

Received: 06.04.2026

Revised: 08.06.2026

Accepted: 12.06.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.116-127

AN EXACT SOLUTION OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS DESCRIBING AMPLIFICATION OF THE OSCILLATIONS OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

E. Yu. Prosviryakov^{1, 2, a, *} and L. S. Goruleva^{1, 2, b}

¹*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

²*Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia*

^a  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  sherlarisa@yandex.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The paper studies a new exact solution to the Navier–Stokes equations for describing steady and oscillatory motions of a viscous incompressible vertically swirling fluid without preliminary twist. The exact integration of the Navier–Stokes equations is carried out in the Lin–Sidorov–Aristov class. The velocity vector field is characterized by a linear dependence on a part of the coordinates (horizontal or longitudinal). The coefficients of the linear forms depend on the third coordinate (vertical or transverse) and time. The obtained exact solution describes a nonlinear superposition of the Poiseuille flow and the non-uniform Stokes wave motion. A criterion for the existence of stagnation points and conditions for the generation of steady and unsteady countercurrents is given. This criterion is shown to determine an increase in velocities during steady motion and amplification of oscillations for unsteady fluid flows.

Keywords: exact solutions, Stokes flow, Poiseuille flow, fluid oscillation, overdetermined system

Acknowledgment

The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 25-29-00339, <https://rscf.ru/project/25-29-00339/>.

References

1. Stokes, G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, 1851, 9 (2), 8–106.
2. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyandin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
3. Bukreev, V.I. Experimental investigation of the range of applicability of the solution of the second Stokes problem. *Fluid Dynamics*, 1988, 23, 506–509. DOI: 10.1007/BF01055071.
4. Barinov, V.A. Distribution of waves on free surface of viscous liquid. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya*, 2010, 2, 18–31. (In Russian).

5. Hayat, T., Asghar, S., and Siddiqui, A.M. Stokes' second problem for a Johnson–Segalman fluid. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 148 (3), 697–706. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00928-1.
6. Pritchard, D., McArdle, C.R., and Wilson, S.K. The Stokes boundary layer for a power-law fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, 166 (12–13), 745–753. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2011.04.011.
7. Rajagopal, K.R. A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1982, 17 (5–6), 369–373. DOI: 10.1016/0020-7462(82)90006-3.
8. Abrashkin, A.A. and Yakubovich, V.I. *Vikhrevaya dinamika v lagranzhevom opisanii* [Vortex Dynamics in Lagrange Description]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2006, 176 p. (In Russian).
9. Petrov, A.G. *Analiticheskaya gidrodinamika* [Analytical Hydrodynamics]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2010, 520 p. (In Russian).
10. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions, London Mathematical Society Lecture Note Series, Series Number 334*, Cambridge University Press, 2006, 208 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526459.
11. Debler, W.R. and Montgomery, R.D. Flow over an oscillating plate with suction or with an intermediate film: two exact solutions of the Navier–Stokes equations. *J. Appl. Mech.*, 1971, 38 (1), 262–265. DOI: 10.1115/1.3408752.
12. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, 10 (2), 177–182. (In Russian).
13. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Stokes waves in vortical fluid. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, 10 (3), 309–318. (In Russian).
14. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, 58, 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
15. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, 51, 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
16. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2019, 23 (2), 341–360. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1670.
17. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
18. Prosviryakov, E.Yu., Goruleva, L.S., and Ledyankina, O.A. A new exact solution of the Navier–Stokes equations for describing the unsteady flows of vertically swirled fluid. *Russian Aeronautics*, 2025, 68 (2), 393–401. DOI: 10.3103/S1068799825020151.
19. Prosviryakov, E.Yu., Goruleva, L.S., and Ledyankina, O.A. New exact solutions of the Navier–Stokes equations for the description of unsteady gradient shear flows of two and a half dimensions. *Russian Aeronautics*, 2025, 68, 867–875. DOI: 10.3103/S1068799825040099.

Подана в журнал: 06.04.2026
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.116-127

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ УСИЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ю. Просвирыков^{1, 2, а, *}, Л. С. Горулева^{1, 2, б}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  sherlarisa@yandex.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, д. 34, Екатеринбург, 620049, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: +7 (343) 374-53-30

В статье изучается новое точное решение уравнений Навье – Стокса для описания установившихся и колебательных движений вязкой несжимаемой вертикально завихренной жидкости без предварительной закрутки. Точное интегрирование уравнений Навье – Стокса проведено в классе Линя – Сидорова – Аристова. Поле вектора скорости характеризуется линейной зависимостью от части координат (горизонтальных или продольных). Коэффициенты линейных форм зависят от третьей координаты (вертикальной или поперечной) и времени. Полученное точное решение описывает нелинейную суперпозицию течения Пуазейля и неоднородного волнового движения Стокса. Приведен критерий для существования застойных точек и условий генерации установившихся и неустановившихся противотечений. Показано, что этот критерий определяет увеличение скоростей при установившемся движении и усиление колебаний для нестационарных потоков жидкости.

