязкими свойствами.

Титановые сплавы, инертные при низких температурах, проявляют высокую химическую активность при нагревании в ряде газовых сред, к которым относятся водород, азот и воздух [1]. Температура нагрева и состав газовой среды оказывают существенное влияние на механические свойства титановых сплавов. При нагреве водород и титан образуют гидрид титана TiH_2 в твердом растворе (в титановом сплаве в твердом состоянии). При температурах выше 320 °С гидрид титана TiH_2 полностью растворяется в титане и переходит в твердый раствор с содержанием водорода до 1,5 %. При охлаждении до 200 °С растворимость водорода в α -фазе титана резко падает. Снижение растворимости особенно велико в температурном диапазоне 100–150 °С. В титановых сплавах при охлаждении ниже этих температур выделяется гидрид TiH_2 . Во время закалки гидрид TiH_2 может выделяться либо в виде высокодисперсных частиц, либо в виде пластин при медленном охлаждении. Диффузия азота в титан при температурах ниже 550 °С протекает медленно, но резко активизируется при 700 °С. Нитрид титана в виде поверхностной пленки образуется при 800–1000 °С. При температурах ниже 300 °С кислород образует химические соединения с титаном вида Ti_3O_5 . При 400–800 °С образуется в основном диоксид титана TiO_2 , а при температуре выше 800 °С обнаруживаются оксиды TiO и Ti_2O_3 . Все эти химические соединения, полученные при нагревании титана в воздушной, азотной и водородной средах и оставшиеся в нем после охлаждения, приводят к заметному снижению предела текучести и предела прочности.

Из анализа скоростей удлинения при установившейся ползучести [9] двух титановых сплавов VT1-0 и VT5 при 400–1050 °С в азоте, воздухе, водороде и гелии следует, что азот и гелий приводят к заметному увеличению скорости удлинения, в то время как водород (при температурах выше 500 °С), наоборот, приводит к снижению скорости удлинения. Тот факт, что водород способен замедлять процесс ползучести в условиях стационарной осевой силы при высокой температуре, наблюдается в экспериментальных данных, полученных для двух титановых сплавов VT6 [10–11] и VT5 [12] при 600 °С. Из анализа экспериментальных данных следует, что концентрация водорода заметно влияет на скорость удлинения при установившейся ползучести и время в момент разрыва (табл. 3). При этом концентрация водорода не оказывает заметного влияния на предельное удлинение (в момент разрушения).

Концентрация водорода 0,1 % по массе для титанового α -сплава VT5 при 600 °С является пограничной, при которой кристаллизация вторичной фазы может произойти, а может и не произойти. Тем не менее, фотоснимки показали нежелательное (так как первоначальная цель заключалась в исследовании влияния водорода на механические характеристики ползучести α -титанового сплава) присутствие β -фазы в образцах с концентрацией водорода 0,1 % по массе [12]. Для структурного анализа брали пробы из области рабочей части на расстоянии 10 мм от места излома (рис. 7).

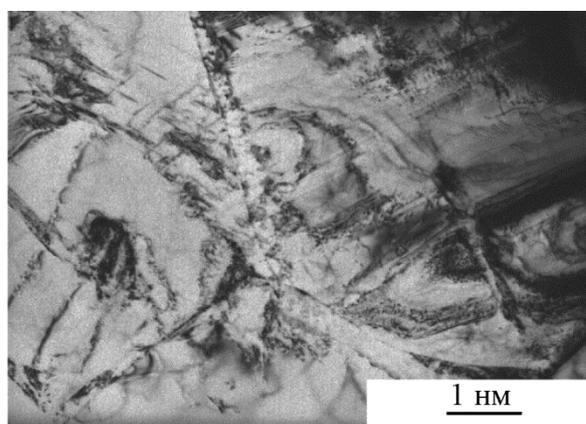
Таблица 3

Экспериментальные данные для титанового сплава ВТ5 при 600 °С
(получены на цилиндрических образцах (рис. 4)
диаметром 5 мм и рабочей длиной 25 мм)

Концентрация водорода, % массы	Номинальное Напряжение, МПа	Скорость удлинения образца в условиях установившейся ползучести, %/ч	Время в момент разрушения, ч	Логарифмическая деформация в момент разрушения образца, %
0,0	150	5,2	4,4	48
0,1		3,6	9,5	53
0,0	225	11,9	1,4	28
0,1		3,8	4,9	30



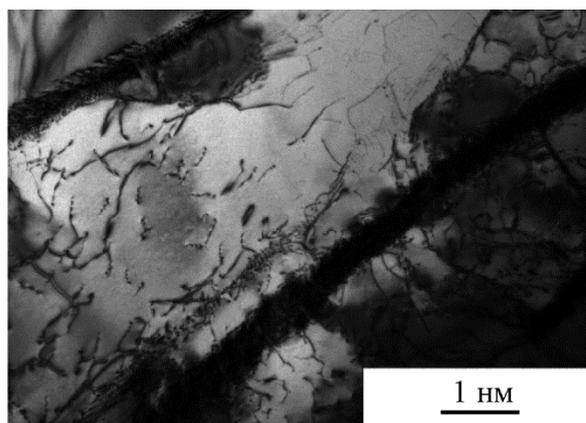
a



б



в



г

Рис. 7. Структуры титанового сплава ВТ5 с концентрацией внедренного водорода 0,1 % по массе: границы α -зерен, где α -зерна имеют яркое поле (*a*), неравномерное содержание β -фазы в слоях α -зерен, где β -фаза имеет темное поле (*б, в*), β -фаза в виде полос, а также кривых линий в виде выхода дислокаций указывает на один из двух возможных механизмов (*г*) осуществления деформации ползучести: способом перемещения дислокаций (механизм 1) и способом проскальзывания границ зерен (механизм 2)

Таким образом, результаты экспериментального исследования показывают, что концентрация водорода 0,1 % по массе приводит к заметному упрочнению α -титанового сплава BT5 в условиях воздействия стационарной растягивающей силы (для усталости возможен противоположный эффект, при котором нестационарная растягивающая сила приведет к ускоренному разрушению образца из наводороженного титанового сплава) (табл. 3). Влияние водорода на механические характеристики и свойства титановых сплавов при меньших концентрациях уже давно исследовано и используется в технологических процессах осадки и штамповки крупногабаритных элементов конструкций, когда предварительное внедрение водорода до малых значений концентрации приводит к увеличению предела текучести, а после завершения технологического процесса водород обратно извлекают из титанового сплава (обратимое легирование водородом титановых сплавов).

4. Кручение и растяжение при высокой температуре

Испытания на одноосное напряжение проводятся с целью определения механических характеристик материала при заданной температуре. Необходимость в испытаниях на сложное напряженное состояние возникает при необходимости либо учитывать анизотропию прочности, либо создать реалистичное напряженное состояние в образце в лаборатории, которое реализуется в элементе конструкции. Под воздействием крутящего момента и осевой растягивающей силы в тонкостенном цилиндрическом образце реализуется сложное напряженное состояние с нормальным напряжением σ и касательным напряжением τ . Под воздействием этих двух напряжений в трубчатом образце реализуются деформация удлинения ε и деформация сдвига γ .

Для описания процесса установившейся ползучести трубчатого образца [13] под действием крутящего момента и осевой силы используют главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и скорости главных деформаций $\dot{\varepsilon}_1 \geq \dot{\varepsilon}_2 \geq \dot{\varepsilon}_3$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2},$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\varepsilon}}{4} + \sqrt{\left[\frac{3\dot{\varepsilon}}{4}\right]^2 + \left[\frac{\dot{\gamma}}{2}\right]^2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\varepsilon}}{4} - \sqrt{\left[\frac{3\dot{\varepsilon}}{4}\right]^2 + \left[\frac{\dot{\gamma}}{2}\right]^2}, \quad \text{где } \dot{\varepsilon} \neq \dot{\varepsilon}(t) \text{ и } \dot{\gamma} \neq \dot{\gamma}(t)$$

где t – время ползучести, а также $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\gamma}$ – скорости деформации удлинения и деформации сдвига.

Экспериментальные кривые ползучести или зависимости угла поворота от времени (рис. 8) получены для титанового сплава BT1–0 при 550 °C [14] на трубчатых образцах (рис. 9) и приведены при различных значениях отношения σ/τ (табл. 4) для максимального нормального напряжения $\sigma_{\max} = 100$ МПа (эксперименты 1–3) и удвоенного максимального касательного напряжения $2\tau_{\max} = 100$ МПа (эксперименты 4–8), при этом для экспериментов 1–3 (табл. 4) касательное напряжение вычисляли по формуле, где σ/τ – заданная величина (в данной работе принимает значения 1, 2, 3):

$$\tau = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[\sqrt{4 + \left[\frac{\sigma}{\tau}\right]^2} - \frac{\sigma}{\tau} \right], \quad \text{где } \sigma_{\max} = 100 \text{ МПа}$$

для экспериментов 4–8 (табл. 4) касательное напряжение вычисляли по формуле, где σ/τ – заданная величина (в данной работе принимает значения 1, 2, 3):

$$\tau = \frac{2\tau_{\max}}{\sqrt{4 + \left[\frac{\sigma}{\tau}\right]^2}}, \quad \text{где } 2\tau_{\max} = 100 \text{ МПа.}$$

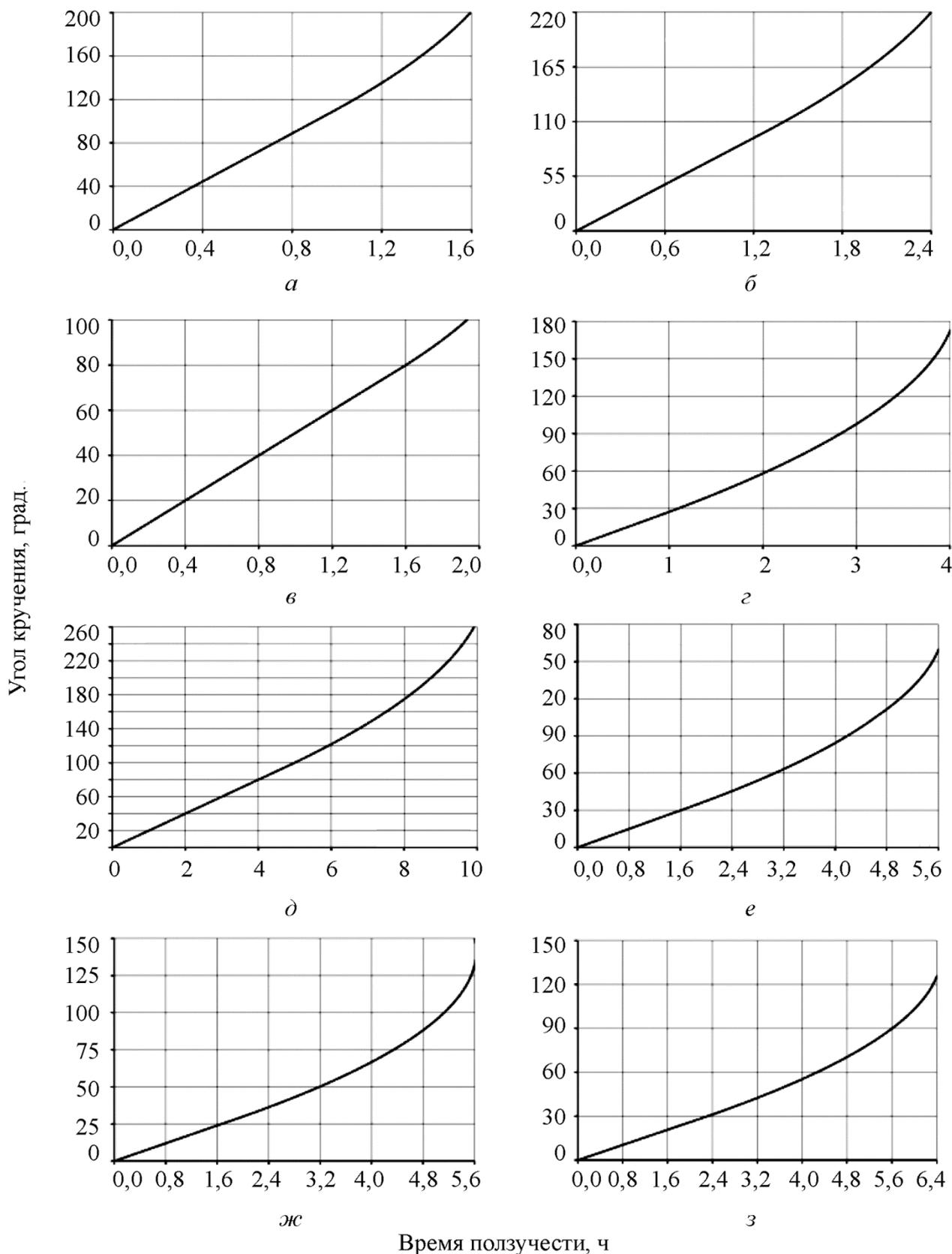


Рис. 8. Зависимости угла поворота от времени ползучести для титанового сплава ВТ1–0 при 550 °С в различных экспериментах: 1 (*a*), 2 (*б*), 3 (*в*), 4 (*г*), 5 (*д*), 6 (*е*), 7 (*ж*), 8 (*з*)



Рис. 9. Трубчатые образцы (внутренний диаметр 14 мм, наружный диаметр 16,1 мм и рабочая длина 130 мм) из титанового сплава VT1–0 после испытаний на ползучесть при 550 °С

Таблица 4

Механические характеристики установившейся ползучести для титанового сплава VT1–0 при 550 °С

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8
Отношение нормального напряжения к касательному напряжению	1,0	2,0	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Нормальное напряжение (МПа)	61,8	82,8	90,8	44,7	60,0	70,7	78,1	83,2
Касательное напряжение (МПа)	61,8	41,4	30,2	44,7	40,0	35,4	31,2	27,7
Скорость удлинения образца в условиях установившейся ползучести (мм/ч)	6,1	9,9	11,0	1,5	1,5	2,1	3,3	3,6
Скорость изменения угла поворота в условиях установившейся ползучести (град/ч)	111	78	50	27	20	19	15	13
Осевая сила (Н)	3066	4110	4508	2219	2977	3509	3875	4129
Крутящий момент (Нм)	21,6	14,6	10,6	15,7	14,0	12,4	10,9	9,7

Визуальный осмотр испытанных образцов (рис. 9) показывает, что образцы в процессе испытаний на ползучесть претерпели изменение формы.

