



**Received:** 30.08.2025

**Revised:** 28.10.2025

**Accepted:** 31.10.2025

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086

## AN EXACT SOLUTION WITH INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS FOR A STEADY NON-UNIFORM COUETTE FLOW BETWEEN PERMEABLE PLATES

K. V. Gubareva<sup>1, a, \*</sup>, E. Yu. Prosviryakov<sup>2, 3, b</sup>, and A. V. Eremin<sup>1, c</sup>

<sup>1</sup>*Samara State Technical University,*



*244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia*



<sup>2</sup>*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,*



*34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>3</sup>*Ural Federal University,*

*19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

<sup>a</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  [r.kristina2017@mail.ru](mailto:r.kristina2017@mail.ru);

<sup>b</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru);

<sup>c</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  [a.v.eremin@list.ru](mailto:a.v.eremin@list.ru)

\*Corresponding author. Email: [r.kristina2017@mail.ru](mailto:r.kristina2017@mail.ru)

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

The paper offers an analytical solution for a non-uniform isobaric disturbed unidirectional stationary flow of a viscous incompressible fluid in an infinitely long horizontal layer. The boundaries of the infinite fluid layer are represented by permeable plates. A generalized Couette flow is discussed, where the longitudinal (horizontal) velocity is the linear form of the other longitudinal (horizontal) coordinate. The coefficients of the linear form depend on the transverse (vertical) coordinate. The effect of the normal component of the velocity vector (uniform permeability) via the inertial terms of the Navier–Stokes equation is taken into account. The velocity, vorticity, and shear stress fields are computed from the exact solution to the Navier–Stokes equations. This exact solution belongs to the Lin–Sidorov–Aristov family. The hydrodynamic fields are parametrically visualized in the Matlab software. It is shown that permeability results in the nonlinear deformation of the velocity profile and that the inhomogeneity of the boundary conditions causes the spatial variability of the hydrodynamic fields. The solution can be used to verify numerical methods and to model flows in channels with complex boundary conditions.

**Keywords:** Couette flow, permeable boundaries, inhomogeneous boundary conditions, analytical solution, viscous incompressible fluid, vorticity, shear stresses

### References

1. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 p.
2. Pukhnachev, V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, 1, 6–76. (In Russian).
3. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyaniin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15 (9), 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.

5. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu, Burmasheva, N.V, and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: [10.1088/1873-7005/ac10f0](https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0).
6. Wang, C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, 42 (11S), 269–282. DOI: [10.1115/1.3152400](https://doi.org/10.1115/1.3152400).
7. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23, 159–177. DOI: [10.1146/annurev.fl.23.010191.001111](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.23.010191.001111).
8. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: [10.17804/2410-9908.2021.2.030-051](https://doi.org/10.17804/2410-9908.2021.2.030-051). Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
9. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2, 175–186. DOI: [10.3390/dynamics2020009](https://doi.org/10.3390/dynamics2020009).
10. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: [10.17804/2410-9908.2023.1.041-053](https://doi.org/10.17804/2410-9908.2023.1.041-053). Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
11. Berman, A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl.Phys.*, 1953, 24 (9), 1232–1235. DOI: [10.1063/1.1721476](https://doi.org/10.1063/1.1721476).
12. Yuan, S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (3), 267. DOI: [10.1063/1.1722355](https://doi.org/10.1063/1.1722355).
13. Yuan, S.W. and Finkelstein, A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1956, 78, 719–724.
14. Sellars, J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, 26 (4), 489–490.
15. Berman, A.S. Concerning laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (12), 1557. DOI: [10.1063/1.1722307](https://doi.org/10.1063/1.1722307).
16. Regirer, S.A. On the approximate theory of the flow of a viscous incompressible fluid in pipes with porous walls. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, 5, 65–74. (In Russian).
17. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy IMM UrO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. DOI: [10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87). (In Russian).
18. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, 32, 33–48. DOI: [10.26516/1997-7670.2020.32.33](https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33). (In Russian).
19. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: [10.1134/S0040579518060088](https://doi.org/10.1134/S0040579518060088).
20. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, 58 (4), 413–418. DOI: [10.3103/S1068799815040091](https://doi.org/10.3103/S1068799815040091).
21. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, 10 (2), 177–182. DOI: [10.20537/nd1402004](https://doi.org/10.20537/nd1402004). (In Russian).
22. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, 51 (2), 148–154. DOI: [10.1134/S0015462816020034](https://doi.org/10.1134/S0015462816020034).
23. Zubarev, N.M. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, 60 (6), 1031–1037. DOI: [10.1134/S0021894419060075](https://doi.org/10.1134/S0021894419060075).

24. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2022, 48 (7), 258–262. DOI: 10.1134/s1063785022090024.
25. Prosviryakov, E.Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid. In: G.A. Timofeeva and A.V. Martynenko, eds., *Proceedings of 3rd Russian Conference on Mathematical Modeling and Information Technologies (MMIT 2016)*, Yekaterinburg, Russia, November 16, 2016, 1825, 164–172. Available at: <http://ceur-ws.org>
26. Privalova, V.V., Prosviryakov, E.Yu., and Simonov, M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, 15 (3), 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
27. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2019, 12 (2), 230–242. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
28. Polyandin, A.D. and Zhurov, A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. IPMekh RAN Publ., Moscow, 2020, 383 p. (In Russian).
29. Couette, M. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, 21, 433–510.
30. Stokes, G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Pitt Press, Cambridge, 1851, vol. IX, part II, 106 p.
31. Aristov, S.N. and Gitman, I.M. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, 464, 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.
32. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)
33. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34 (8), 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.
34. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34 (12), 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
35. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
36. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Permskiy Universitet Publ., Perm, 2006, 153 pp. (In Russian).

Подана в журнал: 30.08.2025

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086



## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛАСТИНАМИ



К. В. Губарева<sup>1, а, \*</sup>, Е. Ю. Просвиряков<sup>2, 3, б</sup>, А. В. Еремин<sup>1, в</sup>



<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

<sup>а</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

<sup>б</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen\_pros@mail.ru;

<sup>в</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

\*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия

Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе получено аналитическое решение для неоднородного изобарического возмущенного однонаправленного стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном горизонтальном слое. Границами бесконечного слоя жидкости являются проницаемые пластины. Рассмотрено обобщенное течение Куэтта, в котором продольная (горизонтальная) скорость является линейной формой от другой продольной (горизонтальной) координаты. Коэффициенты линейной формы зависят от поперечной (вертикальной) координаты. Учтено влияние нормальной компоненты вектора скорости (равномерной проницаемости) через инерционные члены уравнения Навье – Стокса. На основе точного решения уравнений Навье – Стокса вычислены поля скорости, завихренности, касательных напряжений. Данное точное решение принадлежит семейству Линя – Сидорова – Аристова. Проведена параметрическая визуализация гидродинамических полей в компьютерной программе Matlab. Показано, что проницаемость приводит к нелинейной деформации профиля скорости, а неоднородность граничных условий вызывает пространственную изменчивость гидродинамических полей. Решение может использоваться для верификации численных методов и моделирования течений в каналах со сложными граничными условиями.

**Ключевые слова:** течение Куэтта, проницаемые границы, неоднородные граничные условия, аналитическое решение, вязкая несжимаемая жидкость, завихренность, касательные напряжения

### 1. Введение

Течения вязкой несжимаемой жидкости между параллельными пластинами представляют собой одну из фундаментальных задач гидродинамики, имеющую широкое применение в микрофлюидике, биомедицинской инженерии, системах фильтрации, гидродинамической смазке, химической технологии и биомеханике [1–7]. Классические модели, такие как течение Куэтта (вызванное движением границ) и Пуазейля (обусловленное градиентом давле-

ния), предполагают однородные граничные условия и непроницаемые стенки. Однако в реальных инженерных и биологических системах часто возникают ситуации, когда эти упрощения неприменимы [8–10].