Ключевые слова: точные решения, течение Стокса, течение Пуазейля, колебание жидкости, переопределенная система

1. Введение

Исследование колебательных движений вязкой несжимаемой жидкости было начато Стоксом, одним из основателей гидродинамики вязких жидкостей [1]. В настоящее время точное решение Стокса, описывающее изобарические колебания вязкой несжимаемой жидкости, называют второй задачей Стокса [2]. Это точное решение является классическим для описания неустановившихся потоков вязких несжимаемых жидкостей, оно, можно сказать, описывает поперечную структуру поля скоростей.

В статье [1] было исследовано колебательное движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве, которое генерировалось периодическим возмущением плоскости, являющейся границей полупространства. При этом на бесконечности касательные напряжения полагались равными нулю, поскольку постулировалось граничное условие о свободной границе [1]. Известно, что характерной особенностью второй задачи Стокса является наличие поперечных волн в жидкости, а также их очень быстрое затухание при удалении от твердой вибрирующей поверхности [1].

Анонсированный в статье [1] результат не всегда соотносился с натурными наблюдениями природных процессов. Более поздние исследования позволили определить область применимости точного решения второй задачи Стокса, а также экспериментально показать возможность усиления волновых движений жидкости под действием периодических возмущений [3]. Таким образом, была показана область применимости достоверного применения точного решения второй задачи Стокса, описывающего нестационарное колебательное движение, которое существенно зависит от вязкости жидкости и частоты краевого режима [3].

Решение второй задачи Стокса для ньютоновских несжимаемых жидкостей было обобщено для слабовязкой жидкости в статье [4]. Точное решение Стокса было модифицировано для описания колебаний жидкостей с выраженными реологическими свойствами [5–7]. Отметим, что имеются исследования второй задачи Стокса не только в координатах Эйлера, но и в переменных Лагранжа [8, 9]. Точное решение Стокса используется при объяснении эффекта отсасывания жидкости на дне и воздействии волн на дно водоемов [3]. Вторая задача Стокса играет важную роль в теории гидродинамической устойчивости [10].

Чрезвычайно быстрое затухание колебательного возмущения можно объяснить линейностью второй задачи Стокса, которая прежде исходит из предположения о преобладании вязких сил над конвективным ускорением. С другой стороны, классическое течение Стокса является одномерным по скоростям. Иными словами, оно описывает нестационарный однонаправленный поток жидкости в тригонометрическом базисе (базисе Фурье). В статье [11] было предложено точное решение для объяснения эффекта подсосывания жидкости при изобарическом течении, которое является сдвиговым. Характерная особенность этого решения заключается в том, что одна из компонент вектора скорости является постоянной. Таким образом, несмотря на двухмерность рассматриваемого потока полученное точное решение в работах [10, 11] описывает также достаточно быстрое затухание параметрических колебаний Стокса. Другими словами, изучается суперпозиция однонаправленных течений, которая определяет при подходящей замене координат и скоростей вновь однонаправленное колебательное движение вязкой жидкости.

Подход нахождения точных решений для неоднородных изобарических сдвиговых течений вязкой несжимаемой жидкости начал развиваться в статьях (обобщение классического потока Куэтта) [12, 13]. Основная трудность интегрирования уравнений Навье – Стокса при нулевом значении градиента и равенстве нулю одной из компонент скорости заключается в том, что система уравнений гидродинамики является переопределенной. Для квадратично нелинейных переопределенных систем уравнений в частных производных построение точных решений, отличных от тривиальных, является очень трудной задачей. Первые точные решения для неоднородных сдвиговых потоков вязкой несжимаемой жидкости были предложены в статьях [12–15].

В работе [13] было построено семейство точных решений, описывающих усиление колебаний волн Стокса в вязкой несжимаемой вертикально завихренной жидкости. Вертикальная компонента завихренности в работе [13] описывается установившимся профилем, то есть ее точное решение не зависит от времени, а одномерное уравнение типа теплопроводности редуцируется к простейшему обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Подчеркнем, что вертикальная закрутка в жидкости обусловлена не вращением, а способом передачи импульса [12–15]. Точные решения уравнений Навье – Стокса, анонсированные в работах [12–15], позволяют исследовать крупномасштабные противотечения, усиление скоростей и существование застойных зон в Мировом океане в приближении тонкого слоя.

К настоящему времени остается открытым вопрос о влиянии градиентов давления на формирование застойных точек и усиление колебаний в потоке жидкости, описанных в статьях [12–15]. В настоящей работе приведено точное решение, описывающее нелинейную суперпозицию течений Стокса и Пуазейля

2. Постановка задачи

Сдвиговое неоднородное градиентное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается следующей системой уравнений [12, 13]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

В системе (1), состоящей из уравнений Навье – Стокса и уравнения непрерывности (несжимаемости), введены следующие стандартные обозначения: V_x , V_y – компоненты вектора скорости; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; P – давление, деленное на постоянную плотность жидкости.