5. Заключение

Экспериментальные данные, полученные для титановых сплавов VT1–0, VT5 и VT6, показали, что эти сплавы проявляют склонность к предельным деформациям значительно больше 7 %. Так, для сплава VT1–0 при 20 °С логарифмическая деформация удлинения в момент разрушения составляет 33 %, для сплава VT5 при 650 °С средняя деформация ползучести – 13 %, для сплава VT6 при 650 °С средняя деформация ползучести – 29 %. Вместе с тем показано, что внедрение водорода в α-титановый сплав VT5 при 650 °С и концентрации 0,1 % мас приводит к уменьшению скорости установившейся ползучести от 1,4 до 3,1 раза и увеличению времени в момент разрушения от 2,1 до 3,5 раза, при этом заметного влияния

водорода на предельную деформацию удлинения в момент разрушения не обнаружено. Экспериментальные данные на одновременное кручение и растяжение трубчатых образцов в условиях ползучести показали, что для титанового сплава ВТ1–0 при 550 °С наблюдаются значительные углы поворота от 150 до 260 град при рабочей длине трубчатого образца в недеформированном состоянии 130 мм, при этом увеличение отношения нормального напряжения к касательному приводит к увеличению скорости удлинения и уменьшению скорости угла поворота. Так, при одном и том же значении максимального нормального напряжения, равного 100 МПа, увеличение отношения нормального напряжения к касательному от 1 до 3 приводит к увеличению скорости удлинения в 1,8 раза и уменьшению скорости угла поворота в 2,2 раза. А также при одном и том же значении удвоенного максимального касательного напряжения, равного 100 МПа, увеличение отношения нормального напряжения к касательному от 1 до 3 приводит к увеличению скорости удлинения в 2,4 раза и уменьшению скорости угла поворота в 2,1 раза.

Благодарность

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 20–08–00387).

Литература

1. Колачев Б. А., Елагин В. И., Ливанов В. А. Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов. – Москва : Изд-во «МИСИС», 2001. – 416 с. – ISBN: 5-87623-027-8.
2. Назаров В. В., Лепешкин А. Р. Особенности формоизменения и разрушения прямоугольной пластины с круговым отверстием // Известия ВолгГТУ. – 2016. – № 2 (181). – С. 75–78.
3. Назаров В. В. Кратковременная ползучесть титановых сплавов ВТ5 и ВТ6 при высокой температуре // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2015. – Т. 81, № 6. – С. 57–60.
4. Norton F. H. Creep of Steel at high temperatures. – New York : Mc. Graw-Hill Book Company, 1929. – 67 p.
5. Bailey R. W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant, Tokyo, 1929 : Trans. World Power Conf. 3, Tokyo Sectional Meeting. – 1929. – P. 1089.
6. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния ползучести // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 86–92.
7. Creep features of Ti–600 alloy at the temperature of 650°C / Z. Liying, Z. Yongqing, M. Xiaonan, H. Quan, Q. Yunlian // Materials Science Forum. – 2018. – Vol. 941. – P. 995–1003. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.941.995.
8. Nazarov V. V. Approximation of the creep curve up to the moment of necking. // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 3. – P. 61–66. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.061-066. – URL: https://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_116.html
9. Zamaraev L. M., Smirnov S. V. High-temperature short-term creep of the Grade 2 and Ti–5Al titanium alloys under heating in air and helium // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1915. – P. 040069. – DOI: 10.1063/1.5017417.
10. Analysis of the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy with preliminarily injected hydrogen / A. M. Lokoshchenko, V. V. Nazarov, A. A. Il'in, A. M. Mamonov // Materials Science. – 2008. – Vol. 44, No. 5. – P. 700–707. – DOI: 10.1007/s11003-009-9128-0.

11. Experimental and theoretical study of the effect of hydrogen on the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy / A. M. Lokoshchenko, V. V. Nazarov, A. A. Il'in, A. M. Mamonov // Russian metallurgy (Metally). – 2008. – Vol. 2008, No. 2. – P. 142–147. – DOI: 10.1134/S0036029508020109.
12. Назаров В. В. Влияние водорода на ползучесть и разрушение титановых сплавов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – Т. 78. – № 12. – С. 59–65.
13. Назаров В. В. Описание установившейся ползучести при растяжении и кручении трубчатых образцов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2015. – Т. 81. – № 7. – С. 60–61.
14. Назаров В. В. Механические характеристики ползучести титанового сплава ВТ1–0 при растяжении и кручении трубчатых образцов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2017. – Т. 83. – № 2. – С. 66–68.

Received: 04.02.2022

Revised: 08.03.2022

Accepted: 15.04.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.035-044

FEATURES OF THE STRESS STATE OF POROUS BRITTLE MATERIALS UNDER TENSILE CONDITIONS

V. A. Zimina^{a), *} and I. Yu. Smolin^{b)}

*Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS,
2/4 Akademicheskiiy Ave., Tomsk, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-6780-5717>  miva@ispms.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-3167-9530>  smolin@ispms.ru

*Corresponding author. E-mail: miva@ispms.ru

Address for correspondence: Akademicheskiiy Ave., 2/4, Tomsk, 634055, Russian Federation
Tel.: +7 (3822) 286 838

The paper discusses the problem of taking into account the influence of the heterogeneous structure of a material on its effective characteristics and mechanical behavior. To evaluate the effective properties and features of the stress and strain analysis of porous materials, it is proposed to use a combined method that includes experimental data (an SEM image of a porous material surface) and numerical methods of solids mechanics. Numerical simulation of the mechanical behavior of porous ceramics is performed on the basis of experimental data on its pore structure. As a result of the performed research, it is shown that this method makes it possible to determine the features of the stress and strain state of porous ceramics. The stress analysis reveals both tensile and compressive local stresses in porous ceramics mesovolumes under uniaxial tension. At the same time, the values of these local stresses exceed the mesovolume-average values by an order of magnitude.

Keywords: effective properties, microstructure, ceramics, modeling, stress and strain state, stress-strain curve.

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment to the Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, theme No. FWRW-2022-0003.

References

1. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*, Berlin, Teubner, 1928, 962 p.
2. Reuss A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929, vol. 9 (1), pp. 49–58. DOI: 10.1002/zamm.19290090104.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 1962, vol. 33, pp. 3125. DOI: 10.1063/1.1728579.
4. Maxwell J.C. *A Treatise on Electricity and Magnetis*, Oxford, Clarendon Press., 1873, 577 p.
5. Sevostianov I., Giraud A. Generalization of Maxwell homogenization scheme for elastic material containing inhomogeneities of diverse shape. *International Journal of Engineering Science*, 2013, vol. 64, pp. 23–36. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.12.004.
6. Chen F., Sevostianov I., Giraud A., Grgic D. Combined effect of pores concavity and aspect ratio on the elastic properties of a porous material. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 134, pp. 161–172. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.10.016.

7. Trofimov A., Abaimov S. G., Akhatov I. S., Sevostianov I. On the bounds of applicability of two-step homogenization technique for porous materials. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 123, pp. 117–126. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.017.
8. Roberts A., Garboczi E. Elastic properties of model porous ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 2000, vol. 83, No. 12, pp. 3041–3048. DOI:10.1111/J.1151-2916.2000.TB01680.X.
9. Cannillo V., Leonelli C., Manfredini T., Montorsi M., Boccaccini A. R. Computational simulations for the assessment of the mechanical properties of glass with controlled porosity. *Journal of Porous Materials*, 2003, vol. 10, pp. 189–200. DOI: 10.1023/A:1027490502044.
10. Sadowski T., Samborski S. Prediction of the mechanical behaviour of porous ceramics using mesomechanical modeling. *Computational Materials Science*, 2003, vol. 28, iss 3–4, pp. 512–517. DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.08.008.
11. Pabst W., Gregorová E., Tichá G. Effective properties of suspensions, composites and porous materials. *Journal of the European Ceramic Society*, 2007, vol. 27, pp. 479–482. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2006.04.169.
12. Pabst W., Gregorová E. Young's modulus of isotropic porous materials with spheroidal pores. *Journal of the European Ceramic Society*, 2014, vol. 34 (13), pp. 3195–3207. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2014.04.009.
13. Knudsen F.P. Effect of Porosity on Young's Modulus of Alumina. *Journal of the European Ceramic Society*, 1962, vol. 45, iss. 2, pp. 94–95. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1962.tb11089.x.
14. Dean E.A., Lopez J.A. Empirical Dependence of Elastic Moduli on Porosity for Ceramic Materials. *Journal of the European Ceramic Society*, 1983, vol. 66, iss. 5, pp. 366–370. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1983.tb10051.x.
15. Munro R.G. Effective Medium Theory of the Porosity Dependence of Bulk Moduli. *Journal of the European Ceramic Society*, 2001, vol. 84, iss. 5, pp. 1190–1192. DOI: 10.1111/j.1151-2916.2001.tb00815.x.
16. Rodrigues J.A., Ortega F.S., Paiva A.E. M., Villaboim E.L. G., Pandolfelli V.C. The relation between porosity and elastic moduli of gelcast ceramic foams. *Ceramica*, 2004, vol. 50, pp. 209–216. DOI: 10.1590/S0366-69132004000300007.
17. Kulkov A.S., Smolin I.Yu., Mikushina V.A. Investigation of mechanical response of Al₂O₃ ceramic specimens to loading with consideration for their structural features. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2051, pp. 020162. DOI: 10.1063/1.5083405.
18. Morrell R. Handbook of properties of technical & engineering ceramics. Part 2. Data reviews, Section I. High-alumina ceramic, London, HMSO, 1987, 255 p.
19. Zimina V.A. *Determination of the mechanical characteristics of brittle porous materials based on numerical simulation*. Ph.D. thesis, Tomsk, 2021. (In Russian).
Mikushina V.A., Smolin I.Yu. Numerical analysis of the stress state and fracture of porous ceramics at the mesolevel. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1214, pp. 012016. DOI: 10.1088/1742-6596/1214/1/012016.

Подана в журнал: 04.02.2022

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.035-044

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТЫХ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ РАСТЯЖЕНИЯ

В. А. Зимина^{а), *}, И. Ю. Смолин^{б)}

*Институт физики прочности и материаловедения (ИФПМ) СО РАН,
г. Томск, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0001-6780-5717>  miva@ispms.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-3167-9530>  smolin@ispms.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: miva@ispms.ru

Адрес для переписки: пр. Академический, 2/4, г. Томск, 634055, Российская Федерация

Тел.: +7(3822)28–68–38

Работа посвящена проблеме учета влияния неоднородной структуры материала на его эффективные характеристики и механическое поведение. Для оценки эффективных свойств и особенностей напряженно-деформированного состояния пористых материалов было предложено использовать комбинированный метод, включающий экспериментальные данные (РЭМ-изображение поверхностей образцов пористых материалов) и численные методы механики деформируемого твердого тела. Выполнено численное моделирование механического поведения пористой керамики на основе экспериментальных данных о ее поровой структуре. В результате проведенного исследования сделан вывод, что этот метод позволяет определить особенности напряженно-деформированного состояния исследуемого материала. Анализ напряжений в пористой керамике подтвердил, что при одноосном растяжении ее мезообъемов в них присутствуют как растягивающие, так и сжимающие локальные напряжения. При этом значения этих напряжений на порядок превышают средние значения по мезообъему.

Ключевые слова: эффективные свойства, микроструктура, керамика, моделирование, напряженно-деформированное состояние, диаграмма нагружения.

1. Введение

Влияние поровой структуры на прочностные и упругие характеристики пористых материалов есть и остается предметом многочисленных теоретических, а также экспериментальных исследований. За последние десятилетия выполнен ряд работ, направленных на установление связи между внутренней структурой и эффективными механическими свойствами различных структурно-неоднородных материалов: композитов, пористых материалов, горных пород и т. д. Точный прогноз механического поведения этих материалов требует наиболее полной информации об их микроструктуре – геометрических характеристиках порового пространства и твердой фазы. Знания только объемной доли пор оказываются недостаточным. Таким образом, теоретические и экспериментальные исследования для пористых материалов состоят из двух направлений: в первом рассматривают только влияние объемной доли пор на упругие и прочностные характеристики, во втором – влияние геометрических характеристик пор (размера, формы, ориентации и т. д.).

Основой для вычисления эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов являются методы гомогенизации. Эти методы берут свое начало в механике композиционных материалов, поскольку при расчете изделий из композитов необходимо знать их эффективные свойства. Этой проблеме посвящена многочисленная литература [1–16]. Среди существующих аналитических методов для определения эффективных свойств двухфазных

неоднородных материалов (композитов) следует первыми отметить два классических метода гомогенизации – метод Фойгта и метод Рейса [1, 2]. Согласно этим методам эффективные модули упругости вычисляются по правилу механического смешивания. Метод Фойгта дает верхнюю границу оценки эффективных свойств и предполагает однородность поля макродеформаций, а метод Рейса – нижнюю границу и предполагает однородность поля макронапряжений. Также следует отметить, подход Хашина–Штрикмана, связанный с применением вариационных методов [3]. Этот метод также позволяет определять границы эффективных модулей упругости, при этом так называемая вилка Хашина–Штрикмана для эффективных модулей упругости является более узкой, чем вилка Фойгта–Рейса.

В последние годы широко используется модель (схема гомогенизации) Максвелла. В ее основе лежат предположения о приравнивании дальних полей от выбранного объема структурно-неоднородного материала содержащего взаимодействующие или не взаимодействующие неоднородности, и того же объема эффективной среды с неизвестными свойствами [4]. Авторы работ [5–7] успешно развивают методы гомогенизации для выявления влияния размеров, формы пор и учета их взаимодействия на зависимости эффективных упругих модулей от пористости. Лежащие в основе методов гомогенизации краевые задачи для неоднородного материала со сложной структурой оказываются достаточно сложными для аналитического решения, поэтому применяются как численные решения, так и многоуровневые подходы гомогенизации. Так например, в работе [5] авторы модифицировали метод Максвелла для определения эффективных упругих свойств материалов с включениями, имеющими форму суперсферы. Показано, что форма пор сильно влияет на упругие свойства, особенно, если она вогнутая. В работе [7] рассмотрена применимость методов многоуровневой гомогенизации для материала, содержащего сферические поры двух различных размеров, а также представлено сравнение результатов конечно-элементного моделирования с прогнозами разных микромеханических моделей гомогенизации.

Численные подходы при оценке влияния структуры пористых материалов на их эффективные механические свойства используются в работах [8–10]. А. Р. Roberts и Е. J. Garboczi одни из первых использовали численный подход на основе метода конечных элементов для изучения влияния пористости и формы пор на упругие свойства пористой керамики [8]. Они вывели аналитические формулы (степенные законы) для случаев сферических и эллипсоидальных пор, а также для перекрывающихся сферических частиц матрицы.

В работах [11, 12] предложена экспоненциальная форма зависимости от пористости для коэффициента теплопроводности и модуля Юнга. В работах F. P. Knudsen [13], E. A. Dean и J. A. Lopez [14] и R. G. Munro [15] на примере алюмооксидной керамики показано, что экспериментальные данные для разных упругих модулей могут быть аппроксимированы несколькими моделями (экспоненциальными, полиномиальными и даже линейными), особенно если учитывать, что значение пористости составляет менее 50 %.

