





Received: 14.07.2022
Revised: 05.09.2022
Accepted: 30.09.2022
DOI: 10.17804/2410-9908.2022.5.015-022

HIGH-FREQUENCY ELECTRODYNAMICS AND MECHANICS OF ANISOTROPIC MEDIA

A. V. Druzhinin

*M. N. Mikheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation*
B. N. Yeltsin Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation

 <https://orcid.org/0000-0001-9944-096X>  druzhinin@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: druzhinin@imp.uran.ru
Address for correspondence: ul. S. Kovalevskoy, 18, Ekaterinburg, 620108, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 378 38 72

The paper presents a new mathematical approach generally relating anisotropic electrodynamic characteristics to optical constants. A mathematical language is a hypercomplex algebra describing a spinor space. The problem of the Faraday magneto-optic effect – circular birefringence and dichroism – is solved within the framework of this formalism. The issue of using this formalism in problems of solid mechanics is discussed.

Keywords: electrodynamic characteristics, optical constants, magneto-optics, anisotropy, nondestructive testing.

Acknowledgments

The research was performed under the state assignment from the Russian Ministry of Education and Science, theme Function, No. AAAA-A19-119012990095-0. It was partially financially supported by the RFBR, grant No. 20-02-00541.

References

1. Ketkovich A.A., Stokov V.A. et al, V.V. Klyuev, ed. *Pribory dlya nerazruchayushchego kontrolya materialov i izdeliy*, kn. 1 [Instruments for Nondestructive Testing of Materials and Products: handbook, book 1]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, pp. 48–115. (In Russian).
2. Vladimirov A.P. *Dinamicheskaya spekl-interferometriya deformiruyemykh tel*. [Dynamic Speckle Interferometry of Bodies under Deformation]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2004, 241 p. (In Russian).
3. Vladimirov A.P., Kamantsev I.S., Drukarenko N.A., Trishin V. N., Akashev L. A. & Druzhinin A. V. Assessing Fatigue Damage in Organic Glass Using Optical Methods. *Opt. Spectrosc.*, 2019, 127, pp. 943–953. DOI: 10.1134/S0030400X19110286.
4. Akhmanov S.A., Nikitin S.Yu. *Physical Optics*. Moscow, MGU Publ., 2004, 656 p. (In Russian).
5. Gorshkov M.M. *Ellipsometry*. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974, 200 p. (In Russian).
6. Fedorov F.I. *Optika anizotropnykh sred* [Optics of Anisotropic Media]. Minsk, Izd. Akad. Nauk BSSR, 1958.
7. Knyazev Yu.V., Maevskii V.M. Anisotropy of optical absorption in an yttrium single crystal. *Optics and Spectroscopy*, 1984, vol. 57, iss. 2, pp.153–157.
8. Druzhinin A.V., Lobov I.D., Maevsky V.M. Observation of the odd effect of light intensity variation as the light passes through an equatorially magnetized ferromagnetic film. *Pisma v ZhTF*, 1981, vol. 7, No. 18, pp. 1100–1102. (In Russian).



9. Druzhinin A.V., Vladimirov A.P. Tsvetkova E.V. Theoretical bases of magneto-optical refractometry for transparent media. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 83–89. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.083-089. URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_6_2018_Druzhinin_A.V._et_al._083_089.pdf
10. Gerrard A., Burch J.M. *Vvedenie v matrichnuyu optiku* [Introduction to matrix methods in optics, Rus. transl.]. Moscow, Mir Publ., 1978, 343 p. (In Russian).
11. Rumer Yu.B. *Spinornyy analiz* [Spinor analysis]. Leningrad, ONTI NKTP SSSR, 1936, 105 p.
12. Druzhinin A.V., Druzhinina T.V. Electrodynamic criterion of solid stability. *Vestnik UGTU–UPI*, 2006, No. 11 (82), pp. 63–65.
13. Kantor I.L. and Solodovnikov A.S. *Giperkompleksnye chisla* [Hypercomplex Numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1973.
14. Pontryagin L.S. *Obobshcheniya chisel* [Generalization of numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1986.

Подана в журнал: 14.07.2022
УДК 537.8:535.012.2:620.179.1
DOI: 10.17804/2410-9908.2022.5.015-022

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

А. В. Дружинин

*Уральское отделение Российской Академии Наук, Институт физики металлов,
д. 18, ул. С. Ковалевской, Екатеринбург, Российская Федерация
Уральский Федеральный Университет, пр. Мира, д. 19, Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0001-9944-096X>  druzhinin@imp.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: druzhinin@imp.uran.ru
Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, д. 18, г. Екатеринбург, 620108, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 378–38–72

Статья посвящена изложению нового математического подхода, устанавливающего связь общего вида между анизотропными электродинамическими характеристиками и оптическими константами. Математический язык – гиперкомплексная алгебра, которая описывает спинорное пространство. В рамках этого формализма решена задача магнитооптического эффекта Фарадея – циркулярного двупреломления и дихроизма. Обсуждается вопрос об использовании данного формализма в задачах механики деформируемого твердого тела [1].