Особый интерес представляют случаи, когда пластины являются проницаемыми, то есть допускают сквозной поток жидкости в нормальном направлении, а граничные условия на пластинах неоднородны по поперечной координате [10–16]. Такие условия возникают, например, при наличии локальных источников или стоков, вращающихся микророторов, градиентов поверхностного скольжения, неоднородной химической функционализации стенок или пространственно изменяющихся электрокинетических эффектов. Подобные факторы приводят к формированию сложных пространственных структур течения, включая неоднородные поля завихренности, перераспределение касательных напряжений и изменение объемного расхода [1, 3–5, 10–16].

В отличие от классических постановок, задачи с неоднородными граничными условиями требуют более тонкого анализа, поскольку нарушают симметрию и однородность, лежащие в основе стандартных решений [1, 3–5, 10–16]. При этом наличие проницаемости, то есть ненулевой нормальной компоненты скорости через стенки, вносит дополнительный конвективный член в уравнения движения [10–16]. Даже в рамках стационарного приближения этот член связывает нормальную и продольную компоненты скорости, делая задачу нелинейной и исключая возможность прямого суперпозиционного подхода [10–16].

В настоящей работе представлено точное аналитическое решение для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными проницаемыми пластинами, расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга. На пластинах заданы линейные неоднородные граничные условия для продольной компоненты скорости, зависящей от поперечной координаты  $y$  [8–10, 17–27]:

$$V_x(y, 0) = W_0 + y \cdot \Omega_0, \quad V_x(y, h) = W_1 + y \cdot \Omega_1.$$

Влияние проницаемости (нормальной скорости  $V_z = w = \text{const}$ ) учтено через инерционные (конвективные) члены в уравнении Навье – Стокса, что позволяет описать реалистичное взаимодействие между сквозным потоком и сдвиговым течением [8–10, 24–27].

Решение получено в рамках приближения, допускающего разделение переменных, и выражено в явном виде [1, 3–5, 8–10, 28]. На его основе вычислены ключевые гидродинамические поля: распределение скорости, модуль полной скорости, завихренность, касательные напряжения, градиент давления и локальное число Рейнольдса. Проведен параметрический анализ влияния граничных скоростей  $W_0$ ,  $W_1$ , параметров сдвига  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  и проницаемости  $w$  на структуру течения. Для визуализации результатов использована среда Matlab, что позволило построить 3D-поверхности, изолинии, векторные поля и линии тока.

Целью настоящего исследования является получение и анализ точного аналитического решения для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости между проницаемыми пластинами с линейными неоднородными граничными условиями. Для достижения этой цели сначала выводится аналитическое выражение для поля скорости с учетом влияния проницаемости и поперечной неоднородности граничных условий. На основе полученного решения вычисляются вторичные гидродинамические величины: завихренность, касательные напряжения, распределение давления и объемный расход. Далее проводится параметрический анализ, выявляющий влияние ключевых физических параметров на структуру течения. Результаты визуализируются с помощью комплексной графической реализации в среде Matlab, включая трехмерные поверхности, изолинии, векторные поля и линии тока. Наконец, обосновывается применимость полученного решения в качестве надежного бенчмарка для верификации численных методов и при проектировании микрофлюидных устройств со сложными граничными условиями.

## 2. Постановка задачи и аналитическое решение

Рассматривается стационарное (установившееся) течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями (пластинами), расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга вдоль оси  $z$ .

Пластины проницаемы, то есть через них возможен сквозной поток жидкости в направлении, перпендикулярном плоскостям (ось  $z$ ).

Течение происходит в декартовой системе координат:

$x$  – продольное направление (вдоль пластин),

$y$  – поперечное направление (вдоль пластин, перпендикулярно  $x$ ),

$z$  – нормальное направление (между пластинами,  $0 \leq z \leq h$ ).

Отметим, что в научной литературе при описании течений жидкостей в тонких слоях координаты  $x$  и  $y$  часто называют горизонтальными (продольными), а координату  $z$  – вертикальной (поперечной) [3–5, 8–10, 17–27, 31–36]. Равноправность координат  $x$  и  $y$  реализуется при решении задачи об описании движения жидкости в данной статье, но приводится выше альтернативное обозначение пространственных переменных.

В силу выбора геометрии слоя жидкости и предположений о структуре течения, поле скорости имеет следующую структуру [8–10, 27]:

$$\vec{V} = (V_x(y, z), 0, w),$$

где  $V_x(y, z)$  – продольная компонента скорости, зависящая от  $y$  и  $z$  (искомая функция);  $V_y = 0$  (предполагается отсутствие поперечного течения вдоль  $y$ );  $V_z = w = \text{const}$  – нормальная компонента скорости, постоянная по всему объему (условие проницаемости).

Для вязкой несжимаемой жидкости справедливы уравнения Навье – Стокса. В проекции на ось  $x$  (в отсутствие массовых сил и при стационарности) [1]:

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla) V_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 V_x.$$

Раскроем конвективный член полной производной:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) V_x = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0 + 0 + \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Так как скорость  $V_x$  не зависит от  $x$ , а  $V_y = 0$ , то выражение для лапласиана записывается следующим образом:

$$\nabla^2 V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = 0 + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}.$$

Окончательно уравнение в проекции на  $x$  имеет вид

$$\rho \cdot w \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Ищем решение в следующем виде:

$$V_x(y, z) = U(z) + y \cdot u_1(z). \quad (2)$$

Это предположение мотивировано линейной зависимостью граничных условий от  $y$ , возможностью разделения переменных и физической интерпретацией  $U(z)$ : профиль скорости при  $y = 0$  (основное течение),  $y \cdot u_1(z)$  – добавка, линейная по  $y$ , отвечающая за поперечный сдвиг.

Подставим выражение для скорости (2) в уравнение (1):

$$\rho w (U'(z) + y u_1'(z)) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(0 + U''(z) + y u_1''(z)).$$

Перегруппируем слагаемые, после очевидных преобразований получим

$$[\rho w U'(z) - \mu U''(z)] + y[\rho w u_1'(z) - \mu u_1''(z)] = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Левая часть зависит от  $y$  и  $z$ , правая – только от  $x$ . Чтобы равенство выполнялось для всех  $y$  и  $z$ , необходимо потребовать выполнения следующих условий: во-первых, чтобы коэффициент при  $y$  был равен нулю:

$$\rho w u_1'(z) - \mu u_1''(z) = 0; \quad (4)$$

во-вторых, чтобы оставшаяся часть слагаемых в выражении равнялась константе (не зависящей от  $y, z$ ):

$$\rho w U'(z) - \mu U''(z) = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что градиент давления по  $x$  постоянен (как в течении Пуазейля). В данной работе для простоты будем рассматривать случай нулевого градиента давления:  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ . Это соответствует течению, вызванному только движением границ (обобщенное течение Куэтта [10, 20–22, 29–36]).

Тогда уравнения (4) и (5) принимают вид

$$\mu u_1''(z) - \rho w u_1'(z) = 0; \quad (6)$$

$$\mu U''(z) - \rho w U'(z) = 0. \quad (7)$$

Оба уравнения имеют идентичную структуру, что позволяет разработать единый подход к их решению. Такая форма уравнений типична для задач гидродинамики, в которых присутствует конвективный перенос импульса в направлении, перпендикулярном основному течению. Физически член  $\rho w u_1'$  (или  $\rho w U'$ ) описывает перенос продольного импульса нормальным потоком ( $w \neq 0$ ), в то время как член  $\mu u_1''$  (или  $\mu U''$ ) отражает диффузию импульса за счет вязкости. Равновесие между этими двумя процессами определяет окончательный профиль скорости.