Развитые аналитические и численно-аналитические методы гомогенизации дают приемлемые прогнозы эффективных свойств для простых или упрощенных задач, но их применимость и точность явно ограничены. В этих подходах из-за математических ограничений обычно вводятся некоторые упрощенные гипотезы о пористой структуре. Например предполагается, что все поры изолированы и периодически расположены в пространстве, имеют сферическую или эллипсоидальную форму и одинаковый размер и т. п. Как только пористая структура материала становится более сложной (с порами разной морфологии, размеров и находящихся на разных расстояниях друг от друга), аналитический или численно-аналитический прогноз поведения системы превращается в сложную задачу. Поэтому важно наиболее полно учитывать микроструктуру пористых материалов при оценке их эффективных механических свойств. Например, применять комбинированные подходы, включающие как экспериментальные (РЭМ-изображения поверхностей образцов пористых материалов), так и численные методы.

Цель работы – анализ напряженно-деформированного состояния пористой керамики при одноосном растяжении с учетом особенностей ее микроструктуры и при использовании комбинированных методов исследования.

2. Постановка задачи и методы решения

В качестве объекта исследования выбрана алюмооксидная керамика, обладающая различной пористостью 17, 26 и 33 %. Используя снимки структуры этой керамики, полученные с помощью растрового электронного микроскопа, были построены двухмерные компьютерные геометрические модели структуры мезообъемов, учитывающие основные особенности строения и реологии ее микроструктуры [17]. В дальнейшем эти мезообъемы использовались для численного изучения механического поведения пористой керамики при растяжении. Пример геометрической модели структуры мезообъема представлен на рис. 1. Размер исследуемых сечений мезообъемов составлял порядка 80×80 мкм². Для каждого значения пористости было построено и проанализировано несколько компьютерных моделей мезообъемов на основе различных фотографий. Для каркаса (на рис. 1 отмечен белым цветом) были приняты физико-механические характеристики, соответствующие беспористому оксиду алюминия (плотность $\rho = 3,98$ г/см³, модуль объемного сжатия $K = 251$ ГПа, модуль сдвига $G = 163$ ГПа), взятые из литературных источников [18]. В данной геометрической модели поры учитывались явно.

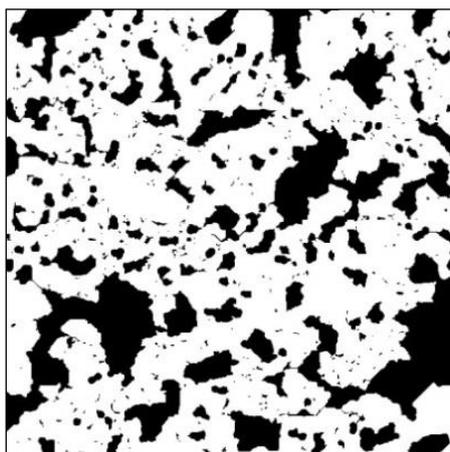


Рис. 1. Геометрическая модель структуры керамики с пористостью 33 %

Механическое поведение исследуемых мезообъемов пористой керамики описывалось системой уравнений механики деформируемого твердого тела с использованием модели изотропной упруго-хрупкой повреждаемой среды [19, 20]. Известно, что керамики, как и другие хрупкие материалы, по-разному сопротивляются сжатию и растяжению. С точки зрения теории напряжений, это означает различие в поведении материала при изменении вида напряженного состояния, который для изотропной среды можно описать первым и третьим инвариантами тензора напряжений (или давлением и параметром Лоде–Надаи). Для описания в модели этой особенности механического поведения кинетика накопления повреждений определялась через эквивалентные напряжения для модели Друкера–Прагера и параметр Лоде–Надаи. В этой модели накопленная поврежденность оказывает влияние на деградацию упругих модулей. Исследуемые мезообъемы были дискретизированы разностной сеткой. При моделировании деформирования пористых керамик учитывалась возможность локального разрушения в ячейке разностной сетки. В качестве локального критерия разрушения принималось условие, когда локальное значение поврежденности в ячейке разностной сетки становится равным единице. После этого расчет напряжений производился с учетом условий деформирования разрушенной ячейки разностной сетки. Если в ячейке разностной сетки

объемная деформация больше нуля (растяжение), то значения напряжений в ней считались равными нулю и материал в данной ячейке переставал сопротивляться растяжению. Когда объемная деформация в разрушенной ячейке разностной сетки меньше нуля (сжатие), то приращения напряжений в этой ячейке рассчитывались по гипотетическому закону с использованием текущего значения модуля упругости.

Численное решение дифференциальных уравнений выполнено с использованием конечно-разностного метода. Моделирование проводилось в двумерной постановке в условиях плоской деформации. Рассматривался случай одноосного растяжения вдоль горизонтальной оси (Ox).

3. Результаты и их обсуждение

Для анализа результатов использовали усредненные диаграммы нагружения.

На рис. 2 представлены примеры усредненных по мезообъему кривых нагружения для исследуемых мезообъемов. Анализируя полученные диаграммы нагружения, были определены эффективные значения модуля Юнга и предела прочности исследуемой пористой керамики. Все диаграммы имеют падающую ветвь, характерную для стадии разрушения хрупких материалов.

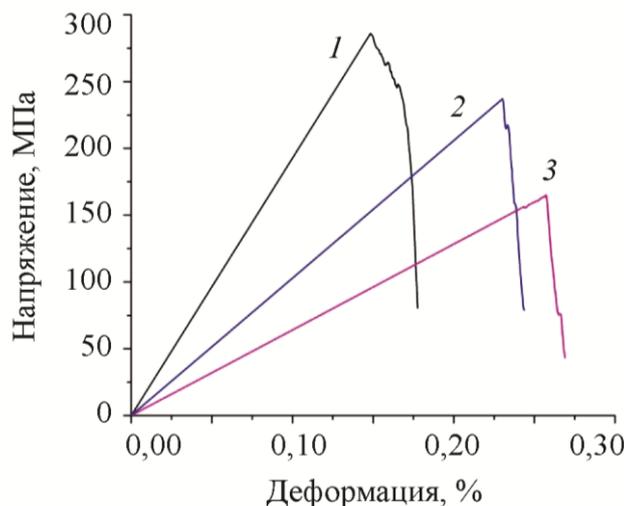


Рис. 2. Диаграммы нагружения мезообъемов керамики с различной объемной долей пор в условиях растяжения: 1 – 17 %; 2 – 26 %; 3 – 33 %

Можно отметить нелинейное возрастание модуля Юнга и предела прочности материала с уменьшением его пористости в (рис. 3). Здесь представлены данные экспериментов и расчетов для образцов корундовой керамики, а также их аппроксимации степенными и экспоненциальными зависимостями. Экспериментальные данные получены в результате испытаний образцов алюмооксидной керамики на трехточечный изгиб [17]. Значения модуля Юнга и предела прочности представлены нелинейными зависимостями от значения пористости.

На рис. 4 представлено сравнение полученных данных при численном моделировании с другими теоретическими моделями, рассмотренными в работах [5, 16], а также приведены экспериментальные значения модуля Юнга для пористой керамики. Авторы работы [16] привели ряд известных теоретических зависимостей модуля Юнга от объемной доли пор, параметры которых были определены для алюмооксидных керамик. Выполненные численные расчеты позволяют более точно определить эффективное значение модуля Юнга с погрешностью до 8 %, в то время как теоретические модели менее точно описывают экспериментальные данные и их погрешность составляет от 28 % и выше.

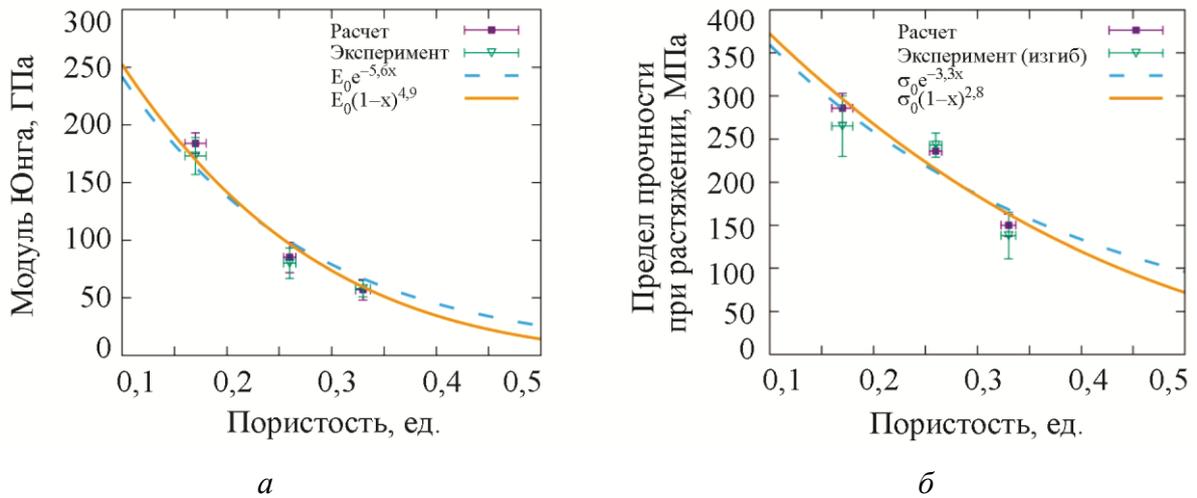


Рис. 3. Зависимости модуля Юнга (а) и предела прочности при растяжении (б) от объемной доли пор

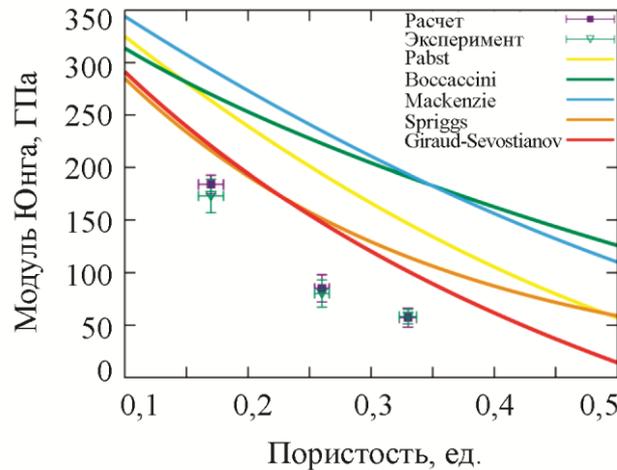


Рис. 4. Зависимости модуля Юнга от объемной доли пор: теоретические модели, экспериментальные и расчетные данные

Известно, что на зарождение и распространение трещин в материалах влияет неоднородность напряженного состояния, характерная для пористых материалов как для всех структурно-неоднородных сред. Для оценки неоднородного напряженного состояния в мезообъеме пористых керамик было проанализировано поле компоненты тензора напряжений вдоль оси нагружения (u_{xx}), среднее значение которой представлено на диаграммах нагружения (рис. 2).

На рис. 5 представлен разброс локальных значений напряжений u_{xx} (рис. 5 з) и их относительных значений (рис. 5 а–в) в зависимости от относительной деформации мезообъема вдоль оси нагружения. Максимальные (кривая 1) и минимальные (кривая 2) значения локальных напряжений были определены на каждом этапе деформирования, для расчета относительных значений напряжений они были отнесены к средним значениям напряжений на соответствующем этапе деформирования. Хорошо выделяются участки упругого деформирования, распространения трещин и разрушения (рис. 5 а–в).

На упругом участке (до появления первой трещины в мезообъеме пористой керамики) напряжения на усредненной диаграмме нагружения растут (рис. 2), при этом значения максимальных локальных напряжений увеличиваются, а минимальных – уменьшаются (рис. 5 з),

но их отношения к средним значениям напряжений остаются неизменными. Соответственно на рис. 5 *а*, *б* и *в* на упругой стадии деформирования наблюдаются горизонтальные участки этих зависимостей. Заметим, что минимальные значения локальных напряжений являются отрицательными, это свидетельствует о том, что при растяжении мезообъема локально присутствуют области сжатия. На упругом участке рост растягивающих напряжений (положительных) проявляется сильнее, чем спад сжимающих напряжений (отрицательных) (рис. 5 *з*).

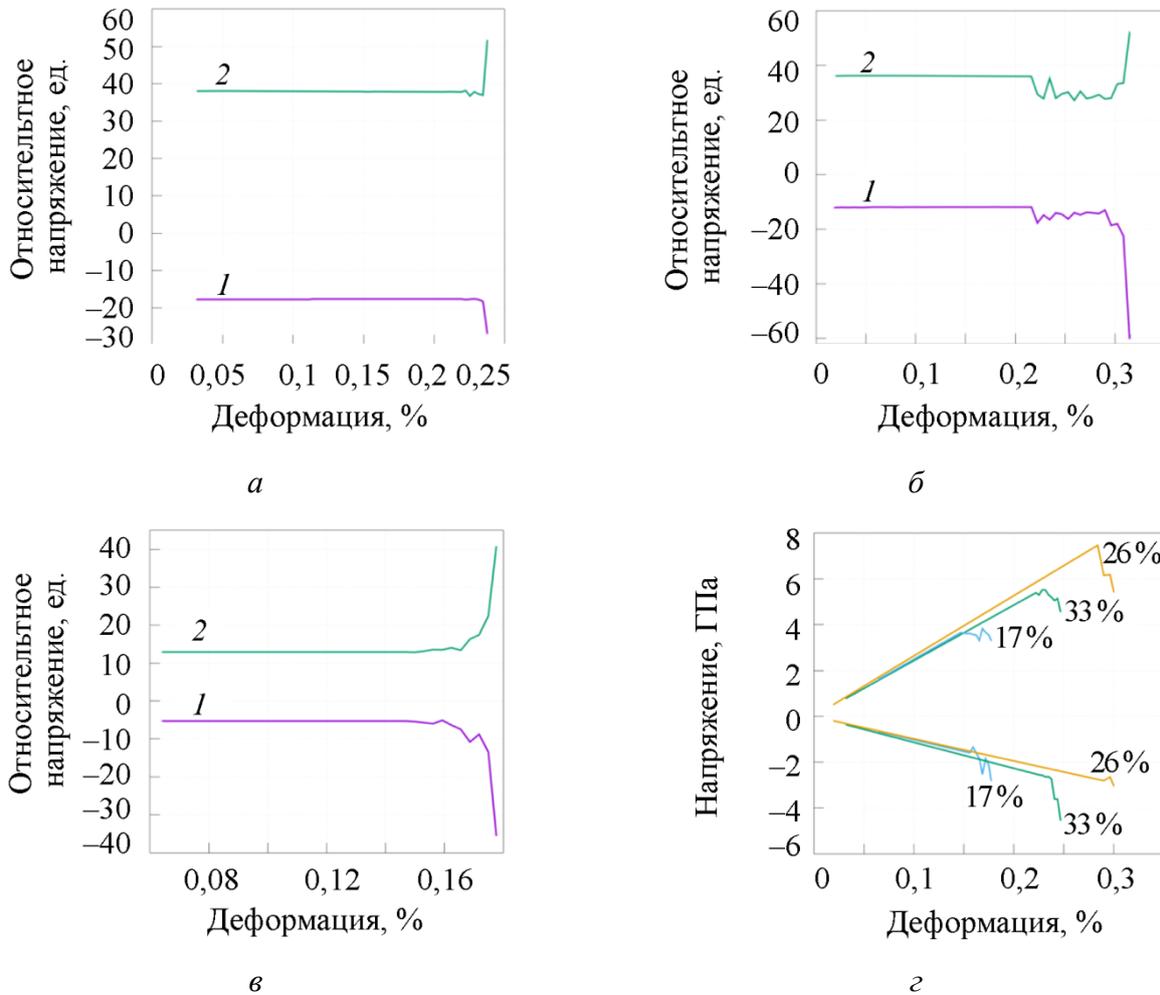


Рис. 5. Разброс относительных значений напряжений σ_{xx} в мезообъемах с пористостью: 33 % (*а*); 26 % (*б*); 17 % (*в*); разброс локальных значений напряжений σ_{xx} (*з*) в зависимости от относительной деформации мезообъемов с различной объемной долей пор. Максимальные (*1*) и минимальные (*2*) значения локальных напряжений

При зарождении первой трещины в мезообъеме на графиках, представленных на рис. 5, появляются осцилляции, причем в это время на усредненной диаграмме нагружения еще продолжается упругий участок линейного роста напряжений (рис. 2).