Ключевые слова: электродинамические характеристики, оптические константы, магнитооптика, анизотропия, неразрушающий контроль.

1. Введение

В двадцатом веке с появлением квантовой механики бурным развитием материаловедения, созданием искусственных материалов и новых источников электромагнитного излучения (лазеры и синхротронное излучение) оптика стала одной из самых широких областей науки и техники.

В настоящее время появилось большое количество оптических научных методик, технологий и методов контроля. Развитие этих областей напрямую связано с созданием и аттестацией новых материалов с требуемыми оптическими характеристиками. Возможности природных кристаллов и их искусственных копий практически исчерпаны. Поиск новых материалов происходит на технологическом уровне методом перебора атомных составов, их концентраций, способов и режимов синтеза. Это чрезвычайно объемная и сложная работа по поиску наилучших служебных оптических характеристик. Плохой уровень прогнозируемости результата в таком поиске вызван отсутствием адекватного математического решения, связывающего многокомпонентный комплексный показатель преломления с электродинамическими характеристиками искомой среды.

Созданы абсолютно новые оптические среды – метаматериалы. Это композитные среды, обладающие отрицательным показателем преломления в ограниченной области частот. Принципиально предсказанные около восьмидесяти лет назад Л. И. Мандельштамом они до сих пор не нашли достойного математического описания с позиций электродинамики.

Метод фотоупругости, история которого насчитывает более двух веков, до сих пор активно используется для визуализации и изучения топологии деформаций в прозрачных моделях в условиях механических нагрузок. В настоящее время этот метод расширен до трехмерного напряженного состояния. Динамический вариант такой методики незаменим при изучении разрушения материалов при многоцикловой нагрузке. Математический аппа-

рат для вычисления изменений механических характеристик и соответствующих электромагнитных параметров был построен на базе тензора фотоупругости четвертого ранга, оптической индикатрисы и тензора диэлектрической проницаемости. В силу неадекватности оптической феноменологии анизотропных сред нельзя считать развитие поляризационно-оптического метода завершённым.

На сегодняшний день одним из наиболее перспективных для целей изучения процессов разрушения твёрдого тела является метод динамической спекл-интерферометрии [2, 3]. Этот метод может быть реализован в рентгеновской области.

В работе представлен гиперкомплексный вариант математического обобщения общеизвестной «изотропной» формулы с мультипликативной связью электродинамических характеристик и оптических констант на случай анизотропных сред.

2. История математического описания высокочастотной электродинамики

В модели макроизотропной поглощающей среды связь между ее оптическими константами (n и k) и электродинамическими характеристиками установлена в виде [4]:

$$(\varepsilon_1 - i\mu_2)(\mu_1 - i\mu_2) = (n - ik)^2, \quad (1)$$

где ε_1, μ_1 – действительные, а ε_2, μ_2 – мнимые части диэлектрической и магнитной проницаемости; n – показатель преломления; k – коэффициент экстинкции среды; i – мнимая единица. В силу одинаковости значений всех характеристик по любому направлению индексы координат (взаимно ортогональных) в формуле отсутствуют.

Попытки объединить анизотропную кристаллооптику и электродинамику твёрдого тела в рамках тензорного представления комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей привели к ликвидации последней:

$$\mu = 1. \quad (2)$$

В этом приближении из (1) следуют два решения:

$$\varepsilon_1 = n^2 - k^2; \quad \varepsilon_2 = 2nk. \quad (3)$$

Несмотря на то, что эти соотношения, получены в некорректном приближении (2), их до сих пор используют для нахождения «диэлектрической проницаемости» [5].

Известное книжное заблуждение: « $\varepsilon = 1$ в оптической области частот» родственно игнорированию закона сохранения момента импульса. Этого делать нельзя, так как свет с правой (+h) и левой (-h) циркулярной поляризацией по-разному взаимодействует с анизотропной средой, что в явном виде наблюдается в эффектах циркулярного двупреломления и дихроизма. Это же подтверждают многочисленные спин-поляризованные одноэлектронные расчеты кристаллов, где комбинированные (оптические) плотности состояний $up (+h/2)$ – $down(-h/2)$ и $down(-h/2)$ – $up (+h/2)$, соответствующие электронным переходам с переворотом проекции спина как правило не равны. Более того, выражение (1) даже для изотропной среды следует писать для обеих циркулярных поляризаций (правая и левая спираль) с различной сигнатурой мнимых частей: (+, -, +) и (-, +, -). Формально результат перемножений одинаков, но дальнейшее развитие изотропного случая в сторону понижения пространственной симметрии покажет правильность такого шага.