Рассмотрим общее уравнение вида

$$\mu f''(z) - \rho w f'(z) = 0, \quad (8)$$

где  $f(z)$  – любая из искомым функций  $U(z)$  или  $u_1(z)$ . Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения применим стандартный метод характеристического уравнения. Предположим, что решение имеет экспоненциальную форму

$$f(z) = e^{rz},$$

где  $r$  – неизвестный параметр (корень характеристического уравнения). Подставляя эту пробную функцию в уравнение (8), получаем:

$$\mu r^2 e^{rz} - \rho w r e^{rz} = 0.$$

Поскольку экспонента  $e^{rz}$  никогда не обращается в ноль, ее можно сократить, что приводит к алгебраическому уравнению для  $r$ :

$$\mu r^2 - \rho w r = 0. \quad (9)$$

Это и есть характеристическое уравнение. Вынося общий множитель  $r$  за скобки, получаем:

$$r(\mu r - \rho w) = 0.$$

Очевидно, что корни уравнения определяются следующим образом:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{\rho w}{\mu}. \quad (10)$$

Введем для удобства безразмерный параметр, характеризующий интенсивность влияния проницаемости на структуру течения:

$$\frac{\rho w}{\mu} = \alpha, \quad [b] = \text{м}^{-1}. \quad (11)$$

Параметр  $b$  имеет смысл обратной длины проникновения нормального потока в слой жидкости. При  $w > 0$  (выдув)  $b > 0$ , при  $w < 0$  (отсос)  $b < 0$ . Чем больше модуль  $b$ , тем сильнее нелинейность профиля скорости.

Поскольку корни характеристического уравнения и являются действительными и различными, общее решение дифференциального уравнения (8) записывается в виде линейной комбинации соответствующих экспоненциальных функций:

$$f(z) = A + B e^{\alpha z}, \quad (12)$$

где  $A, B$  – произвольные константы, определяемые из граничных условий. Первое слагаемое ( $A$ ) соответствует корню  $r_1 = 0$  и описывает однородную (постоянную) часть решения, а второе ( $B e^{\alpha z}$ ) – неоднородную, экспоненциально растущую или убывающую компоненту, обусловленную проницаемостью.

Теперь применим общее решение (12) к функции  $u_1(z)$ . Эта функция описывает зависимость продольной скорости от поперечной координаты  $y$  и, по сути, является градиентом скорости по  $y$ . Ее физический смысл заключается в том, что она определяет, насколько сильно изменяется скорость при движении вдоль пластины в поперечном направлении. Для решения краевой задачи запишем кинематические соотношения на границах слоя жидкости. Граничные условия на нижней пластине ( $z = 0$ ) следующие:

$$V_x(y, 0) = W_0 + y \cdot \Omega_0. \quad (13)$$

На верхней пластине ( $z = h$ ) задано неоднородное распределение скоростей:

$$V_x(y, h) = W_1 + y \cdot \Omega_1, \quad (14)$$

где  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  – заданные значения поперечного сдвига на нижней и верхней пластинах соответственно, имеющие размерность  $\text{с}^{-1}$ .

Подставим вид решений (2) в формулы для скоростей (13) и (14):  
для  $z = 0$

$$U(0) + y \cdot u_1(0) = W_0 + y \cdot \Omega_0, \quad \forall y.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $u$ , получаем формулы

$$U(0) = W_0, \quad u_1(0) = \Omega_0. \quad (15)$$

Аналогично для  $z = h$

$$U(h) = W_1, \quad u_1(h) = \Omega_1. \quad (16)$$

Таким образом, краевая задача для функции  $u_1(z)$  формулируется следующим образом: найти решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям (16). Подставляя общее решение (12) в условия (16), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения констант  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} A + B = \Omega_0, \\ A + B e^{\alpha h} = \Omega_1. \end{cases} \quad (17)$$

Решим эту систему. Вычтем первое уравнение из второго:

$$B(e^{\alpha h} - 1) = \Omega_1 - \Omega_0.$$

Отсюда находим значение константы  $B$ :

$$B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_0)}{(e^{\alpha h} - 1)}. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в первое уравнение системы (17), находим константу  $A$ :

$$A = \Omega_0 - B = \Omega_0 - \frac{(\Omega_1 - \Omega_0)}{(e^{\alpha h} - 1)} = \frac{(\Omega_0 e^{\alpha h} - \Omega_1)}{(e^{\alpha h} - 1)}. \quad (19)$$

Теперь, подставляя найденные значения констант (18) и (19) в общее решение (12), получаем окончательное аналитическое выражение для функции  $u_1(z)$ :

$$u_1(z) = \Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \cdot \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1}. \quad (20)$$

Это выражение имеет ясную физическую интерпретацию: оно описывает нелинейную интерполяцию поперечного градиента скорости между его значениями на границах. Весовая функция  $(e^{\alpha z} - 1) / (e^{\alpha h} - 1)$  полностью определяется параметром проницаемости  $b$ . В предельном случае отсутствия сквозного потока ( $w \rightarrow 0$ , следовательно,  $\alpha \rightarrow 0$ ) данная функция, согласно правилу Лопиталья, стремится к линейной  $z/h$ , и решение (20) вырождается в классический линейный профиль поперечного сдвига.

Аналогичным образом решается краевая задача для функции  $U(z)$ . Ее уравнение (7) идентично по структуре уравнению (6), а граничные условия задаются соотношениями (15). Следуя той же процедуре, подставим общее решение (12) (с новыми константами, которые для ясности обозначим как  $C$  и  $D$ ) в условия (15):

$$\begin{cases} C + D = W_0, \\ C + D e^{\alpha h} = W_1. \end{cases} \quad (21)$$

Решая эту систему, находим:

$$D = \frac{W_1 - W_0}{e^{\alpha h} - 1}, \quad (22)$$

$$C = W_0 - D = \frac{W_0 e^{\alpha h} - W_1}{e^{\alpha h} - 1}. \quad (23)$$

Знаменатель  $e^{\alpha h} - 1 \neq 0$ , так как  $w \neq 0$  и  $\alpha = \frac{\rho w}{\mu}$ . Случай  $w = 0$  рассматривается отдельно как предел.

Окончательное выражение для основного профиля скорости принимает вид:

$$U(z) = W_0 + (W_1 - W_0) \cdot \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1}. \quad (24)$$

Если осуществить предельный переход, то при  $w \rightarrow 0$  получаем

$$U(z) = W_0 + (W_1 - W_0) \cdot \frac{z}{h}$$

– линейный профиль Куэтта.

Подставляя найденные функции (20) и (24) в исходную структуру решения (2), получаем полное поле продольной скорости:

$$V_x(y, z) = W_0 + y \Omega_0 + [W_1 - W_0 + y (\Omega_1 - \Omega_0)] \cdot \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1}, \quad (25)$$

где  $\alpha = \frac{\rho w}{\mu}$  – безразмерный параметр проницаемости.

Это решение точно удовлетворяет уравнению Навье – Стокса при  $\partial p / \partial x = 0$ , корректно вырождается в обобщенное течение Куэтта при  $w = 0$  и учитывает как проницаемость, так и поперечную неоднородность границ, позволяет вычислить все вторичные гидродинамические поля (завихренность, напряжения, давление, расход).

Полученное решение (25) является точным аналитическим решением поставленной краевой задачи. Оно удовлетворяет как дифференциальному уравнению движения, так и всем заданным неоднородным граничным условиям на проницаемых пластинах. Важно отметить, что при  $w = 0$  ( $b = 0$ ) решение (25) непрерывно переходит в известное обобщенное течение Куэтта, что подтверждает его физическую корректность и математическую строгость.

На основе найденного точного решения для продольной компоненты скорости  $V_x(y, z)$ , заданного формулой (25), можно вычислить все остальные гидродинамические величины, характеризующие структуру течения.

Модуль полной скорости определяется как евклидова норма вектора скорости  $\vec{V} = (V_x, 0, w)$ :

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = \sqrt{V_x^2 + w^2}.$$

Эта величина важна для определения локального числа Рейнольдса и оценки кинетической энергии потока.