В мезообъемах с различным значением пористости зарождение трещин происходит при разных значениях относительных деформаций, отличается также разброс напряжений в конце упругой стадии (перед зарождением трещины). Так, для мезообъема с пористостью 17 % он составляет 5 ГПа, для пористости 26 % – 9 ГПа, для пористости 33 % – 8 ГПа. Явной зависимости величины разброса напряжений от значений пористости мезообъемов не отмечается.

На этапе распространения трещин разброс напряжений меняется: в относительных значениях он увеличивается (кривые расходятся на рис. 5 а, б, в), а для локальных значений компоненты тензора напряжений u_{xx} характерно уменьшение как максимальных, так и минимальных значений напряжений (рис. 5 г). На заключительном этапе деформирования наблюдается стремительное расхождение зависимостей для относительных максимальных и минимальных напряжений (рис. 5 а, б, в), это обусловлено тем, что средние значения напряжений на диаграмме нагружения падают (рис. 2). Для локальных значений напряжений также наблюдается спад максимальных и минимальных значений напряжений, но он не настолько ярко выражен по сравнению с относительными значениями напряжений.

4. Заключение

Проведенные исследования показали, что применение комбинированного метода позволяет наиболее полно учесть и описать влияние поровой структуры керамики на упругие и прочностные характеристики, а также особенности ее механического поведения.

Исследование особенностей распределения напряжений в процессе деформирования и разрушения мезообъемов алюмооксидной керамики с пористостью от 17 до 33 % показало, что в керамическом каркасе наблюдаются как растягивающие, так и сжимающие напряжения. Величина разброса значений напряжений явно не зависит от объемной доли пор мезообъемов, а, вероятно, определяется их структурой (конфигурацией и морфологией пор) и перед началом формирования трещин в десятки раз превышает макроскопический предел прочности керамики при растяжении.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания Института физики прочности и материаловедения СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

Литература

1. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. – Berlin : Teubner, 1928. – 962 p.
2. Reuss A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1929. – Vol. 9 (1). – P. 49–58. – DOI: 10.1002/zamm.19290090104.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // Journal of Applied Physics. – 1962. – Vol. 33. – P. 3125. – DOI: 10.1063/1.1728579.
4. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. – Oxford : Clarendon Press, 1873. – 577 p.
5. Sevostianov I., Giraud A. Generalization of Maxwell homogenization scheme for elastic material containing inhomogeneities of diverse shape // International Journal of Engineering Science. – 2013. – Vol. 64. – P. 23–36. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.12.004.
6. Combined effect of pores concavity and aspect ratio on the elastic properties of a porous material / F. Chen, I. Sevostianov, A. Giraud, D. Grgic // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 134. – P. 161–172. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.10.016.
7. On the bounds of applicability of two-step homogenization technique for porous materials / A. Trofimov, S. G. Abaimov, I. S. Akhatov, I. Sevostianov // International Journal of Engineering Science. – 2018. – Vol. 123. – P. 117–126. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.017.
8. Roberts A., Garboczi E. Elastic properties of model porous ceramics // Journal of the American Ceramic Society. – 2000. – Vol. 83, No. 12. – P. 3041–3048. – DOI: 10.1111/J.1151-2916.2000.TB01680.X.

9. Computational simulations for the assessment of the mechanical properties of glass with controlled porosity / V. Cannillo, C. Leonelli, T. Manfredini, M. Montorsi, A. R. Boccaccini // *Journal of Porous Materials*. – 2003. – Vol. 10. – P. 189–200. – DOI: 10.1023/A:1027490502044.
10. Sadowski T., Samborski S. Prediction of the mechanical behaviour of porous ceramics using mesomechanical modeling // *Computational Materials Science*. – 2003. – Vol. 28, iss 3–4. – P. 512–517. – DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.08.008.
11. Pabst W., Gregorová E., Tichá G. Effective properties of suspensions, composites and porous materials // *Journal of the European Ceramic Society*. – 2007. – Vol. 27. – P. 479–482. – DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2006.04.169.
12. Pabst W., Gregorová E. Young's modulus of isotropic porous materials with spheroidal pores // *Journal of the European Ceramic Society*. – 2014. – Vol. 34 (13). – P. 3195–3207. – DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2014.04.009.
13. Knudsen F. P. Effect of Porosity on Young's Modulus of Alumina // *Journal of the European Ceramic Society*. – 1962. – Vol. 45, iss. 2. – P. 94–95. – DOI: 10.1111/j.1151-2916.1962.tb11089.x.
14. Dean E. A., Lopez J. A. Empirical Dependence of Elastic Moduli on Porosity for Ceramic Materials // *Journal of the European Ceramic Society*. – 1983. – Vol. 66, iss. 5. – P. 366–370. – DOI: 10.1111/j.1151-2916.1983.tb10051.x.
15. Munro R. G. Effective Medium Theory of the Porosity Dependence of Bulk Moduli // *Journal of the European Ceramic Society*. – 2001. – Vol. 84, iss. 5. – P. 1190–1192. – DOI: 10.1111/j.1151-2916.2001.tb00815.x.
16. The relation between porosity and elastic moduli of gelcast ceramic foams / J. A. Rodrigues, F. S. Ortega, A. E. M. Paiva, E. L. G. Villaboim, V. C. Pandolfelli // *Cerâmica*. – 2004. – Vol. 50. – P. 209–216. – DOI: 10.1590/S0366-69132004000300007.
17. Kulkov A. S., Smolin I. Yu., Mikushina V. A. Investigation of mechanical response of Al₂O₃ ceramic specimens to loading with consideration for their structural features // *AIP Conference Proceedings*. – 2018. – Vol. 2051. – P. 020162. – DOI: 10.1063/1.5083405.
18. Morrell R. Handbook of properties of technical & engineering ceramics : part 2: Data reviews. – Section I : High-alumina ceramic. – London : HMSO, 1987. – 255 p.
19. Зимина В. А. Определение механических характеристик хрупких пористых материалов на основе численного моделирования: дис. ... канд. физ. - мат. наук: 1.1.8. – Томск, 2021. – 141 с.
20. Mikushina V. A., Smolin I. Yu. Numerical analysis of the stress state and fracture of porous ceramics at the mesolevel // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1214. – P. 012016. – DOI: 10.1088/1742-6596/1214/1/012016.

Received: 22.02.2022

Revised: 21.03.2022

Accepted: 15.04.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.045-054

DETERMINATION OF OPTIMAL DESIGN PARAMETERS OF A HEAT EXCHANGING SECTION BY NUMERICAL MODELING

E. S. Baymetova

*Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya St., Izhevsk, 426069, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-4534-0936>  Baymetova.e.s@gmail.com

Corresponding author: E-mail: Baymetova.e.s@gmail.com

Address for correspondence: 7 Studencheskaya St., Izhevsk, 426069, Russian Federation

Tel.: +7(3412)77 60 55 (23 02)

With the development of industry, the need to improve the efficiency of oil coolers is particularly increasing, due primarily to the rising cost of equipment, as well as increased attention to the issues of resource and energy saving. Oil coolers should not only perform the required functions of oil cooling, but also be as reliable and environmentally friendly as possible. Meanwhile, the majority of serial oil coolers are designed on the basis of outdated technical solutions, and this predetermines the levels of efficiency and reliability of their work as not corresponding to modern requirements. In this connection, the issues of hydrodynamics and heat exchange in finned tubes of oil coolers and refinement of methods of their calculation are relevant both for modernization of existing devices and for design of new oil coolers.

Keywords: mathematical modeling; coupled heat exchange problem; optimization problem; oil coolers; cooling system.

References

1. Tsygankov M.P., Kruchinin D.S. Characteristic features of mathematic modeling high-temperature heat exchangers. *Izvestiya Vuzov. Khimya i Khimicheskaya Tekhnologiya*, 2013, vol. 56, pp. 95–99. (In Russian).
2. Taraday A.M., Kovalenko L.M., Gurin E.P. Evaluating the thermal power efficiency of heat-exchangers used in municipal heat-and-power engineering. *Novosti Teplosnabzheniya*, No. 6, pp. 40–43. (In Russian).
3. Jinov A.A., Shevelev D.V., Anan'ev P.A. Simulation of air pressure losses in the finned tube bundle of an air condenser. *Science & Education*, 2013, No. 03. DOI: 10.7463/0313.0544307. (In Russian).
4. Dmitriev A.V., Dmitrieva O.S. Heat exchange in counterflow around rows of air cooler tubes. *Vestnik Technologicheskogo Universiteta*, 2007, vol. 20, No. 13, pp. 40–43. (In Russian).
5. Kutateladze S.S. *Osnovy teorii teploobmena* [Fundamentals of Heat-exchange Theory]. 5th ed., Moscow, Atomizdat Publ., 1979, 416 p. (In Russian).
6. Idel'chik I.E. *Aerogidrodinamika tekhnologicheskikh apparatov* (podvod, otvod i raspredelenie potoka po secheniyu apparatov) [Fluid Dynamic Theory of Processing Vessel]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1983, 351 p. (In Russian).
7. Sugiyama H., Akiyama M., Shibata K. Heat and Mass Transfer Analysis of Developing Turbulent Flow in a Square Duct. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 1991, vol. 57 (535), pp. 1044–1050. DOI: 10.1299/kikaib.57.1044.

8. Huser A., Biringen S. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, vol. 257, pp. 65–95. DOI: 10.1017/S002211209300299X.
9. Myong H.K. Numerical investigation of fully developed turbulent fluid flow and heat transfer in a square duct. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1991, vol. 12, pp. 344–352. DOI: 10.1016/0142-727X(91)90023-O.
10. Şenay G., Kaya M., Gedik E., Kayfeci M. Numerical investigation on turbulent convective heat transfer of nanofluid flow in a square cross-sectioned duct. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 2019, vol. 29 (4), pp. 1432–1447. DOI: 10.1108/HFF-06-2018-0260.
11. Liu J., Hussain S., Wang W., Xie G., Sundřın Bengt. Heat transfer enhancement and turbulent flow in a rectangular channel using perforated ribs with inclined holes. *Journal of Heat Transfer*, 2019, vol. 141 (4), article No. 041702. DOI: 10.1115/1.4042841.
12. Kumar R., Kumar A., Goel V. Performance improvement and development of correlation for friction factor and heat transfer using computational fluid dynamics for ribbed triangular duct solar air heater *Renewable Energy*, 2019, vol. 131, pp. 788–799. DOI: 10.1016/j.renene.2018.07.078.
13. Sharma N., Tariq A., Mishra M. Experimental Investigation of Heat Transfer Enhancement in Rectangular Duct with Pentagonal Ribs. *Heat Transfer Engineering*, 2019, vol. 40 (1–2), pp. 147–165. DOI: 10.1080/01457632.2017.1421135.
14. Schindler A., Younis B.A., Weigand B. Large-Eddy Simulations of turbulent flow through a heated square duct. *International Journal of Thermal Sciences*, 2019, vol. 135, pp. 302–318. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.09.018.
15. D'yachenko A.Yu., Terekhov V.I., Yarygina N.I. Turbulent flow past a transverse cavity with inclined side walls. 2. Heat transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, No. 4, pp. 486–491. DOI: 10.1007/s10808-007-0061-4.
16. Dreitser G.A., Lobanov I.E. Limiting Intensification of Heat Exchange in Tubes Due to Artificial Turbulization of the Flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2003, vol. 76, pp. 54–60. DOI: 10.1023/A:1022959006920.
17. Baymetova E.S., Chernova A.A., Koroleva M.R., Kelemen M. Optimization of the developed outer surface of an industrial oil cooler. *MM Science Journal*, 2021, vol. 2021, pp. 4764–4768. DOI: 10.17973/MMSJ.2021_10_2021027.
18. Baymetova E.S., Gizzatullina A.F., Pushkarev F.N. Conjugate Heat Transfer Problem in the Ribbed Tube with OpenFOAM. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2021, vol. 23, No. 2, pp. 154–164. DOI: 10.15350/17270529.2021.2. (In Russian).
19. Koroleva M.R., Saburova E.A., Chernova A.A. Studying the efficiency of cooling and resistance of ribbed tubular elements. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1675, 012009. DOI: 10.1088/1742-6596/1675/1/012009.
20. Korolyova M.R., Terentyev A.N., Chernova A.A. Fluid dynamics of a complicated collector. *Vestnik Rybinskoy gosudarstvennoy aviatsionnoy tekhnologicheskoy akademii im. P.A. Solovieva*, 2021, No. 3 (58), pp. 50–55. (In Russian).
21. Zhukauskas A.A. *Konvektivnyi perenos v teploobmennikakh* [Convective transfer in heat exchangers]. M., Nauka Publ., 1982, 472 p. (In Russian).
22. Salakhov R.R. *Raschet teploobmennyykh apparatov c naruzhnym orebreniem* [Calculation of externally finned heat-exchange apparatus: scientific research report]. Kazan, 2017, 68 p.
23. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. In: K. Hanjalić, ed. *Proc. 4th. Int. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Begell House, 2003, 8 p.

Подана в журнал: 22.02.2022

УДК 536.24

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.045-054

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООБМЕННОЙ СЕКЦИИ ПУТЕМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Е. С. Байметова

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашиникова»
д. 7, ул. Студенческая, г. Ижевск, 426069, Российская Федерация.*

 <https://orcid.org/0000-0002-4534-0936>  Baimetova.e.s@gmail.com

Ответственный автор. Электронная почта: Baimetova.e.s@gmail.com

Адрес для переписки: ул. Студенческая, 7, г. Ижевск, 426069, Российская Федерация
Тел.: +7(3412)77-60-55 (доб. 23-02)

С развитием промышленности, необходимость повышения эффективности работы маслоохладителей особенно возрастает. Это связано в первую очередь с увеличением стоимости оборудования, а также повышенным вниманием к вопросам ресурсо- и энергосбережения. Маслоохладители должны не только выполнять требуемые функции по охлаждению масла, но и быть максимально надежными и экологически безопасными. Между тем большинство серийных маслоохладителей разработаны на основе устаревших технических решений, что определяет уровни эффективности и надежности их работы, не соответствующие современным требованиям. В связи с этим вопросы исследования гидродинамики и теплообмена в оребренных трубках маслоохладителей, а также уточнение методик их расчета являются актуальными как для модернизации существующих аппаратов, так и при проектировании новых маслоохладителей.