Наиболее последовательная работа по анизотропной оптике принадлежит Ф. И. Федорову [6], предложившему инвариантный метод расчета, который позже широко использовался в решении многих задач оптики [7] и магнитооптики [8, 9]. К сожалению, метод Федорова описывал исключительно прозрачные среды и использовал один параметр – вектор рефракции. Электродинамические характеристики среды не рассматривались.

Другой способ описания анизотропных сред – матричная оптика [10]. Для описания характеристик оптического элемента в этом подходе используются комплексные матрицы Джонса или действительные матрицы Мюллера. Эти матрицы преобразуют исходные интенсивностно-поляризационные параметры Стокса падающей световой волны. В матричной оптике электродинамика среды оптического элемента также не используется.

Традиционно для описания анизотропных физических характеристик материальной среды используют тензорный язык. Это обусловлено тем, что для пространства векторных величин причины (действие) и следствия (реакции) связаны именно тензорами. Попытки использовать этот язык в оптике имеют ограниченный успех, поскольку многокомпонентный комплексный показатель преломления не описывается тензором. Двусосные магнитные поглощающие оптические среды имеют по восемь различных компонент для диэлектрической и магнитной проницаемости, поэтому для адекватного описания электродинамики таких сред необходимо искать математический язык подобной размерности.

Установленная невозможность работы с электродинамическими характеристиками на тензорном языке требует поиска нового варианта их математического представления. В работе электромагнитная среда рассматривается как спинорное пространство [11].

Гиперкомплексная алгебра является математическим языком такого пространства, на котором записана [12] связь анизотропной электродинамики и оптики [13, 14].

Для проверки такого подхода требуется решение известной классической задачи. Эффект М. Фарадея (1845 г.) – хороший объект для проверки. Ее положительный результат полезен не только для развития физики твердого тела, но и для правильной интерпретации результатов оптических методов неразрушающего контроля.

3. Выбор математического языка

Настоящая работа базируется на результатах публикации [12]. В последней для описания анизотропной электродинамики и оптики был предложен язык восьмимерного гиперкомплексного пространства: октонионы или числа Кэли (1845). Такое пространство называют спинорным.

Октонионы являются продуктом удвоения кватернионов, которые по той же процедуре получаются из простых комплексных чисел [13]. В результате пары таких удвоенных количество мнимых единиц достигает семи:

$$q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + a_5E + a_6I + a_7J + a_8K.$$

Перемножение мнимых единиц будет давать следующие результаты:

$$i^2 = j^2 = k^2 = E^2 = I^2 = J^2 = K^2 = -1; ij = k; ik = -j; iE = I; iI = -E; ij = -K; iK = J; ji = -k; jk = i; jE = J; jI = K; jJ = E; jK = -I; ki = j; kj = -i; kE = K; kI = -J; kJ = I; kK = -E; Ei = -I; Ej = -J; Ek = -K; EI = i; EJ = j; EK = k;$$

$$Ii = E; Ij = -K; Ik = J; IE = -i; IJ = -k; IK = j; Ji = K; Jj = E; Jk = -I; JE = -j; JI = K; JK = -i; Ki = -J; Kj = I; Kk = E; KE = -k; KI = -j; KJ = I.$$

Желая сохранить мультипликативный вид связи электродинамических характеристик и оптических констант, запишем формулу (1), заменяя обычные комплексные числа на октонионы [12]:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2i - \varepsilon_3j - \varepsilon_4k - \varepsilon_5E - \varepsilon_6I - \varepsilon_7J - \varepsilon_8K) \\ & (\mu_1 - \mu_2i - \mu_3j - \mu_4k - \mu_5E - \mu_6I - \mu_7J - \mu_8K) = \\ & = (n_1 - n_2i - n_3j - n_4k - k_1E - k_2I - k_3J - k_4K)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Прежде всего, требуется объяснить смысл компонент показателя преломления: n_1 и k_1 – изотропные части показателя преломления. Остальные компоненты – поправки к ним для различных случаев анизотропии. Поправки с индексами (2, 3, 4) – определяют полярную, а (6, 7, 8) – аксиальную часть. Подобный симметричный смысл имеют компоненты диэлектрической и магнитной проницаемости. Изотропные части – (1, 5), остальные – анизотропные поправки. При таком определении макроизотропный случай, соответствующий уравнению (1), будет иметь вид:

$$(\varepsilon_1 - E \varepsilon_5)(\mu_1 - E \mu_5) = (n_1 - E k_1)^2.$$

Тогда изотропная связь между компонентами электродинамики и оптики будет описываться следующими соотношениями:

$$n_1^2 - k_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_5 \mu_5, \quad 2k_1 n_1 = \varepsilon_1 \mu_5 + \varepsilon_5 \mu_1. \quad (5)$$