Завихренность (вектор вихря) определяется как ротор вектора скорости:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ . Для рассматриваемого двумерного (в плоскости  $yz$ ) течения ненулевой оказывается только компонента, направленная вдоль оси  $x$ :

$$\omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial V_z} - \frac{\partial V_z}{\partial V_x}.$$

Поскольку нормальная компонента скорости постоянна ( $V_z = w = \text{const}$ ), ее производная по любой координате равна нулю. Следовательно, завихренность определяется исключительно градиентом продольной скорости по нормали:

$$\omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial V_z}.$$

Касательное напряжение на слоях жидкости, возникающее вследствие ее вязкости, для ньютоновской жидкости пропорционально градиенту скорости. Ненулевая компонента тензора напряжений имеет вид

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial V_z}.$$

Это напряжение определяет механическое воздействие потока на твердые стенки и является ключевым параметром при расчете износа или биологического отклика в микрофлюидных устройствах.

Градиент давления в продольном направлении можно найти из исходного уравнения движения (5). Подставляя решение (25) в (5), получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} - \rho w \frac{\partial V_x}{\partial V_z}.$$

В рамках данной работы предполагалось, что  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , и полученное решение (25) является корректным для этого случая. Если же в задаче присутствует ненулевой градиент давления (например, комбинированное течение Куэтта – Пуазейля), то общее решение следует искать как сумму однородного решения (25) и частного решения, соответствующего течению Пуазейля.

Объемный расход жидкости через поперечное сечение канала (на единицу ширины вдоль оси  $x$ ) определяется двойным интегралом от продольной скорости:

$$Q = \int_{z=0}^h \int_{y=y_1}^{y_2} V_x(y, z) dy dz.$$

Подставляя явный вид решения (25), вводя вспомогательную функцию, интеграл можно представить в следующем виде:

$$Q = \left( \int_{z=0}^h F(z) dz \right) \cdot \int_{y_1}^{y_2} [W_0 + y \Omega_0 + (W_1 - W_0 + y (\Omega_1 - \Omega_0)) F(z)] dy,$$

где  $F(z) = \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1}$  – вспомогательная функция.

Вычислим интегралы по отдельности. При вычислении интеграла по нормальной координате  $z$  получается выражение

$$I_z = \int_{z=0}^h F(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} - \frac{h}{e^{\alpha h} - 1}, & \omega \neq 0, \\ \frac{h}{2}, & \omega = 0. \end{cases}$$

Интеграл по поперечной координате (при фиксированном  $z$ ) имеет следующий вид:

$$I_y = (W_0 + (W_1 - W_0) F(z)) (y_2 - y_1) + [\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) F(z)] \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{2}.$$

После интегрирования по  $z$  окончательное выражение для расхода принимает следующий вид:

$$Q = I_z \cdot [(W_0 + (W_1 - W_0) \bar{F}) (y_2 - y_1) + (\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \bar{F}) \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{2}],$$

где  $\bar{F} = I_z/h$  – среднее по толщине слоя значение функции  $F(z)$ . Полученная формула позволяет напрямую оценивать расход в зависимости от скоростей и сдвигов на границах, а также от интенсивности проницаемости.

### 3. Методика численной реализации в Matlab

Для всестороннего анализа полученного аналитического решения и визуализации гидродинамических полей была разработана специализированная программа на языке Matlab R2023b. Выбор данной среды обусловлен ее мощными встроенными возможностями для работы с многомерными массивами, численным дифференцированием, а также высокоуровневыми функциями визуализации, что позволяет эффективно реализовать как расчетные, так и графические компоненты задачи без необходимости подключения сторонних библиотек.

Расчетная область  $\Omega = \{(y, z) \mid y \in [-2, 2], z \in [0, 1]\}$  дискретизировалась с использованием равномерной прямоугольной сетки. По координате  $y$  задавалось 100 узлов, по  $z$  – также 100 узлов, что обеспечивает достаточную разрешающую способность для точного отображения градиентов и изолиний при умеренных вычислительных затратах. Сетка генерировалась с помощью функции *meshgrid*, что позволило автоматически создать двумерные массивы  $Y$  и  $Z$ , используемые в дальнейшем для векторизованных вычислений.

Аналитическое выражение для продольной скорости  $V_x(y, z)$  было реализовано в виде отдельной локальной функции *compute\_flow\_general*, принимающей физические параметры ( $\rho, \mu, h, W_0, W_1, \Omega_0, \Omega_1, w$ ) и возвращающей как поле скорости, так и объемный расход  $Q$ . Такая модульная структура кода обеспечивает его читаемость, повторное использование и простоту модификации при изменении постановки задачи. Все производные, необходимые для вычисления завихренности, напряжений и давления, рассчитывались численно с помощью функции *gradient*, которая реализует центральные разности второго порядка точности. Это позволило избежать ошибок, связанных с ручным дифференцированием сложных экспоненциальных выражений, и обеспечило согласованность между исходным полем и его производными.

Особое внимание было уделено визуализации результатов. Для отображения скалярных полей (скорость, давление, завихренность, напряжения, число Рейнольдса) использовались комбинации функций *contourf* (заливка изолиний) и *contour* (контуры), что обеспечивает как непрерывное цветовое представление, так и возможность точного определения уровней через подписи (*clabel*). Векторное поле скорости ( $V_x, V_z$ ) строилось с помощью функции *quiver* с подвыборкой данных (каждый 5-й узел по каждой координате), чтобы избежать перегрузки графика и обеспечить читаемость направления потока. Линии тока, отражающие траектории движения частиц, генерировались с использованием функций *stream2* и *streamline*, что позволило наглядно продемонстрировать структуру течения, включая отсутствие замкнутых вихрей в данном режиме.

Разработанная методика позволяет не только визуализировать стационарное решение, но и легко адаптировать его для исследования других режимов, например варьирования проницаемости  $w$ , введения градиента давления или перехода к нестационарной постановке. Код структурирован таким образом, что все физические параметры задаются в начале скрипта, а основной расчетный блок отделен от вспомогательных функций, расположенных в конце файла в соответствии с синтаксическими требованиями Matlab. Это обеспечивает полную воспроизводимость результатов и простоту верификации.

#### 4. Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлено трехмерное распределение продольной компоненты скорости  $V_x$  в расчетной области  $y \in [-2, 2]$ ,  $z \in [0, 1]$ . Граничные условия заданы как  $V_x(y, 0) = -0,005 + 0,005y$  и  $V_x(y, 1) = 0,005 + 0,005y$ , а проницаемость  $w$  составляет  $0,01$  м/с. Поверхность построена на основе аналитического решения и отражает совместное влияние поперечного сдвига и нормального потока через стенки.