Ключевые слова: математическое моделирование; сопряженная задача теплообмена; задача оптимизации; маслоохладители; система охлаждения.

1. Введение

В промышленности в качестве жидких рабочих сред широко используются различные виды технических масел, предназначенных для снижения сопротивления движущихся частей механизмов, а также повышения их долговечности и поддержания температурного режима. В процессе эксплуатации масло нагревается, в связи с этим для отвода тепла необходима установка маслоохладителя, геометрия которого напрямую влияет на тепловую эффективность устройства [1]. Проблема выбора формы оребрения маслоохладителей, как и задача оптимизации их конструктивных параметров, в настоящее время остаются актуальными в виду широкого использования в промышленности гидравлических установок и электродвигателей, функционирование которых без достаточного охлаждения невозможно из-за перегрева элементов, и как следствие, последующей их деформации и разрушения [2–4].

Основным конструктивным элементом маслоохладителей остается алюминиевая либо медная трубка прямоугольного сечения, оребренная по внешним поверхностям. Оребрение необходимо для того, чтобы увеличить эффективную площадь теплоотдачи, через которую тепло будет отводиться в окружающую среду. Одной из наиболее эффективных технологий оребрения является строгание или деформационное резание. Теплообменные трубы, изготовленные данным методом, имеют значительные габариты, а следовательно, и более высокую массу изделия, а частота оребрения, как и основные геометрические характеристики

единичного ребра, существенным образом влияют и на теплоэффективность устройства и на его металлоемкость. При этом вопросы исследования теплоэффективности маслоохладителей [5–16], как и вопросы тепловых режимов их функционирования [11, 13, 16–21] остаются недостаточно изученным. Так, можно выделить ряд работ, посвященных вопросам исследования влияния внутренней геометрии каналов на гидродинамику и теплообмен. В работах [5, 6] показано, что профилирование внутренних каналов является удобным и эффективным инструментом для турбулизации течения, с одной стороны, и определяет образование вторичных вихревых противотечений – с другой. В работах [7–9] исследовано влияние прямоугольной формы внутреннего канала на эффективность теплоотдачи в стенку в рамках стационарного течения газа. В работе [7] приведены первые аналитические модели для математического описания процессов переноса тепла в профилированных каналах различной геометрии, представлены результаты экспериментального исследования процессов сопряженного теплообмена в каналах треугольного сечения.

Аспекты прикладного использования общих закономерностей управления эффективностью теплоотвода путем профилирования внутреннего канала, в том числе использования модифицированных лунками, канавками, траншеями и т.п. поверхностей, приведены в работах [10–14]. В [15] выявлено и показано, что дополнительно к непосредственной форме канала угловое расположение стенок, а именно – угол наклона боковых стенок, является одним из управляющих параметров для интенсификации теплоотдачи в прямоугольной камере при начальной степени турбулентности потока более 0,15. Обобщение значительного числа результатов исследования влияния параметров набегающего потока, а именно – начальной степени турбулентности, на процессы интенсификации теплоотдачи во внутренних каналах, в виде математической модели для оценки предельных параметров конвективного теплообмена и гидравлического сопротивления с учетом степени начальной интенсивности турбулентности потока представлено в работе [16].

Объектом исследования является многосекционный коллектор со сложной формой поперечного сечения каналов подвода жидкости и с развитой внешней поверхностью для эффективного охлаждения теплоносителя [22]. Поперечный разрез элемента развитой внешней поверхности изображен на рис. 1.

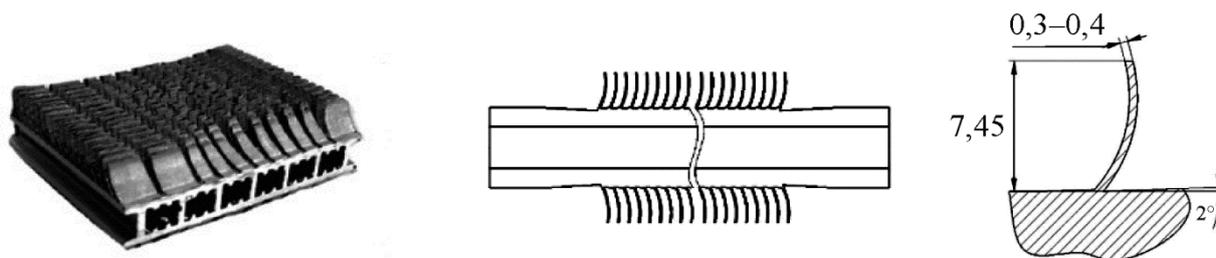


Рис. 1. Внешний вид охлаждающей секции (а) и элементов развитой внешней поверхности (б и в)

В работе решается задача оптимизации геометрии развитой внешней поверхности промышленного маслоохладителя с использованием методов вычислительной механики.

2. Постановка задачи и методы решения

Предварительный анализ внешней развитой поверхности маслоохладителя позволил выявить наиболее перспективные для оптимизации конструктивные параметры. Геометрически внешняя поверхность маслоохладителя представляет собой последовательно расположенные тонкие ребра, ориентированные нормально к поверхности канала. Принудительный обдув холодным воздухом обеспечивает охлаждение внешней поверхности маслоохладителя, что повышает эффективность теплоотдачи жидкость/стенка. Однако влияние конструктив-

ных параметров на процесс охлаждения требует дополнительного изучения и является потенциальным средством оптимизации конструкции маслоохладителя. Поэтому, для дальнейшего изучения в рамках первого этапа оптимизации геометрии внешней поверхности, выбран ряд управляющих параметров (рис. 2).

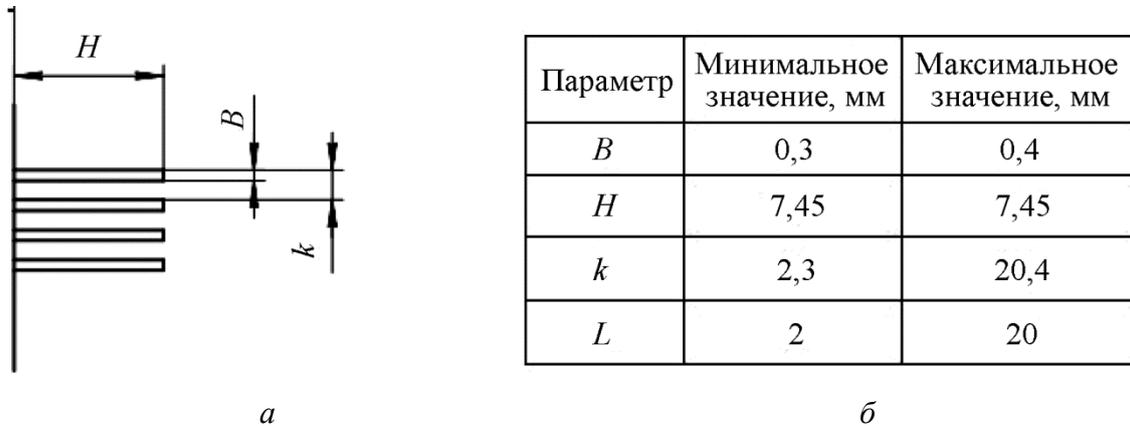


Рис. 2. Управляющие параметры маслоохладителя: *a* – исследуемые параметры; *б* – диапазон изменений управляющих параметров, где *B* – толщина ребра; *H* – высота ребра; *k* – межреберное расстояние с учетом толщины ребра *B*; *L* – межреберное расстояние

При построении математической модели процесса охлаждения использовали следующие допущения:

1. Рассматривали малый сегмент маслоохладителя, включающий два ребра, границы внешней области определяли неотражающими граничными условиями.
2. Материал пластины изотропен, процессы теплопроводности не учитывали, температуру внешней поверхности определяли температурой рабочей жидкости в канале, т. е. процессы теплопередачи жидкость/металл принимали мгновенными, а нагрев – равномерным.
3. Ввиду длительности рассматриваемых процессов, рассматривались стационарные процессы обтекания воздухом ребер маслоохладителя и конвективного теплообмена [20, 21].
4. Влияние рельефа внешней поверхности маслоохладителя считался незначительным, вследствие чего шероховатость материала не учитывалась.
5. На первом этапе решения задачи оптимизации исследовалось влияние расстояния между ребрами внешней развитой поверхности маслоохладителя – значение параметра *L* на распределения температур в управляющих сечениях расчетной области.

Математическая модель движения текучих сред основана на уравнениях Навье–Стокса. Режимы движения газа согласно числам Рейнольдса ($20000 < Re < 400000$) соответствуют турбулентному диапазону, поэтому для моделирования течения газа была подключена модель турбулентности SST [23]. Система уравнений, описывающая движение сплошных сред в общем случае имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + F_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + F_i u_i \quad (3)$$

$$p = cRT. \quad (4)$$

В системе уравнений (1)–(4) приняты следующие обозначения: ρ – плотность среды; u_i – компоненты вектора скорости u ; p – давление; μ – динамический коэффициент вязкости; $E = C_v T + 0.5u_i^2$ – полная удельная энергия среды; $H = E + p/\rho = C_p T + 0.5u_i^2 = h + 0.5u_i^2$ – полная удельная энтальпия; $\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ – тензор вязких напряжений; $S_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скоростей деформаций; $q_j = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$ – тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности среды; T – температура.

Построенная на основе уравнений сохранения система уравнений в частных производных (1)–(4) решается приближенно на основе метода конечных объемов в рамках стационарной постановки на основе инструментария Open-source платформы OpenFOAM.

Граничные условия заданы следующим образом: на входе в область и на верхней границе задавались скорость и температура набегающего потока (температура воздуха $T_b = 15\text{--}25$ °C, скорость воздуха $U_b = 1\text{--}20$ м/с); на выходе определено условие нулевого градиента для скорости и температуры, фиксированное значение давления; на твердых (непроницаемых) поверхностях заданы условия прилипания для скорости и нулевого градиента для давления, заданная температура рабочей поверхности (температура пластины и ребер $T_p = 40\text{--}60$ °C).

В процессе построения расчетной сетки используется ранее подготовленный эскиз элемента маслоохладителя, развитая внешняя поверхность которого была помещена в куб, обозначающий границы области расчета, по полученным в нем вырезам от орбренных элементов была сформирована окончательная расчетная область (рис. 3) и построена ее дискретизация по пространству, включающая более 2,5 млн тетраэдров, с плотностью сгущения вблизи ребер относительно выходных границ – 2,5:1.

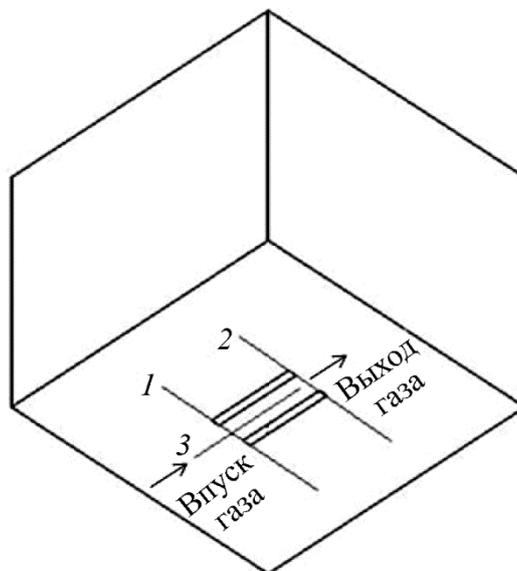


Рис. 3. Расчетная область с указанием исследуемых сечений 1–3:

1 – на входе в зону развитой внешней поверхности; 2 – на выходе из зоны развитой внешней поверхности; 3 – в межреберном сечении

3. Результаты и обсуждение

Изменяемым параметром является расстояние между элементами оребрения в диапазоне $L = 2-20$ мм с шагом в 2 мм. Рассматриваемый участок обтекается потоком холодного воздуха, который охлаждает пластину за счет конвективного теплопереноса.

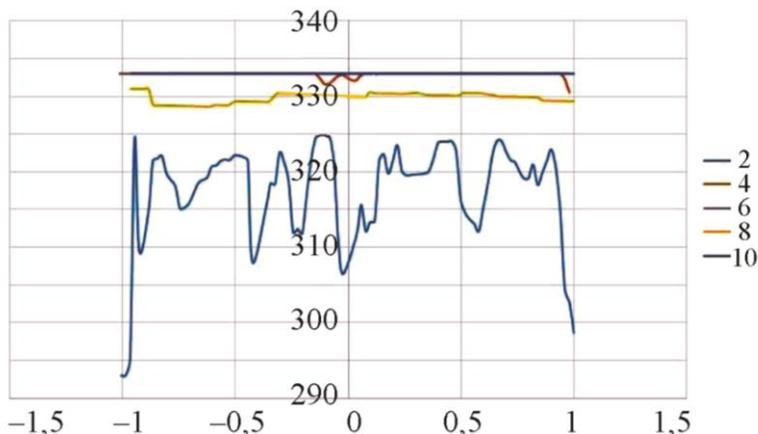


Рис. 4. Температурные профили в продольном сечении между элементами оребрения

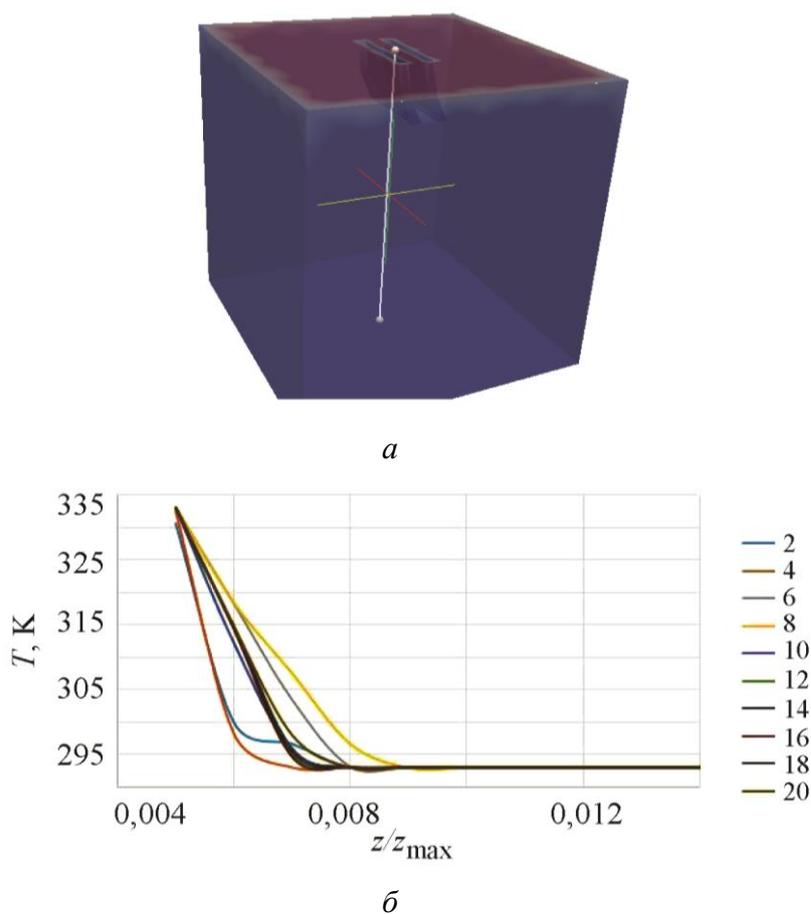


Рис. 5. Температурные профили в поперечном сечении: *a* – линия измерения; *б* – графики распределения температуры в поперечном сечении

Для оценки эффективности были построены температурные профили на поверхности пластины между элементами оребрения: в поперечных (рис. 4, линии 1, 2) и продольном

(рис. 4, линия 3) направлениях в сечении между элементами оребрения для различных межреберных расстояний $B-k$.