При сравнении выражений (3) и (5) становится понятно, что заставило избавиться от магнитной проницаемости: задача поиска четырех электромагнитных характеристик при помощи двух оптических констант (5) – некорректна.

Решая задачу перемножения в общем (анизотропном) случае, необходимо определиться с вопросом о коммутативности при перестановке местами гиперкомплексных ε и μ . Постулируем, что перестановка этих сомножителей не изменяет результата. После процедуры покомпонентного приравнивания двух результатов перемножения получаем семь уравнений. Эти уравнения устанавливают общие связи между различными компонентами гиперкомплексных ε и μ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 \mu_4 - \varepsilon_4 \mu_3 - \mu_5 \varepsilon_6 + \mu_6 \varepsilon_5 + \mu_7 \varepsilon_8 - \mu_8 \varepsilon_7 &= 0; \\ \varepsilon_2 \mu_3 - \varepsilon_3 \mu_2 - \mu_5 \varepsilon_8 + \mu_8 \varepsilon_5 + \mu_6 \varepsilon_7 - \mu_7 \varepsilon_6 &= 0; \\ -\varepsilon_2 \mu_4 + \varepsilon_4 \mu_2 - \mu_5 \varepsilon_7 + \mu_7 \varepsilon_5 - \mu_6 \varepsilon_8 + \mu_8 \varepsilon_6 &= 0; \\ \varepsilon_6 \mu_2 + \varepsilon_7 \mu_3 + \varepsilon_8 \mu_4 - \varepsilon_2 \mu_6 - \varepsilon_3 \mu_7 - \varepsilon_4 \mu_8 &= 0; \\ \varepsilon_1 \mu_6 + \varepsilon_2 \mu_5 - \varepsilon_4 \mu_7 - \varepsilon_5 \mu_2 + \varepsilon_6 \mu_1 - \varepsilon_7 \mu_4 &= 0; \\ -\varepsilon_5 \mu_3 + \varepsilon_6 \mu_4 - \varepsilon_8 \mu_3 + \varepsilon_3 \mu_5 - \varepsilon_4 \mu_6 + \varepsilon_2 \mu_8 &= 0; \\ -\varepsilon_5 \mu_4 - \varepsilon_6 \mu_3 + \varepsilon_7 \mu_2 + \varepsilon_4 \mu_5 + \varepsilon_3 \mu_6 - \varepsilon_2 \mu_7 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений устанавливает самые общие отношения между разными компонентами ε и μ . Из шестнадцати величин ε_i и μ_j остаются независимыми только девять. Теперь можно легко найти простые решения для конкретных случаев анизотропии. Рассмотрим случай прохождения линейно поляризованного света сквозь изотропную среду, помещенную в магнитное поле, направленное вдоль луча света. Это опыт М. Фарадея. В этом эксперименте он обнаружил эффект магнитной гиротропии – вращение плоскости поляризации. Знак азимута вращения изменялся одновременно с инверсией направления магнитного поля. Этот эффект был быстро и однозначно понят как циркулярное двупреломление, т. е. различие фазовых скоростей для двух циркулярных волн. Кроме того, поворот плоскости поляризации сопровождается разным затуханием циркулярных лучей. Этот эффект назвали циркулярным дихроизмом. Он приводит к появлению эллиптичности в выходящем луче.

Действие магнитного поля приводит к появлению обычной оптической оси. Линейно поляризованный свет, направленный ортогонально магнитному полю, воспринимает направление поля как обычную оптическую ось. Этот эффект линейного двупреломления приводит к появлению эллиптичности и не зависит от направления поля. Наведенное магнитным полем линейное двупреломление имеет два названия: Фогта или Коттона–Мутона.

Рассмотрим изотропную среду в однородном аксиальном магнитном поле. Определим, что его направлению соответствуют орты октониона k и K . В полярных частях обоих октонионов знаки коэффициентов совпадают. При этом соотношение между их величинами будет следующее: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$; $\mu_2 = \mu_3 \neq \mu_4$. В аксиальных частях имеем похожие неравенства: $|\varepsilon_6| = |\varepsilon_7| \neq |\varepsilon_8|$; $|\mu_6| = |\mu_7| \neq |\mu_8|$. Аксиальность магнитного поля требует отличия знака седьмой компоненты от знаков соседних компонент.