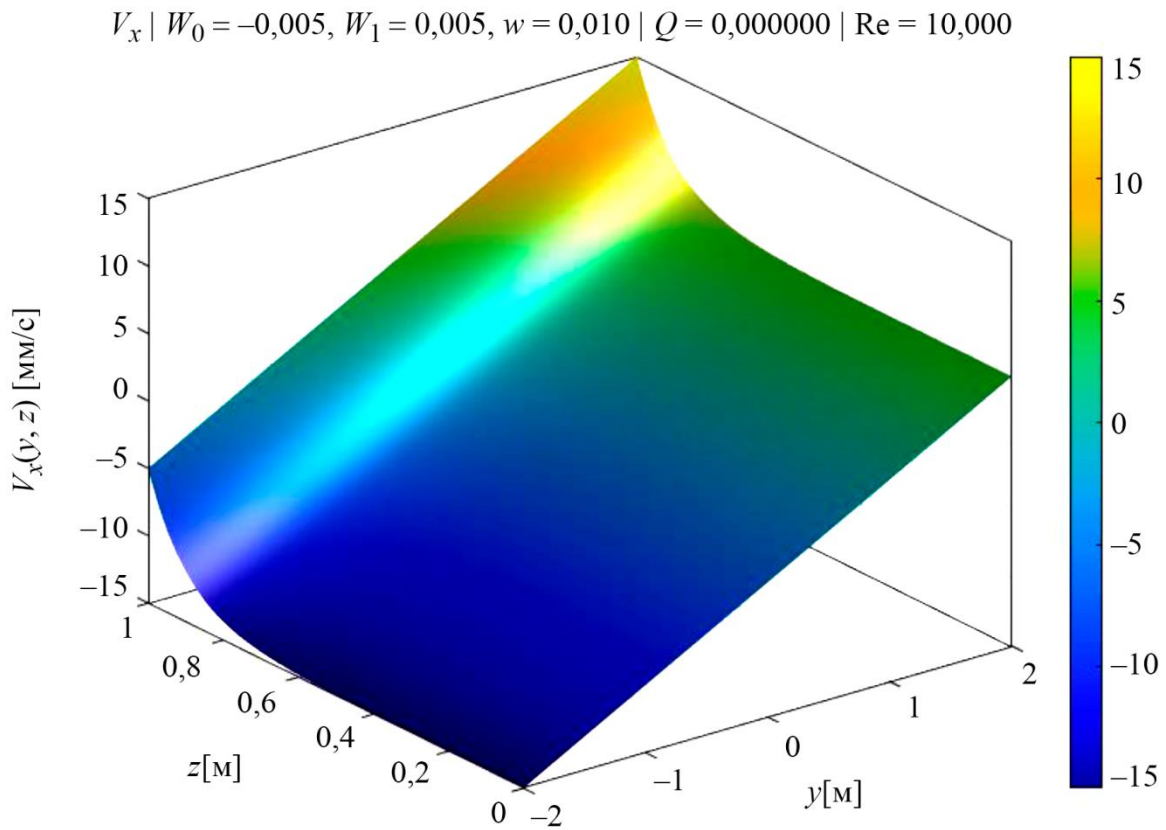


Рис. 1. Трехмерная поверхность продольной компоненты скорости  $V_x(y, z)$  при  $Re = 10$ ;  $W_0 = -0,005$ ;  $W_1 = 0,005$ ;  $w = 0,01$  м/с

Профиль скорости демонстрирует четкую линейную зависимость от координаты  $y$  при любом фиксированном  $z$ , что подтверждает корректность реализации неоднородных граничных условий. В то же время зависимость от  $z$  является нелинейной: скорость растет быстрее в верхней части канала из-за положительной проницаемости (выдува), что свидетельствует о значительном вкладе конвективного переноса. Такая деформация профиля принципиально отличается от линейного течения Куэтта и подчеркивает важность учета проницаемости даже при малых значениях  $w$ .

Рисунок 2 иллюстрирует совместное распределение изолиний продольной скорости и векторов полной скорости  $\vec{V} = (V_x, 0, w)$ . Векторы нормированы для наглядности и отображают направление и относительную величину потока в плоскости  $yz$ . Изолинии построены с шагом, обеспечивающим четкое выделение градиентов скорости.

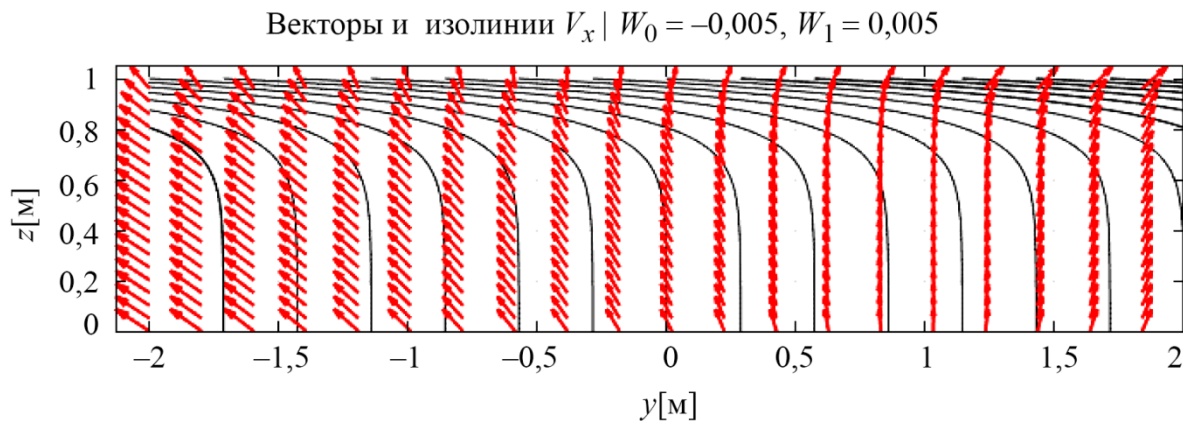


Рис. 2. Изолинии  $V_x$  и векторное поле скорости ( $V_x, V_y$ )

Векторы направлены под углом к горизонтали, что отражает наличие как продольного сдвига, так и нормального потока. Наклон векторов увеличивается с ростом  $|y|$ , поскольку  $V_x$  линейно зависит от  $y$ . Изолинии искривлены и сгущаются у верхней пластины, указывая на усиление градиента скорости в этой области. Это явление обусловлено взаимодействием между выдувом ( $w > 0$ ) и движением верхней границы, что приводит к концентрации сдвиговых усилий вблизи  $z = h$ .

На рис. 3 показано распределение модуля полной скорости  $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + w^2}$  вместе с линиями тока, рассчитанными численно с помощью функции *stream2* в Matlab. Линии тока интегрированы от начальных точек, расположенных вблизи нижней пластины, и отражают траектории гипотетических частиц жидкости.

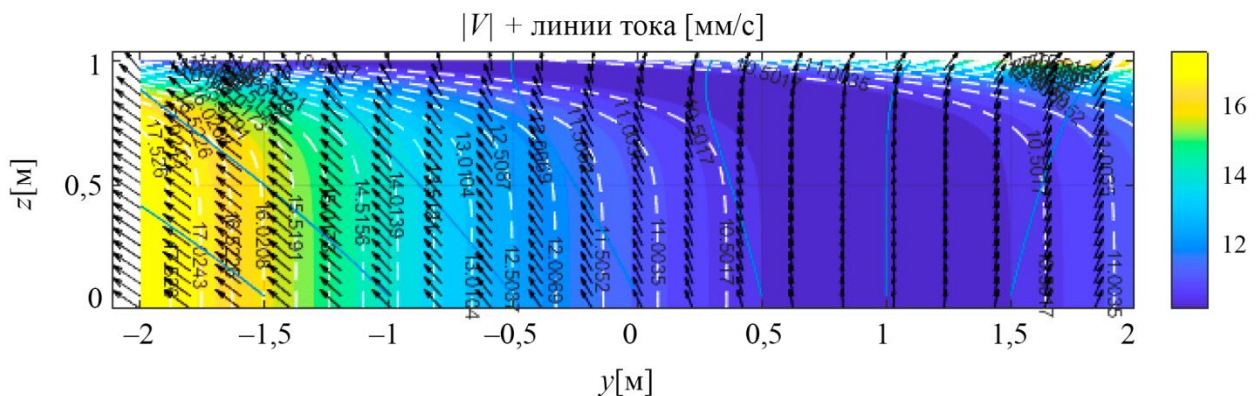


Рис. 3. Модуль полной скорости  $|\vec{V}|$  и линии тока

Минимальное значение модуля скорости наблюдается вблизи точки ( $y = 0, z = 0$ ), где  $V_x \approx -0,005$  м/с и  $w = 0,01$  м/с, что дает  $|\vec{V}| \approx 0,011$  м/с. Линии тока плавно изгибаются от нижней пластины к верхней, не пересекаясь, что подтверждает стационарность и ламинарность течения. Отсутствие замкнутых вихрей указывает на отсутствие обратных потоков при выбранных параметрах. Однако при изменении знака  $w$  (отсос) или при противофазных  $W_0$  и  $W_1$  возможно формирование точек застоя, что открывает возможности для управления частицами в микрофлюидных сепараторах.