Анализ данных позволил выявить неэффективный диапазон изменения межреберного расстояния $L = 10-20$ мм. При этом продольные колебания температур при $L < 4$ отличается существенной неоднородностью, что недопустимо в реальном устройстве.

С целью уточнения влияния межреберного расстояния L на эффективность теплосъема с оребренной поверхности, был получен и проанализирован относительный температурный профиль в поперечном сечении (по координате z/z_{max}), приведенный на рис. 5.

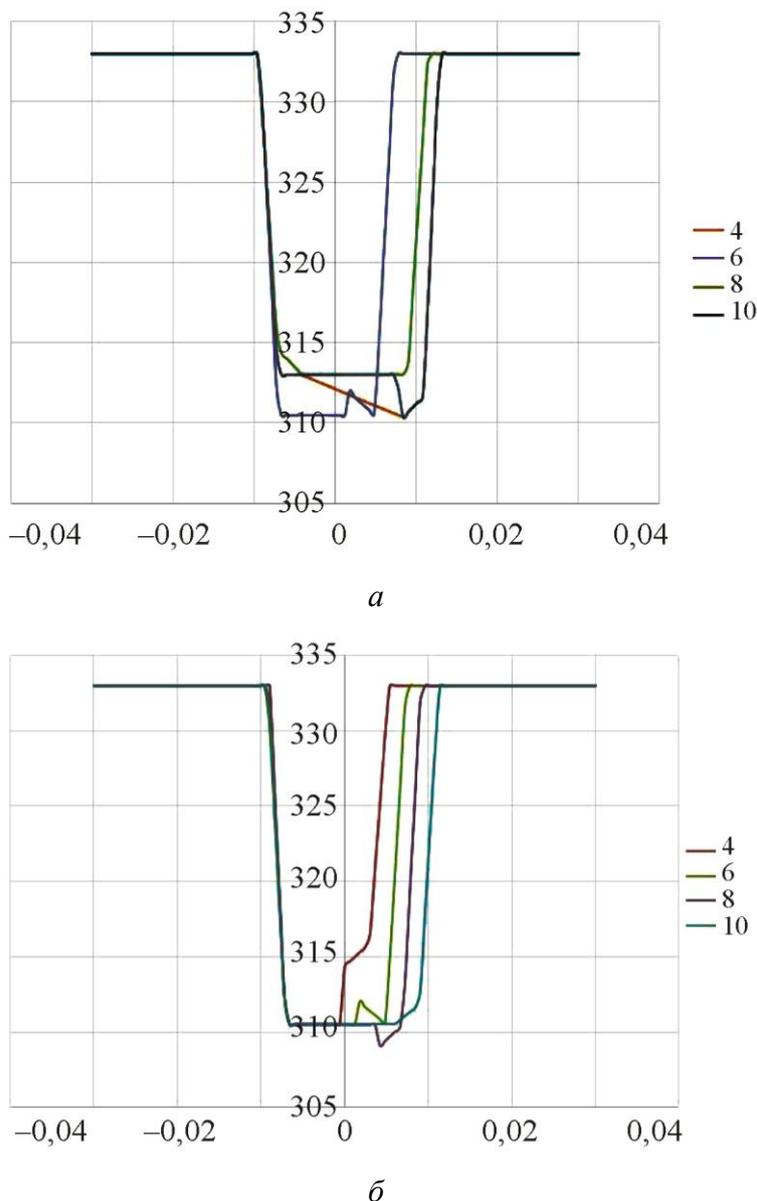


Рис. 6. График распределения температуры: *a* – на входе в межреберное пространство с абсолютными величинами температуры; *б* – на выходе из межреберного пространства с абсолютными величинами температуры

Анализ изменения поперечных температурных профилей от межреберного расстояния позволяет выделить зону смещения тепловых потоков – зону интенсивного теплообмена не превышающую $1,2k$, из рис. 5 *б* видно, что межреберное расстояние существенным образом влияет на скорость теплосъема с поверхности маслоохладителя. Угол γ температурного пре-

дела, определяемый интенсивностью теплообмена можно оценить по аппроксимационной зависимости от межреберного расстояния, как:

$$\gamma = 70 + 8 \cdot \sin(k - B + 3).$$

Из графика на рис. 5 б видно, что при расстоянии между элементами $L = 8$ мм снижение температуры с изменением высоты максимальное, т. е. в данном случае нагретая прослойка воздуха самая узкая.

Также рассмотрим распределение температуры на границе входа и выхода воздушного потока, линии, по которым оно будет изучаться изображены на рис. 4 под номерами 1 и 2. В данном случае получим изменение температуры по оси y . На основании рассчитанных данных были построены графики в относительных и абсолютных величинах.

На рис. 4–6 видно, что максимальное охлаждение на данной линии преобладает при межреберных расстояниях $L = 4$ мм и $L = 8$ мм.

4. Заключение

В результате проведенных расчетов получены распределения полей скорости, давления, температуры и теплового потока вблизи непроницаемых поверхностей рассматриваемого фрагмента внешнего оребрения маслоохладителя [17], получены интегральные теплофизические характеристики воздушного потока до и после прохождения элементов оребрения в зависимости от величины варьируемого межреберного расстояния. Анализ полученных теплофизических характеристик, в том числе полученных температурных профилей, позволил выявить оптимальное, с точки зрения тепловой эффективности маслоохладителя, расстояние между элементами оребрения, составляющее 8 мм.

Таким образом, методами вычислительного эксперимента, путем решения задачи воздушного охлаждения парных ребер единичной охлаждающей секции, поведена оптимизация геометрии группы элементов оребрения.

Литература

1. Цыганков М. П., Кручинин Д. С. Особенности математического моделирования высокотемпературных теплообменников // Известия вузов. Химия и химическая технология. – 2013. – Т. 56, вып. 3. – С. 95–99.
2. Тарадай А. М., Коваленко Л. М., Гурин Е. П. К вопросу оценки теплоэнергетической эффективности теплообменников, применяемых в муниципальной теплоэнергетике // Новости теплоснабжения. – 2003. – № 6. – С. 40–43.
3. Жинов А. А., Шевелев Д. В., Ананьев П. А. Моделирование потерь давления воздуха в оребренном трубном пучке воздушного конденсатора // Наука и образование. – 2013. – № 03. – DOI: 10.7463/0313.0544307.
4. Дмитриев А. В., Дмитриева О. С. Теплообмен при встречном обтекании рядов труб аппарата воздушного охлаждения // Вестник технологического университета. – 2017. – Т. 20, № 13 – С. 40–43.
5. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М. : Атомиздат, 1979. – 416 с.
6. Идельчик И. Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов (подвод, отвод и распределение потока по сечению аппаратов). – М. : Машиностроение, 1983. – 351 с.
7. Sugiyama H., Akiyama M., Shibata K. Heat and Mass Transfer Analysis of Developing Turbulent Flow in a Square Duct // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B. – 1991. – Vol. 57 (535). – P. 1044–1050. – DOI: 10.1299/kikaib.57.1044.
8. Huser A., Biringen S. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct // Journal of Fluid Mechanics. – 1993. – Vol. 257. – P. 65–95. – DOI: 10.1017/S002211209300299X.

9. Myong H. K. Numerical investigation of fully developed turbulent fluid flow and heat transfer in a square duct // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 1991. – Vol. 12. – P. 344–352. – DOI: 10.1016/0142-727X(91)90023-O.
10. Numerical investigation on turbulent convective heat transfer of nanofluid flow in a square cross-sectioned duct / G. Şenay, M. Kaya, E. Gedik, M. Kayfeci // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. – 2019. – Vol. 29 (4). – P. 1432–1447. – DOI: 10.1108/HFF-06-2018-0260.
11. Heat transfer enhancement and turbulent flow in a rectangular channel using perforated ribs with inclined holes / J. Liu, S. Hussain, W. Wang, G. Xie, Sundhın Bengt // *Journal of Heat Transfer*. – 2019. – Vol. 141 (4). – Article No. 041702. – DOI: 10.1115/1.4042841.
12. Kumar R., Kumar A., Goel V. Performance improvement and development of correlation for friction factor and heat transfer using computational fluid dynamics for ribbed triangular duct solar air heater // *Renewable Energy*. – 2019. – Vol. 131. – P. 788–799. DOI: 10.1016/j.renene.2018.07.078.
13. Sharma N., Tariq A., Mishra M. Experimental Investigation of Heat Transfer Enhancement in Rectangular Duct with Pentagonal Ribs // *Heat Transfer Engineering*. – 2019. – 40 (1–2). – P. 147–165. – DOI: 10.1080/01457632.2017.1421135.
14. Schindler A. B., Younis A., Weigand B. Large-Eddy Simulations of turbulent flow through a heated square duct // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2019. – Vol. 135. – P. 302–318. – DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.09.018.
15. D'yachenko A. Yu., Terekhov V. I., Yarygina N. I. Turbulent flow past a transverse cavity with inclined side walls. 2. Heat transfer // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2007. – Vol. 48, No. 4. – P. 486–491. – DOI: 10.1007/s10808-007-0061-4.
16. Dreitser G. A., Lobanov I. E. Limiting Intensification of Heat Exchange in Tubes Due to Artificial Turbulization of the Flow // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2003. – Vol. 76. – P. 54–60. – DOI: 10.1023/A:1022959006920.
17. Optimization of the developed outer surface of an industrial oil cooler / E. S. Baymetova, A. A. Chernova, M. R. Koroleva, M. Kelemen // *MM Science Journal*. – 2021. – Vol. 2021 – P. 4764–4768. – DOI: 10.17973/MMSJ.2021_10_2021027.
18. Байметова Е. С., Гиззатуллина А. Ф., Пушкарев Ф. Н. Решение задачи сопряженного теплообмена в оребренной трубке с использованием openFOAM // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2021. – Т. 23, № 2. – С. 154–164.
19. Koroleva M. R., Saburova E. A., Chernova A. A. Studying the efficiency of cooling and resistance of ribbed tubular elements // *Journal of Physics : Conference Series*. – 2020. – Vol. 1675. – 12009. – DOI: 10.1088/1742-6596/1675/1/012009.
20. Королева М. Р., Терентьев А. Н., Чернова А. А. Гидродинамика коллектора сложной формы // *Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П. А. Соловьева*. – 2021. – № 3 (58). – С. 50–55.
21. Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М. : Наука, 1982. – 472 с.
22. Салахов Р. Р. Расчет теплообменных аппаратов с наружным оребрением : отчет по научно-исследовательской работе. – Казань, 2017. – 68 с.
23. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // *4th. Int. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer : proceedings / ed. by K. Hanjalіж*. – Begell House, 2003. – 8 p.

Received: 16.02.2022

Revised: 18.03.2022

Accepted: 15.04.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.055-066

DESTRUCTION OF A PROTECTIVE PIPE COATING UNDER CYCLIC LOADING BY INTERNAL PRESSURE

V. V. Struzhanov^{1, a), *} and A. E. Chaikin^{2, b)}

¹*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

²*Institute of Natural Sciences and Mathematics, B. N. Yeltsin Ural Federal University, 48 Kuibysheva St., Ekaterinburg, 620000, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0001-5582-2384>  chaykin.ae@yandex.ru

*Corresponding author: E-mail: stru@imach.uran.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7(343)362 30 19

An analytical method has been developed for determining the moment of destruction of thin pipe coatings whose material retains elasticity during cyclic changes in internal pressure. The coating material has the property of strain softening, that is, destruction with increasing deformation occurs as stresses drop. The properties of the coating material are described by a convex-concave potential. Due to damage accumulation resulting from fatigue loading, the properties of the coating material change. Hence, the complete deformation curve degenerates. To determine the moment of destruction, the methods of the mathematical theory of catastrophes are used, which make it possible to find all the equilibrium positions of the system and the point of instability of the deformation process. Due to the degeneration of the properties of the coating material, the catastrophe (loss of stability) approaches the parameters of fatigue loading.

Keywords: thin coating of pipes, equilibrium state curves, loss of deformation stability, degeneration of coating material properties, catastrophe (destruction).

Acknowledgment

The work was performed according to the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790145-0.

References

1. Andrasic C.P., Parker A.P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings. *Engineering Fracture Mechanics*, 1984, vol. 19 (1), pp. 187–193. DOI: 10.1016/0013-7944(84)90078-X.
2. Shannon R.W.E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1974, vol. 2 (1), pp. 19–29. DOI: 10.1016/0308-0161(74)90013-1.
3. Poston T., Stewart I. Teoriya katastrofi ee prilozheniya [Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and its Applications, London, San Francisco, Pitman, 1978]. Moscow, Mir Publ., 1980, 608 p. (In Russian).
4. Gilmore R. Prikladnaya teoriya katastrofi. Book 1 [Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, Dover Publications, 1993]. Moscow, Mir Publ., 1984, 350 p. (In Russian).