Наличие магнитного поля приводит к циркулярному двупреломлению (n_4) и циркулярному дихроизму (k_4). При этом для право- и лево-циркулярной поляризации эффекты имеют разные знаки.

$$\pm n_4 = \pm \frac{(\mu_5 \varepsilon_8 + \mu_8 \varepsilon_5)}{2n_1};$$
$$\mp k_4 = \mp \frac{(\mu_5 \varepsilon_4 + \mu_4 \varepsilon_5)}{2n_1}.$$

Смена направления магнитного поля изменяет знаки наведенных поправок к оптическим константам. Таким образом, очевиден нечетный по знаку характер эффекта Фарадея.

Гиперкомплексный подход при описании магнитооптического эффекта Фарадея дает простой и однозначно правильный ответ. При таком решении для циркулярного двупреломления и дихроизма хорошо видна простая билинейная связь изотропных и наведенных полей электродинамических компонент. Адекватность математики выбранной нами тестовой задаче не вызывает сомнений.

Доказанная ранее связь между анизотропной электродинамикой (ε, μ) и оптикой (n, k) может быть применена и к механике деформируемого твердого тела. Внешнее механическое воздействие на макроизотропный объект вызывает его деформацию, делая его анизотропным. При этом электромагнитные и оптические характеристики образца изменяются. Контроль этих параметров лежит в основе диагностики механического состояния. К таким методикам относится магнитно-структурный анализ, вихретоковая дефектоскопия, акустооптика и др.

Особого внимания требует проблема разрушения материалов. В работе [12] сформулирован электродинамический критерий устойчивости твердого тела. Этот критерий легко применять к кристаллическим макрооднородным средам. Если среда – поликристалл с границами зерен или многофазный образец, такой подход требует дополнительного рассмотрения. Анализ функционала из [12] показывает, что низкосимметричные образования (например дислокации, границы зерен или двумерные фазы) в объекте имеют энергетическое преимущество, поэтому в процессе деформации они увеличивают свою объемную долю, что приводит к разрушению образца.

Благодарность

Исследование выполнено в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Функция» № АААА-А19-119012990095-0) и при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-02-00541.

Литература

1. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий / А. А. Кеткович, В. А. Строков и др. / под. ред. В. В. Ключева. – М. : Машиностроение, 1986. – С. 48–115 с. – Кн. 1.
2. Владимиров А. П. Динамическая спекл-интерферометрия деформируемых тел. – Екатеринбург : УрО РАН, 2004. – 242 с.

3. Assessing Fatigue Damage in Organic Glass Using Optical Methods / A. P. Vladimirov, I. S. Kamantsev, N. A. Drukarenko, V. N. Trishin, L. A. Akashev & A. V. Druzhinin // *Opt. Spectrosc.* – 2019. – 127. – P. 943–953. – DOI: 10.1134/S0030400X19110286.
4. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. – М. : МГУ, 2004. – 656 с.
5. Горшков М. М. Эллипсометрия. – М. : Советское радио, 1974. – 200 с.
6. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. – Минск : Изд-во академии наук БССР, 1958. – 380 с.
7. Knyazev Yu. V., Maevskii V. M. Anisotropy of optical absorption in an yttrium single crystal // *Optics and Spectroscopy.* – 1984. – Vol. 57, iss. 2. – P. 153–157.
8. Дружинин А. В., Дружинина Т. В. Электродинамический критерий устойчивости твердого тела // *Вестник УГТУ–УПИ.* – 2006. – №11 (82). – С. 63–65.
9. Druzhinin A. V., Vladimirov A. P. Tsvetkova E. V. Theoretical bases of magneto-optical refractometry for transparent media // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures.* – 2018. – Iss. 6. – P. 83–89. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.083-089. – Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_6_2018_Druzhinin_A.V._et_al._083_089.pdf
10. Джеррард А., Бёрч Дж. М. Введение в матричную оптику / пер. с англ. – М. : Мир, 1978. – 343 с.
11. Румер Ю. Б. Спинорный анализ. – Ленинград : ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 105 с.
12. Дружинин А. В., Дружинина Т. В. Электродинамический критерий устойчивости твердого тела // *Вестник УГТУ–УПИ.* – 2006. – №11 (82). – С. 63–65.
13. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. – М. : Наука, 1973. – 144 с.
14. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. – М. : Наука, 1986. – 120 с.