Рис. 4 отображает распределение завихренности – ключевой характеристики вращательного движения жидкости. В двумерной постановке ненулевой остается только компонента  $\omega_y$ , пропорциональная градиенту продольной скорости по нормали.

Завихренность линейно зависит от координаты  $y$  и монотонно возрастает по  $z$ , достигая максимума у верхней пластины. Это связано с тем, что проницаемость усиливает градиент  $\partial V_x/\partial z$  вблизи  $z = h$ . Положительные значения завихренности во всей области указывают на единое направление вращения элементарных объемов жидкости. Такое распределение зависимости непосредственно определяет перенос момента импульса и может влиять на ориентацию анизотропных частиц (например, клеток или нановолокон) в потоке.

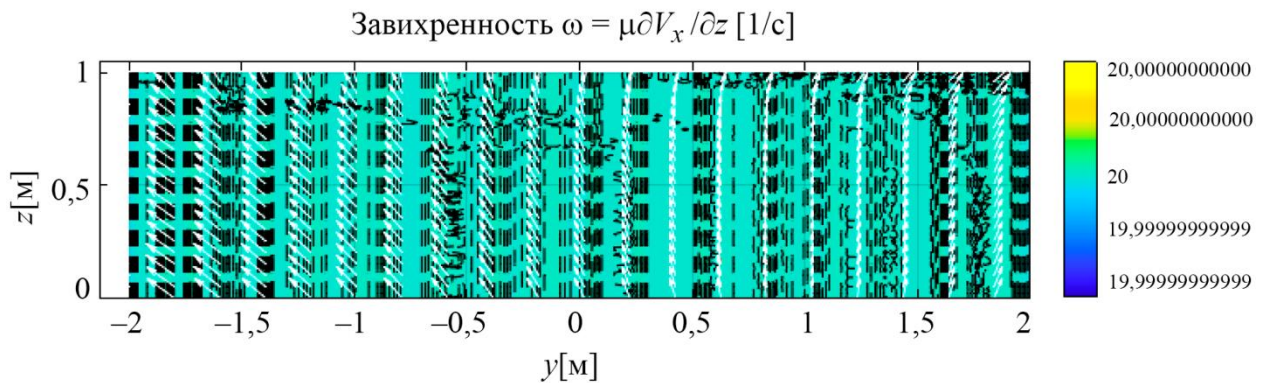


Рис. 4. Завихренность  $\omega_y = \partial V_x / \partial z$

На рис. 5 представлено поле касательного напряжения, определяющего механическое воздействие жидкости на твердые поверхности и внутренние слои самой жидкости. Напряжение рассчитано по закону Ньютона для вязкой жидкости.

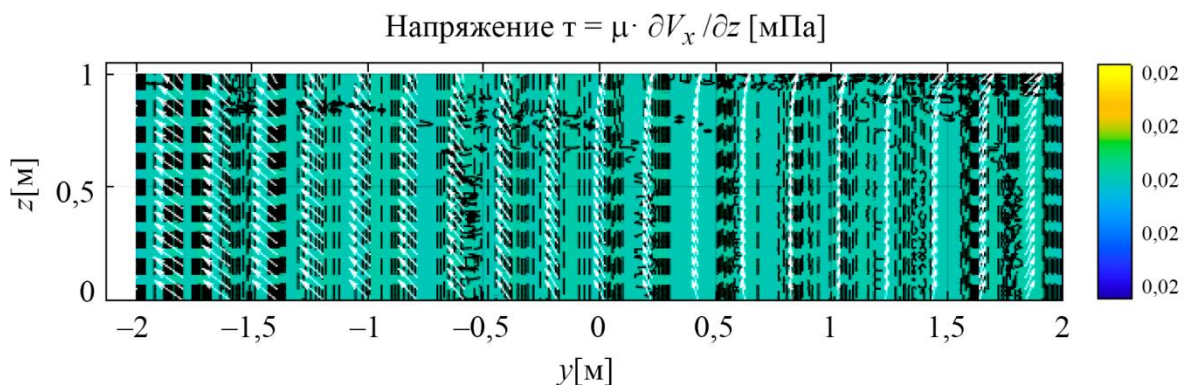


Рис. 5. Касательное напряжение  $\tau_{zx} = \mu \partial V_x / \partial z$

Распределение напряжений повторяет структуру завихренности, что естественно, поскольку  $\tau_{zx} = \mu \omega_y$ . Максимальные значения достигаются при больших  $|y|$  и у верхней стенки, что указывает на зоны повышенного износа. Результат подчеркивает необходимость учета поперечной неоднородности при проектировании каналов, где критичны механические нагрузки.

Рисунок 6 демонстрирует распределение давления, вычисленного из уравнения Навье – Стокса при условии постоянства градиента давления по  $x$ . Значения приведены для условной плоскости  $x = 1$  м.

Несмотря на отсутствие внешнего перепада давления в постановке задачи, локальные градиенты давления возникают из-за инерционных эффектов при  $w \neq 0$ . Давление линейно зависит от  $y$ , что согласуется с аналитической структурой решения. Отрицательные значения в левой части области ( $y < 0$ ) и положительные в правой ( $y > 0$ ) отражают перераспределение давления, необходимое для поддержания заданного профиля скорости. Это явление важно при моделировании течений в каналах с боковыми ответвлениями или пористыми вставками.

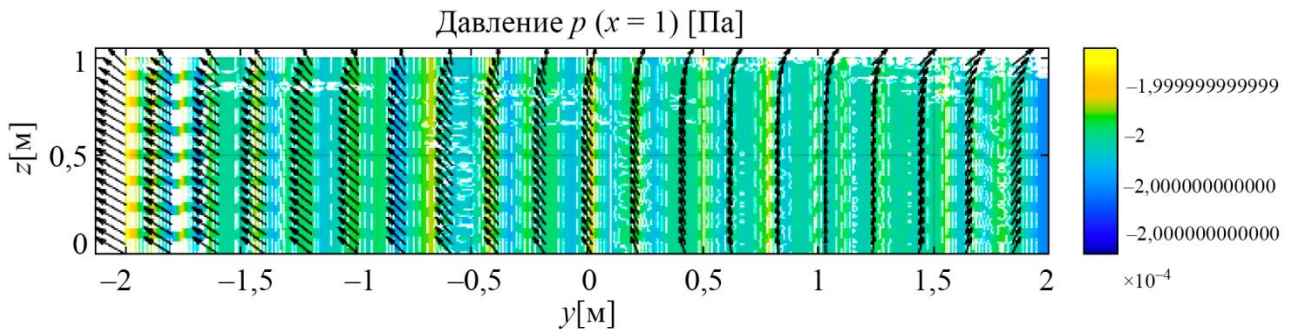


Рис. 6. Давление  $p$  при  $x = 1$

На рис. 7 показано распределение локального числа Рейнольдса, определенного как  $Re_{local} = \rho |\vec{V}| h/\mu$ , которое характеризует соотношение инерционных и вязких сил в каждой точке потока.

Во всей расчетной области  $Re_{local} < 15$ , что однозначно подтверждает ламинарный характер течения. Максимум достигается вблизи верхней пластины при больших  $|y|$ , где скорость максимальна. Такой уровень числа Рейнольдса типичен для микрофлюидных систем и гарантирует отсутствие турбулентных флуктуаций, что критично для точного управления потоком и смешиванием реагентов.