5. Vil'deman V.E. and Chausov N.G., Conditions of Deformation Failure for Special Configuration Stretched Sample. *Zavod. Lab., Diagn. Mater.*, 2007, vol. 73, No. 10, pp. 55–59. (In Russian).
6. Vil'deman V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.
7. Andreeva E.A. Solution of one-dimensional softening materials plasticity problems. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, iss. 2 (17), pp. 152–160. DOI: 10.14498/vsgtu642. (In Russian).
8. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. Investigation of uniaxial and biaxial loadings of softening materials in endochronic theory of inelasticity. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, iss. 1 (26), pp. 110–115. DOI: 10.14498/vsgtu1007. (In Russian).
9. Wildemann V.E., Lomakin E.V. & Tretyakov M.P. Postcritical deformation of steels in plane stress state. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, pp. 18–26. DOI: 10.3103/S0025654414010038.
10. Struzhanov V.V., Chaikin A.E. Destruction of a Thin-walled Spherical Vessel by Internal Pressure. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2315, 020044. DOI: 10.1063/5.0036729.
11. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics, vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 492 p. (In Russian).
12. Mironov V.I., Bagazeev Yu.M. Mechanical properties of the material at the stage of deformation softening. *Vestnik PGTU. Mechanics of composites*, 1999, No. 1, pp. 78–85.
13. Struzhanov V.V., Mironov V.I. Tartashnik K.A. On one approach to the calculation of durability under cyclic loading. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2004, iss. 26, pp. 94–101. DOI: 10.14498/vsgtu184. (In Russian).
14. Struzhanov V.V., Korokin A.V., Chaykin A.E. One approach to determination of the ultimate load-bearing capacity of mechanical systems with softening elements. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, 22 (4), pp. 762–773. DOI: 10.14498/vsgtu1624. (In Russian).
15. Struzhanov V.V. The determination of the deformation diagram of a material with a falling branch using the torsion diagram of a cylindrical sample. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, vol. 15 (1), pp. 138–144. (In Russian).

Подана в журнал: 16.02.2022

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.2.055-066

РАЗРУШЕНИЕ ЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ ТРУБЫ ПРИ ЕЕ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В. В. Стружанов^{1, а), *}, А. Е. Чайкин^{2, б)}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук»,
д. 34, ул. Комсомольская, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация
²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0001-5582-2384>  chaykin.ae@yandex.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7(343)362–30–19

Разработан аналитический метод определения момента разрушения тонких покрытий труб, материал которых при циклических изменениях внутреннего давления сохраняет свойство упругости. Материал покрытия обладает свойством деформационного разупрочнения, т. е. разрушение при возрастающей деформации происходит в процессе падения напряжений. Свойства материала покрытия описываются выпукло-вогнутым потенциалом. В силу накопления повреждений в результате усталостного нагружения свойства материала покрытий изменяются. Следовательно, полная диаграмма деформирования вырождается. Для определения момента разрушения используются методы математической теории катастроф, которые позволяют найти все положения равновесия системы и точку потери устойчивости процесса деформирования. В силу вырождения свойств материала покрытия катастрофа (потеря устойчивости) приближается к параметрам усталостного нагружения.

Ключевые слова: тонкое покрытие труб, кривые равновесных состояний, потеря устойчивости деформирования, вырождение свойств материала покрытия, катастрофа (разрушение).

1. Введение

Цилиндрические элементы конструкций часто применяются в технике. Для повышения работоспособности таких элементов часто используют защитные покрытия, которые ограждают их от вредного влияния агрессивных сред и от воздействия на окружающую среду, когда трубы выполнены из токсичных материалов. В процессе нагружения защитные покрытия могут разрушиться и перестать выполнять свои функции. Следовательно, задача о прогнозировании их разрушения является актуальной [1, 2].

В работе предложена методика расчета момента разрушения тонкого покрытия толстостенной цилиндрической трубы, находящейся под воздействием циклически изменяющегося внутреннего давления. Она основана на применении методов математической теории катастроф [3, 4]. Реализация данного подхода возможна, если вводить в рассмотрение неустойчивые состояния материала покрытия (разупрочнение), которые характеризуются падающей ветвью диаграммы деформирования [5–10]. При этом разрушение трактуется как невозможность равновесия [11]. В ходе исследования разрушения покрытия учитывается вырождение полной диаграммы деформирования материала в результате усталостного нагружения [12; 13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим элемент конструкции, состоящий из длинной толстостенной трубы с тонким покрытием единичной толщины. Внутренний радиус трубы равен a , внешний – b . Труба находится под действием циклического внутреннего давления, которое действует на внутренние границы трубы и изменяется от нуля до p_c . Материал трубы при любой величине внутреннего давления сохраняет упругость. Величина p_c такова, что материал покрытия находится также в упругом состоянии. Свойства материала трубы определяет модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Покрытие изготовлено из материала, который при квазистатическом возрастающем нагружении может проходить все стадии деформирования, вплоть до разупрочнения. В упругости материал покрытия имеет модуль Юнга H и коэффициент Пуассона μ . Требуется найти число циклов нагружения системы, необходимых для разрушения покрытия.

3. Определяющие соотношения при плоском напряженном состоянии материала покрытия (квазистатическое деформирование)

Рассмотрим плоский квадратный элемент материала с единичными размерами. Его деформирование осуществляем заданием нормальных деформаций ε_1 и ε_2 (двухосное растяжение). Если материал находится в состоянии упругости, то его потенциальная энергия деформаций равна

$$W^e = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2) = \frac{H}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon_1^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2), \quad (1)$$

где H – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. Здесь использован закон Гука, связывающий при плоском напряженном состоянии нормальные напряжения σ_1 и σ_2 и нормальные деформации ε_1 и ε_2 , а именно,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{H}{(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Формула (1) определяет кривые второго порядка на плоскости ε_1 – ε_2 (линии уровня потенциала W^e). Это центральные эллипсы, главные оси которых наклонены к декартовым осям ε_1 , ε_2 под углом $\pi/4$ (рис. 1). Точки, расположенные на большой полуоси, отвечают чистому сдвигу ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon$). Произвольная точка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ лежит на линии уровня с большой полуосью, равной

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \frac{1+\mu}{1-\mu} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} = \sqrt{\frac{W^e}{G}}.$$

Здесь $G = \frac{H}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига в упругости.

После исчерпания упругости для описания свойств материала можно было бы использовать теорию малых упруго-пластических деформаций, в которой предполагается упругость объемной деформации и пропорциональность девиаторов тензоров напряжений и деформаций. Однако после выхода на стадию разупрочнения первая гипотеза не выполняется, так как материал уже существенно поврежден множеством микротрещин и объемный модуль изменяется.

Чтобы остаться в рамках деформационной теории, следует отказаться от первой гипотезы, а вместо второй сохранить пропорциональность напряжений и деформаций

с некоторым уже переменным, зависящим от деформаций матричным коэффициентом. Например, в рассматриваемой задаче этот матричный коэффициент в законе (2) можно принять в виде $C\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где ψ – некоторая скалярная функция требующая специального определения.

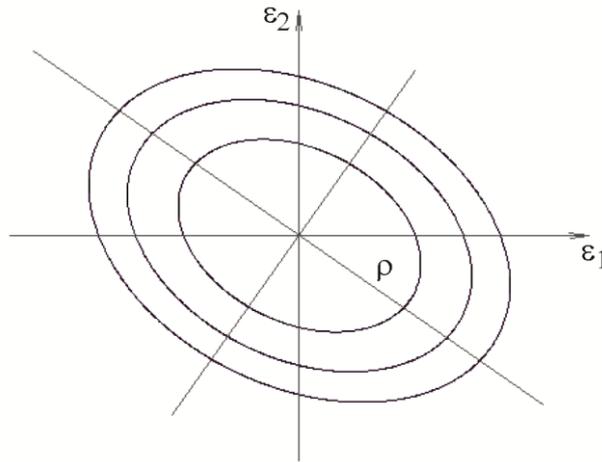


Рис. 1. Линии уровня потенциала W^e

Следствием принятого предположения является тот факт, что в области неупругости линии уровня функции энергии деформаций W (потенциальной энергии) подобны линиям уровня потенциала W^e , т. е. представляют собой эллипсы с тем же самым отношением главных осей. Необходимо только знать распределение значений потенциала по этим линиям уровня [14].

Воспользуемся полной диаграммой для чистого сдвига $\tau(\gamma)$ (τ – касательное напряжение, γ – деформация сдвига), которая обладает восходящей и нисходящей до нуля ветвями. Такую диаграмму материала можно получить, используя опытную диаграмму кручения стержней круглого поперечного сечения с пересчетом на диаграмму материала [15]. Тогда энергия, затраченная на деформирование, есть

$$V = \int_0^\gamma \tau(\gamma) d\gamma. \quad (3)$$

Пусть $\tau = \begin{cases} 0,5G(2\gamma - 6\gamma^2), & 0 \leq \gamma \leq \gamma_z = \frac{1}{3}; \\ 0, & \gamma \geq \gamma_z. \end{cases}$

При деформировании вдоль большой полуоси линий уровня имеем деформацию сдвига $\gamma = 2\varepsilon, \rho = \sqrt{2}\varepsilon$ и $\gamma = \sqrt{2}\rho$. После взятия интеграла (3) и замены γ на $\sqrt{2}\rho$ получаем

$$V(\rho) = \begin{cases} G\rho^2(1 - 2\sqrt{2}\rho), & 0 \leq \rho \leq \rho_z = 0,236; \\ G \cdot 0,0186, & \rho \geq \rho_z. \end{cases} \quad (4)$$

Т. е. функция (4) определяет значение потенциала W в точках большой полуоси. График функции (4) представлен на рис. 2. Это выпукло-вогнутая функция. На отрезке $(0, \rho_B)$ она выпуклая вниз (устойчивость деформирования материала). На отрезке (ρ_B, ρ_z) – выпукла вверх (материал находится в неустойчивом состоянии). При $\rho = \rho_B = \rho_z/2$ пограничное состояние. Здесь ρ_B соответствует максимальному значению на диаграмме $\tau(\gamma)$, после которого деформирование идет по падающей ветви.

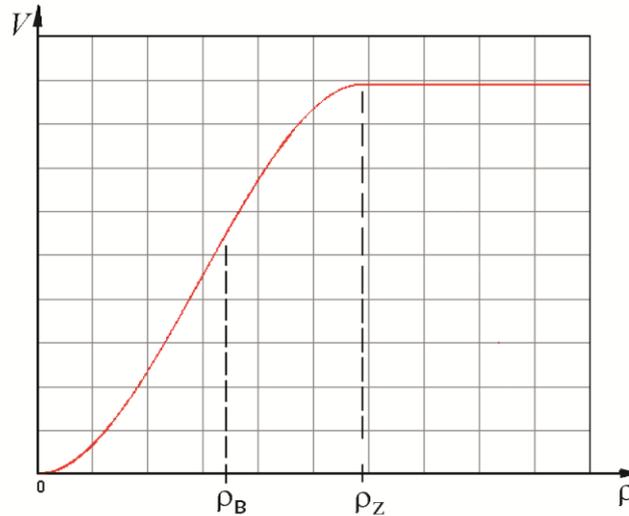


Рис. 2. График функции $V(\rho)$

Если в выражении (4) заменить $\rho = \sqrt{\frac{W^e}{G}}$, то получим значение потенциала

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} W^e \cdot \left(1 - 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{W^e}{G}} \right), & 0 \leq \rho \leq \rho_Z; \\ G \cdot 0,0186, & \rho \geq \rho_Z, \end{cases} \quad (5)$$

отвечающего данным линиям уровня при неупругом деформировании. Качественный вид функции $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ изображен на рис. 3. При плоском напряженном состоянии функция W описывает все состояния материала (выпуклость вниз – устойчивость, упрочнение; выпуклость вверх – неустойчивость, разупрочнение).

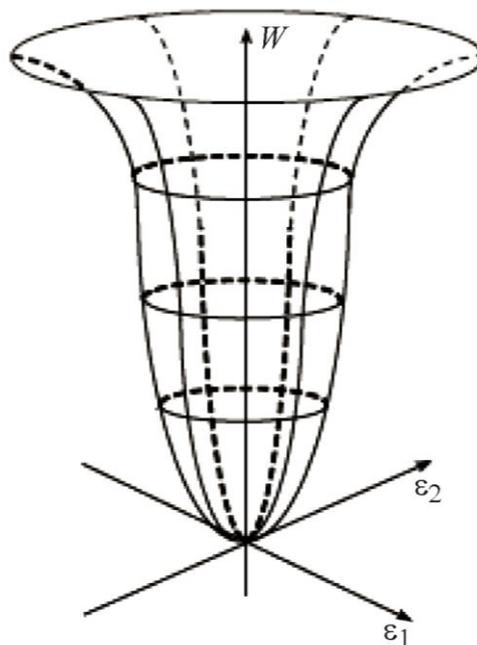


Рис. 3. Качественный вид поверхности потенциала $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Связь между напряжениями и деформациями в данном случае задана законом

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} \end{pmatrix} = C\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

где $\psi = 1 - 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{W^e}{G}}$, или $\psi = 1 - 3\sqrt{2}\rho$. При $p = p_z$ величина $\psi = 0$, что отвечает разрушению материала $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

4. Определение предельного значения перемещений точек внутренней границы трубы

Пусть материал покрытия не поврежден и его свойства описываются потенциалом (5). Найдем величину предельного давления p , при котором происходит разрушение покрытия. При квазистатическом возрастании величины p система труба-покрытие является консервативной механической системой. Для определения всех положений ее равновесия будем использовать аппарат математической теории катастроф [3]. Его применение основано на построении лагранжиана системы, который в силу равенства нулю кинетической энергии является суммой потенциальных энергий деформаций элементов системы. Это функция от задаваемого параметра p (параметр управления) и зависящей от p величины v – радиального перемещения точек внешней границы трубы (параметр состояния, обобщенная координата системы).

Энергию деформаций трубы найдем, вычисляя напряжения σ_r, σ_θ и деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ из решения осесимметричной задачи Ляме с граничными условиями $\sigma|_{r=a} = -p, u|_{r=b} = v$ (u – радиальные перемещения точек трубы). Здесь σ_r, ε_r – радиальные напряжения и деформации, $\sigma_\theta, \varepsilon_\theta$ – тангенциальные напряжения и деформации. Производя необходимые действия, получаем

$$\begin{aligned} L_1 &= l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dr = l \cdot \frac{E\pi(b^2 - a^2)}{1 - \nu^2} \left[M^2(1 + \nu) + \frac{1}{b^2 a^2} N^2(1 - \nu) \right] = \\ &= \frac{lE\pi(b^2 - a^2)}{1 - \nu^2} \left[\frac{v^2}{b^2} (1 + \nu) - \frac{a^2 [pb(1 - \nu^2) + Ev(1 + \nu)] \cdot [vE(1 + \nu) - pb(1 - \nu^2)]}{[(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)]b^2 E^2} \right], \end{aligned}$$

где $N = b^2 AB, M = \left(\frac{v}{b} - AB\right)$; $A = \frac{a^2}{(1-\nu)b^2 + a^2(1+\nu)}, B = \frac{pb(1-\nu^2) + Ev(1+\nu)}{bE}$.

(l – длина трубы).

В покрытии имеются только деформации $\varepsilon_\theta = v/b$. При таком деформировании, вычисляя величину большой полуоси линий уровня, имеем $\rho = \frac{v}{b} \sqrt{\frac{1}{1-\mu}}$. Тогда, используя выражения (4, 5), находим энергию покрытия

$$L_2 = 2\pi btl \frac{H}{1 - \mu^2} \left(\frac{v^2}{2b^2} - \sqrt{2} \frac{v^3}{b^3} \sqrt{\frac{1}{1 - \mu}} \right)$$

($2\pi btl$ – объем покрытия).