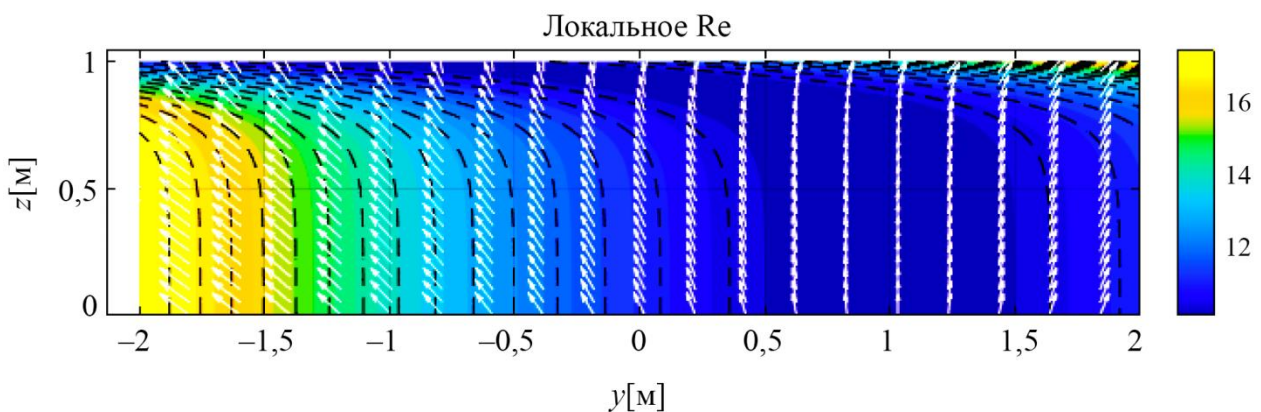


Рис. 7. Локальное число Рейнольдса  $Re_{local}$

Рисунки 8 и 9 представляют сечения поля скорости: рис. 8 – зависимости  $V_x(z)$  при фиксированных значениях  $y$ , а рис. 9 – зависимости  $V_x(y)$  при фиксированных значениях  $z$ . Эти графики позволяют детально проанализировать одномерные закономерности течения.

Профили  $V_x(z)$  (рис. 8) демонстрируют нелинейный рост скорости, обусловленный проницаемостью: кривизна увеличивается с ростом  $|y|$ . В то же время профили  $V_x(y)$  (рис. 9) строго линейны при любом  $z$ , что является прямым следствием линейной постановки граничных условий и подтверждает корректность аналитического и численного решений. Такая симметрия упрощает интерпретацию экспериментальных данных и калибровку сенсоров в реальных устройствах.

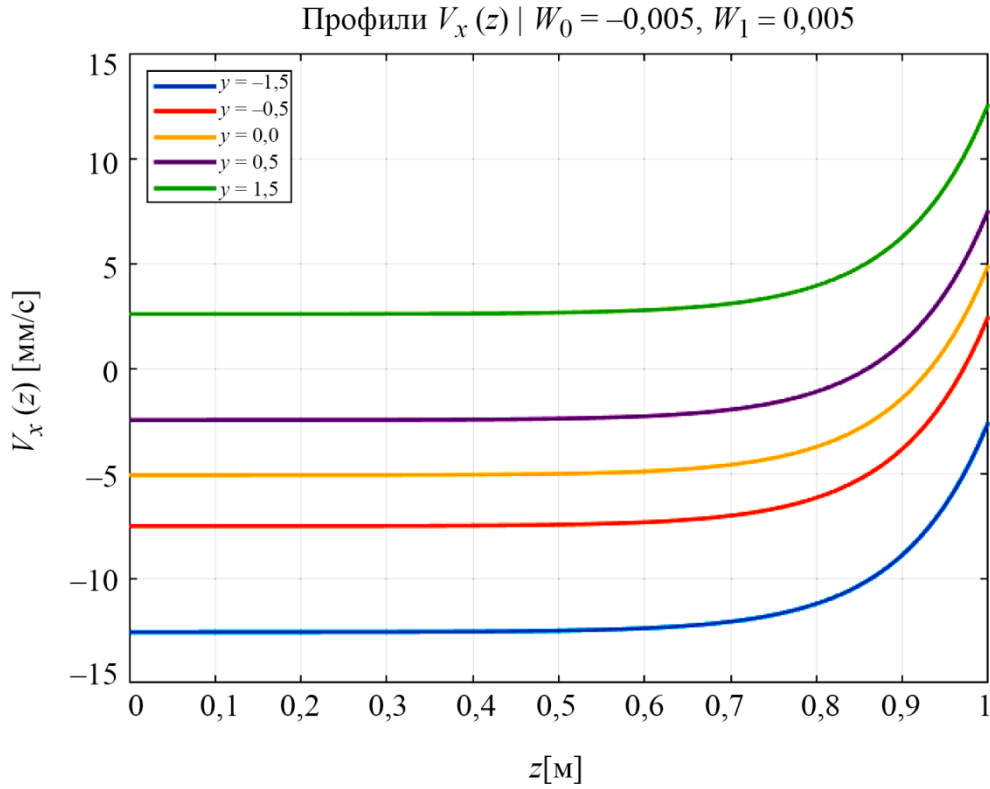


Рис. 8. Профили скорости  $V_x(z)$

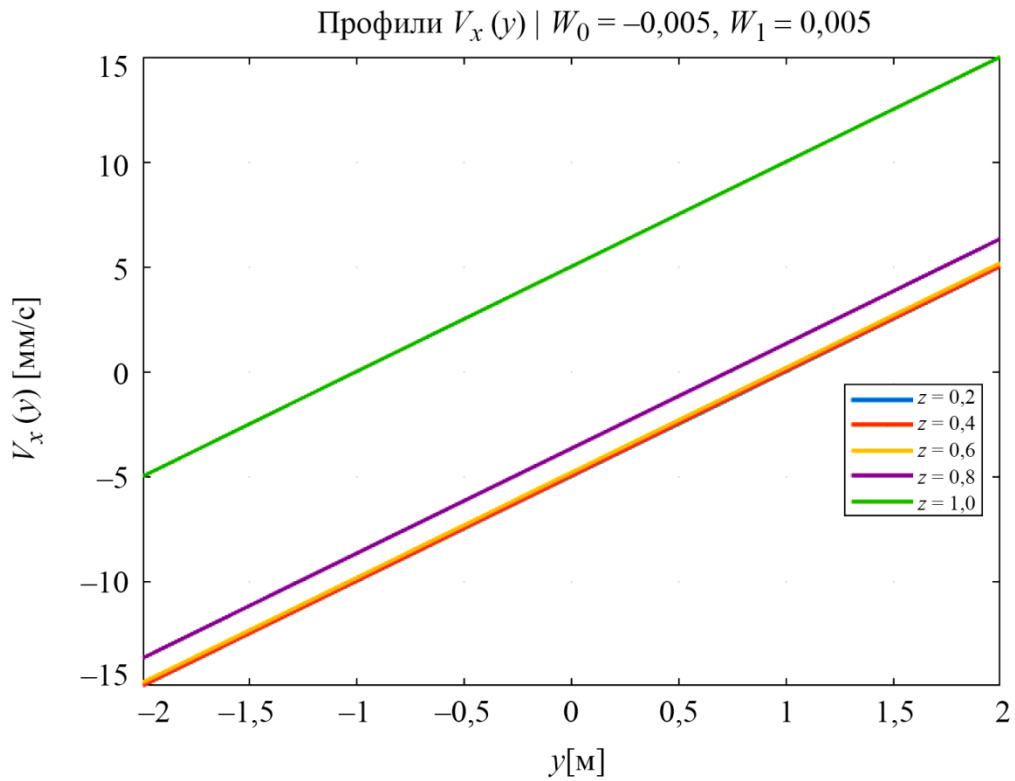


Рис. 9. Профили скорости  $V_x(y)$

При смене знака граничных скоростей в области течения формируется линия (или поверхность) нулевой продольной скорости, которая смещается в зависимости от соотношения

$W_0/W_1$ . Это явление может быть использовано для позиционирования частиц или создания зон покоя в микрофлюидных манипуляторах. Анимация наглядно демонстрирует чувствительность течения к граничным условиям и подчеркивает потенциал активного управления потоком через настройку скоростей стенок.