Итак, лагранжиан системы есть $L = L_1 + L_2$. Он зависит от одного параметра состояния v . Теперь, используя уравнение Лагранжа второго рода, получаем уравнение равновесия системы

$$\frac{dL}{dv} = \frac{lE\pi(b^2 - a^2)2v}{(1 - v)b^2 + a^2(1 + v)} - 2\pi a l p \left(\frac{a}{b} + \frac{av(1 + v)(b^2 - a^2)}{[(1 - v)b^2 + a^2(1 + v)]b} \right) +$$

$$+ 2\pi b \frac{H}{1 - \mu^2} \left(\frac{v}{b^2} - 3\sqrt{2} \frac{v^2}{b^3} \sqrt{\frac{1}{1 - \mu}} \right) = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6), находим зависимость p от v , т. е. функцию $p = f(v)$.

После разрушения покрытия внешняя поверхность трубы уже свободна от действия внешних сил. Из решения задачи Ляме с граничными условиями $\sigma|_{r=a} = -p, \sigma_r|_{r=b} = 0$ находим связь между p и v . В этом случае

$$p = kv; \quad k = [E(b^2 - a^2)](2a^2b)^{-1}. \quad (7)$$

Теперь из уравнения $f(v) = kv$ получаем значение $v = v^*$, которое определяет точку пересечения кривой $f(v)$ и прямой (7). Это точка с координатами $(v^*, p^* = f(v^*))$ (рис. 4) после достижения которой уже точки прямой отвечают равновесным состояниям системы, т. е. трубы с разрушенным покрытием. На отрезке $0 \leq v \leq v^*$ кривая равновесных состояний системы $p = f(v)$ имеет максимум при некотором значении $v \leq v' \leq v^*$ ($\frac{dp}{dv}|_{v=v'} = 0$). Поэтому при постепенном возрастании параметра p при $p \geq p^*$ система имеет несколько возможных положений равновесия. Однако согласно принципу промедления система сначала проходит положения равновесия, отвечающие точкам восходящей ветви функции $p = f(v)$. После достижения значения $p' = f(v')$ равновесие становится неустойчивым и малейшее возрастание параметра p приводит к скачкообразному переходу в новое устойчивое равновесие, которое отвечает некоторой точке прямой kv . Таким образом, имеет место скачкообразное (катастрофическое) разрушение покрытия.

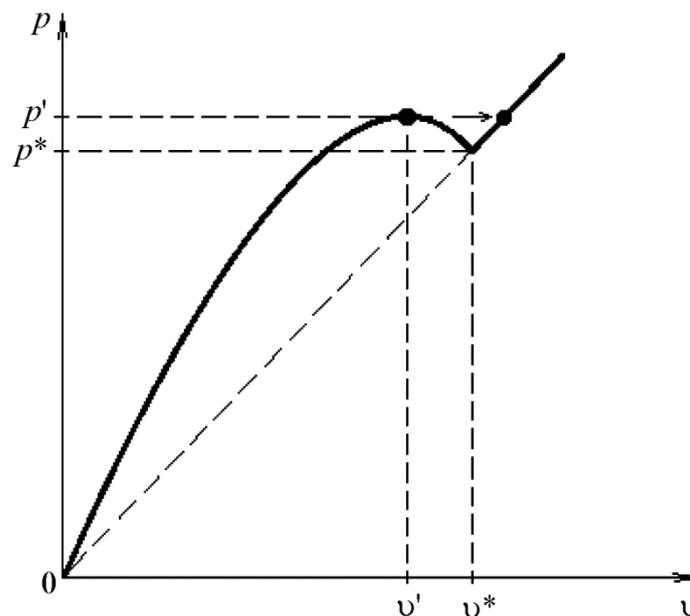


Рис. 4. Качественный вид кривой равновесных состояний системы (сплошная линия)

5. Параметры циклического нагружения покрытия

Найдем связь между задаваемым параметром p_c и величиной перемещения v_c точек внешней границы трубы при упругом деформировании трубы и покрытия.

Составим уравнение равновесия, используя уравнение Лагранжа второго рода при квазистатическом возрастании перемещения p , полагая, что системы находится в упругом состоянии. В этом случае лагранжиан системы есть функция $K = L_1 + V^e$, где L_1 – энергия деформаций трубы, а $V^e = 2\pi bl \frac{1}{2} \frac{H}{1-\mu^2} \varepsilon_\theta^2 = \pi bl \frac{H}{1-\mu^2} \frac{v^2}{b^2}$ – энергия упругих деформаций покрытия.

Тогда уравнение равновесия есть

$$\frac{dK}{dv} = \frac{lE\pi(b^2 - a^2)2v}{(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)} - 2\pi alp \left(\frac{a}{b} + \frac{av(1 + \nu)(b^2 - a^2)}{[(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)]b} \right) + 2\pi bl \frac{H}{1 - \mu^2} \frac{v}{b^2} = 0.$$

Отсюда

$$v = f(p) = \frac{a^2 p [(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)](1 - \mu^2)}{[b^2(1 - \nu) + a^2(1 + \nu)]H + (Eb - a^2 p(1 + \nu))(1 - \mu^2)(b^2 - a^2)}.$$

Тогда $v_c = f(p_c)$ и максимальная деформация цикла $\varepsilon_\theta^c = v_c/b$.

6. Изменение свойств покрытия при циклировании

При циклическом нагружении с максимальной деформацией цикла ε_θ^c деформирование в потенциальном поле проходит от нуля до линии уровня с большой полуосью, равной $\rho_c = \frac{v_c}{b} \sqrt{\frac{1}{1-\mu}}$. При этом в силу повреждаемости материала покрытия в процессе циклирования происходит изменение значений потенциала по линиям уровня, то есть потенциал $V = V(\rho, n)$ (n – число циклов нагружения).

Для определения функции $V(\rho, n)$ необходимо производить циклическое кручение образца в области упругости с максимальным крутящим моментом $M = M_c$, причем M_c должно иметь такое значение, что на поверхности образца $\gamma = \gamma_c = \sqrt{2}\rho_c$; $\tau_c = G\gamma_c$, т. е. $M_c = \frac{\pi R^3}{2} \tau_c$ (R – радиус поперечного сечения скручиваемого образца). Сначала проводим испытание до полного разрушения материала поверхности образца и определяем предельное число циклов N . Затем другому образцу даем $n_1 = \frac{N}{m}$ циклов кручения (m – достаточно большое число). После этого скручиваем образец квазистатически возрастающим крутящим моментом и по методике находим полную диаграмму сдвига поверхностного слоя. Третьему образцу задаем $n_2 = \frac{2N}{m}$ циклов нагружения и также по методике определяем полную диаграмму сдвига и т. д. Таким образом, получаем семейство полных диаграмм, которые вырождаются с увеличением n в силу прогрессирующей поврежденности материала.

В качестве примера рассмотрим вырождение диаграммы чистого сдвига $\tau(\gamma)$, приведенной в разд. 3. Пусть $\tau_n = 0,5G(2\gamma - 6 \cdot A(n) \cdot \gamma^2)$. При $n = 0$ имеем $A = 1$. При $n = N$ последняя перед разрушением диаграмма материала поверхностного слоя образца есть

$$\tau_N = 0,5G(2\gamma - 6A_N\gamma^2).$$

При $\gamma_z = 2\gamma_c$ функция τ_N должна равняться нулю. Отсюда $A_N = 1/6\gamma_c$. Если A изменяется по линейному закону, то $A(n) = \frac{n}{N} \left(\frac{1}{6\gamma_c} - 1 \right) + 1$. График вырождения представлен на рис. 5.

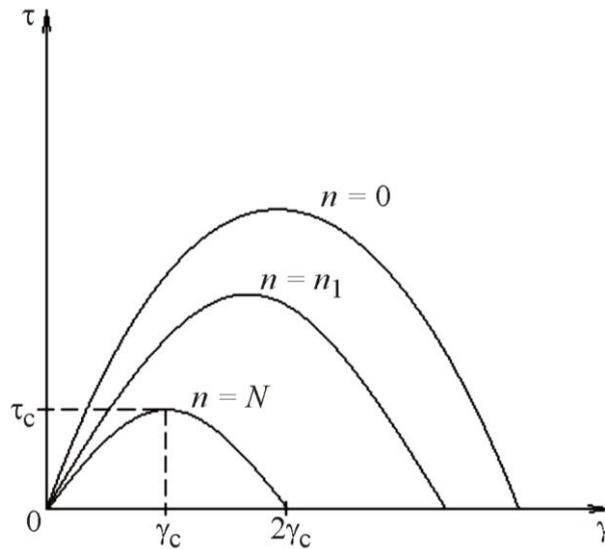


Рис. 5. График вырождения полной диаграммы $\tau(\gamma)$ в зависимости от числа циклов нагружения

Теперь энергия, затраченная на деформирование материала поверхностного слоя в зависимости от числа циклов нагружения равна

$$V(\rho, n) = \begin{cases} G\rho^2 \left(1 - 2\sqrt{2}\rho \cdot A(n) \right), & 0 \leq \rho \leq \rho_z = 0,236/A(n); \\ G \cdot 0,0186/A^2(n), & \rho \geq \rho_z. \end{cases}$$

Таким образом, предельная линия уровня, отвечающая разрушению, смещается к началу координат.

7. Число циклов до разрушения покрытия трубы

Запишем уравнение равновесия системы при квазистатическом возрастании перемещения p точек внутренней границы трубы для случая, когда энергия деформаций покрытия определяется функцией $V(\rho, n)$. Используя методику, изложенную в пункте 4, получаем уравнение равновесия аналогичное уравнению (6), а именно,

$$\frac{lE\pi(b^2 - a^2)2v}{(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)} - 2\pi a l p \left(\frac{a}{b} + \frac{av(1 + \nu)(b^2 - a^2)}{[(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)]b} \right) + 2\pi b \frac{H}{1 - \mu^2} \left(\frac{v}{b^2} - 3\sqrt{2} \frac{v^2}{b^3} \sqrt{\frac{1}{1 - \mu}} \cdot A(n) \right) = 0 \quad (8)$$

Решая уравнение (8), находим зависимость p от v и n , т. е. функцию $p = \varphi(v, n)$. Графики этой функции при возрастании величины p представлены на рис. 6, где точки Q и B – это точки разрушения покрытия.

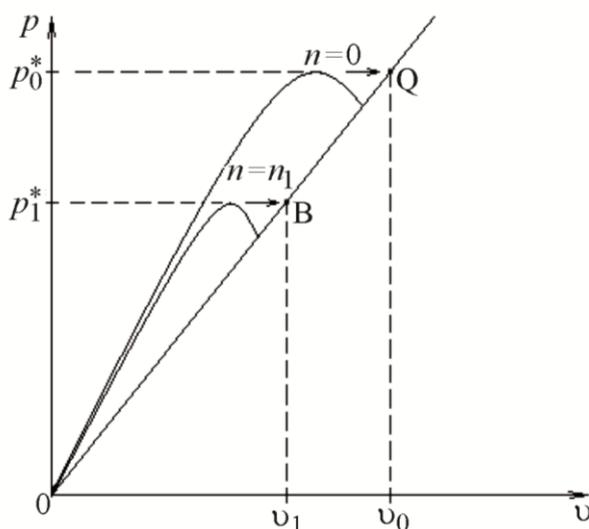


Рис. 6. Качественный вид кривых равновесных состояний системы при увеличении циклов нагружения

После разрушения покрытия связь между p и v определяется формулой (7) ($p = kv$). Тогда для каждого p из равенства $\varphi(v, n) = kv$ находится точка пересечения кривой $\varphi(v, n)$ и прямой (7) (Точки Q, B,...). Эта точка при увеличении числа циклов будет стремиться к началу координат (рис. 6).

Определим число циклов нагружения, при котором $p^* = p_c^*$. В этом случае точка пересечения кривой $\varphi(v, n)$ с прямой (7) имеет координаты $\left(\frac{p_c^*}{k}, p_c^*\right)$. Тогда, подставляя эти координаты в функцию φ , получаем равенство $\varphi\left(\frac{p_c^*}{k}, n\right) = p_c^*$. Отсюда получаем значение числа циклов нагружения p^* , при достижении которого произойдет разрушение покрытия.

8. Заключение

Представлены теоретические разработки по определению момента разрушения тонких покрытий труб при циклическом изменении внутреннего давления. Методика основана на использовании полных диаграмм деформирования с падающей ветвью материала покрытия, которые вырождаются в ходе циклического нагружения. Используется аппарат математической теории катастроф, в которой разрушение покрытия связано с потерей устойчивости нагружения механической системы труба–покрытие.

Благодарность

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием по теме № АААА-А18-118020790145-0.

Литература

1. Andrasic C. P., Parker A. P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings // Engineering Fracture Mechanics. – 1984. – Vol. 19 (1). – P. 187–193. – DOI: 10.1016/0013-7944(84)90078-X.

2. Shannon R. W. E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 1974. – Vol. 2 (1). – P. 19–29. – DOI: 10.1016/0308-0161(74)90013-1.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / пер. с англ. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 / пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 350 с.
5. Вильдеман В. Э., Чаусов Н. Г. Условия деформационного разупрочнения материала при растяжении образца специальной конфигурации // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2007. – Т. 73, № 10. – С. 55–59.
6. Vil'deman V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2013. – Vol. 42. – P. 166–170. – DOI: 10.3103/S1052618813010159.
7. Андреева Е. А. Решение одномерных задач пластичности для разупрочняющегося материала // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2008. – № 2 (17). – С. 152–160. – DOI: 10.14498/vsgtu642.
8. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Исследования одноосного и двухосного нагружения разупрочняющихся материалов по эндохронной теории неупругости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2012. – № 1 (26). – С. 110–115. – DOI: 10.14498/vsgtu1007.
9. Wildemann V. E., Lomakin E. V. & Tretyakov M. P. Postcritical deformation of steels in plane stress state // Mech. Solids. – 2014. – Vol. 49. – P. 18–26. – DOI: 10.3103/S0025654414010038.
10. Struzhanov V. V., Chaikin A. E. Destruction of a Thin-walled Spherical Vessel by Internal Pressure // AIP Conference Proceedings. – 2020. – Vol. 2315. – 020044. – DOI: 10.1063/5.0036729.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М. : Наука, 1970. – 492 с.
12. Миронов В. И., Багазеев Ю. М. Механические свойства материала на стадии деформационного разупрочнения // Вестник ПГТУ. Механика композитов. – 1999. – № 1. – С. 78–85.
13. Стружанов В. В., Миронов В. И., Тарташник К. А. Об одном подходе к расчету долговечности при циклическом нагружении // Вестник Сам. ГТУ. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2004. – Вып. 26. – С. 94–101.
14. Стружанов В. В., Коркин А. В., Чайкин А. Е. Об одном подходе к определению предельной несущей способности механических систем с разупрочняющимися элементами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22 (4). – С. 762–773.
15. Стружанов В. В. Определение диаграммы деформирования материала с падающей ветвью по диаграмме кручения цилиндрического образца // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 138–144.