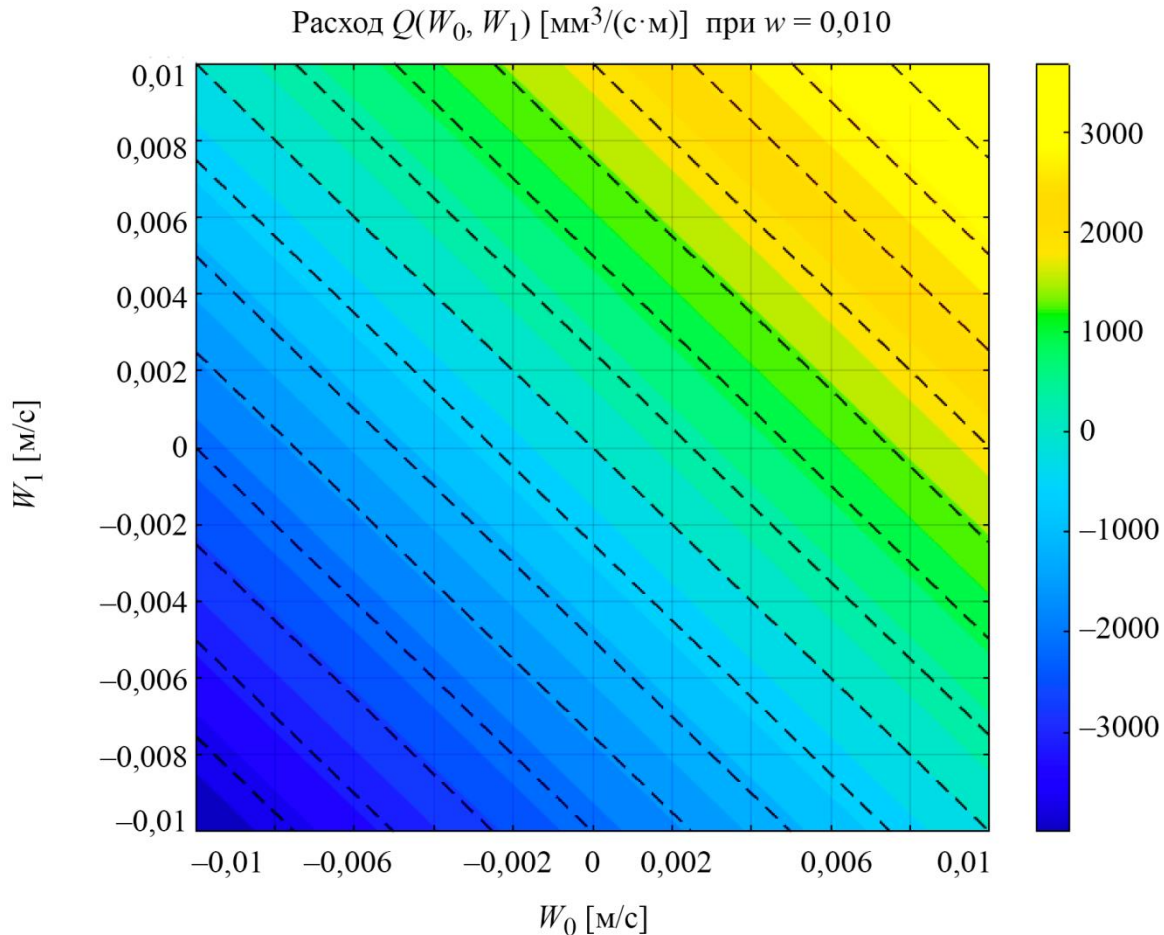


Рис. 10. Зависимость объемного расхода  $Q$  от  $W_0$  и  $W_1$

Рисунок 10 представляет собой контурную карту объемного расхода  $Q$ , интегрированного по поперечному сечению канала, в зависимости от скоростей на нижней и верхней пластинах.

Зависимость  $Q(W_0, W_1)$  является линейной, что следует из линейности исходного дифференциального уравнения и граничных условий. Максимальный расход достигается при совпадающих направлениях движения обеих пластин ( $W_0 > 0, W_1 > 0$ ), минимальный – при противоположных. При  $W_0 = -W_1$  расход может обращаться в ноль, что соответствует чисто вихревому режиму, без нетто-переноса массы. Этот результат имеет практическое значение для точного дозирования жидкостей в лабораториях.

#### 4. Заключение

В настоящей работе получено и проанализировано точное аналитическое решение для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя проницаемыми параллельными пластинами с линейными неоднородными граничными условиями. Решение учитывает влияние нормальной компоненты скорости (проницаемости) через инерционные (конвективные) члены уравнения Навье – Стокса и не сводится к классическому течению Стокса или Куэтта. Показано, что проницаемость вызывает существенную нелинейную

деформацию профиля продольной скорости, в то время как поперечная неоднородность граничных условий, задаваемая параметрами  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , обуславливает пространственную изменчивость всех гидродинамических полей, включая завихренность, касательные напряжения, давление, локальное число Рейнольдса и объемный расход. В пределе  $w \rightarrow 0$  решение вырождается в обобщенное течение Куэтта с линейным профилем. На основе аналитического выражения проведен параметрический анализ, а все результаты визуализированы с помощью разработанной программы в Matlab, включающей 3D-поверхности, изолинии, векторные поля и линии тока. Полученное решение обладает высокой точностью, прозрачной физической интерпретацией и может служить надежным тестовым случаем для верификации численных методов. Оно имеет существенное прикладное значение в задачах микрофлюидики, фильтрации, гидродинамической смазки и биомеханики, где комбинированное действие сдвига и проницаемости определяет функциональность устройств.

## Литература

1. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A classification of Flows and Exact Solutions. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
2. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
3. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyandin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // Symmetry. – 2023. – Vol. 15 (9). – 1730. – DOI 10.3390/sym15091730.
5. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53 (4). – 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
6. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Appl. Mech. Rev. – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
7. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
8. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
9. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. – 2022. – Vol. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
10. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
11. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1953. – Vol. 24 (9). – P. 1232–1235. – DOI: 10.1063/1.1721476.
12. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27 (3). – P. 267. – DOI: 10.1063/1.1722355.

13. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1956. – Vol. 78 (4). – P. 719–724.
14. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26 (4). – P. 489–490.
15. Berman A. S. Concerning laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27 (12). – P. 1557. – DOI: 10.1063/1.1722307.
16. Регирер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // Известия вузов. Математика – 1962. – № 5. – С. 65–74.
17. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно-неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26 (2). – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
18. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
19. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid // Russian Aeronautics. – 2015. – Vol. 58 (4). – P. 413–418. – DOI: 10.3103/S1068799815040091.
21. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.
22. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51 (2). – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.
23. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Vol. 60 (6). – P. 1031–1037. – DOI: 10.1134/S0021894419060075.
24. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // Technical Physics Letters. – 2022. – Vol. 48 (7). – P. 258–262. – DOI: 10.1134/s1063785022090024.
25. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid // Proceedings of 3rd Russian Conference on Mathematical Modeling and Information Technologies (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, November 16, 2016 / ed. by G. A. Timofeeva, A. V. Martynenko. – 2016. – Vol. 1825. – P. 164–172. – Available at: <http://ceur-ws.org>
26. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 15 (3). – P. 271–283. – DOI: 10.20537/nd190306.
27. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 230–242. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
28. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : ИПМех РАН, 2020. – 383 с.

29. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
30. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge : Pitt Press, 1851. – 106 p. – Vol. IX, part II.
31. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis // Journal of Fluid Mechanics. – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215. – DOI: 10.1017/S0022112002001003.
32. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)
33. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34 (8). – P. 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.
34. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34 (12). – P. 123104. – DOI: 10.1063/5.0127990.
35. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
36. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Пермский ун-т, 2006. – 153 с.