Для исследования течений в горизонтальном бесконечном слое вязкой несжимаемой жидкости сформулируем граничные условия. На нижней границе слоя жидкости $z = 0$ заданы вибрации:

$$\begin{aligned}V_x &= W \cos \omega t - \Omega y, \\ V_y &= W \sin \omega t.\end{aligned}\quad (2)$$

На верхней границе (например, на границе океана и атмосферы) заданы касательные напряжения, равные нулю:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0.\quad (3)$$

Использование граничных условий (2) и (3) означает, что при описании течений жидкости в тонком слое можно пренебречь деформацией свободной поверхности и неровностью дна. В этом случае свободная верхняя граница описывается уравнением плоскости $z = h$, параллельной дну $z = 0$. Здесь h – толщина слоя жидкости.

Что касается граничного условия для давления, то в этой работе мы ограничимся заданием атмосферного давления на границе $z = h$, а также горизонтальных градиентов давления $P_1 = \frac{\partial P}{\partial x}$ и $P_2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, которые постоянны по толщине слоя жидкости. Заметим, что в статье изучается колебание жидкости не в полупространстве, а в полосе, ограниченной двумя недеформируемыми границами. Как было показано в работах [2, 10], для классической второй задачи Стокса качественные эффекты для полупространства аналогичны свойствам решений для колебаний в бесконечном горизонтальном слое.

3. Точное решение

Точное решение системы уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости (1), в силу граничных условий (2) и (3) (краевой режим), будем искать в следующем виде [12–15]:

$$V_x = U(z, t) - \Omega y,$$

$$V_y = V(z, t), \quad (4)$$

$$P = S + g(h - z) + xP_1(t) + yP_2(t). \quad (5)$$

Данное точное решение (4), (5) принадлежит классу Линя – Сидорова – Аристова [2, 12–15]. Здесь поле скорости и поле давления описываются линейными формами, обладающими широким функциональным произволом для описания течений жидкости в точной постановке. Функциональный произвол определяется коэффициентами форм (4), (5).

Здесь $\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ – вертикальная компонента завихренности жидкости, которая

принимает постоянное значение по толщине слоя жидкости в силу выбора точного решения (4), (5) для уравнений Навье – Стокса; S – атмосферное давление на границе $z = h$; g – ускорение свободного падения. Отметим, что если в формулах (4) положить $\Omega = 0$, то точное решение (4), (5) было рассмотрено для описания конвективных потоков [16]. Такие потоки описываются однородным полем скоростей. Они находят применение для описания различных природных и технологических процессов [16–19]. Учет неоднородности для поля скоростей существенно усложняет изучение структуры гидродинамических полей. Отметим, что в статьях [17–19] приведены алгоритмы для тиражирования и обобщения точного решения (4), (5) для переопределенной системы уравнений (1).

Подставим класс точных решений (4), (5) в систему уравнений Навье – Стокса и уравнения непрерывности (неразрывности) (1), получим уравнения для определения неизвестных функций:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - P_2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - P_1 + \Omega V. \quad (6)$$

Уравнения (6) являются простейшими параболическими уравнениями размерности $(1 + 1)$ типа одномерных уравнений теплопроводности. Они значительно проще, чем исходная сильно нелинейная система уравнений (1). Отметим, что при выводе системы (6) третье и четвертое уравнения в системе (1) тождественно удовлетворяются из-за структуры поля скоростей и поля давления (4) и (5). Уравнения (6) получены подстановкой формул (4) и (5) в систему (1) и применением метода неопределенных коэффициентов [12–16].

4. Стационарные движения жидкости

Исследуем для начала стационарное решение (уставившееся течение жидкости) системы (6), которая преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$v \frac{d^2 V}{dz^2} = P_2,$$

$$v \frac{d^2 U}{dz^2} = -\Omega V + P_1. \quad (7)$$

Последовательное интегрирование уравнений (7) с использованием граничных условий (2) и (3) позволяет получить следующее полиномиальное поле скоростей (4):

$$V = W \sin \alpha + \frac{z(z-2h)P_2}{2v},$$

$$U = W \cos \alpha + z(z-2h) \frac{12vP_1 - \Omega(12Wv \sin \alpha + (z^2 - 2hz - 4h^2)P_2)}{24v^2}. \quad (8)$$

В выражениях для скоростей (8) использована формальная замена $\alpha = \omega t$, чтобы единообразно записать граничное условие (3) для стационарных и нестационарных движений вязкой несжимаемой жидкости.

Перейдем к анализу полиномиального решения для скорости $V_y = V$. Движение в направлении оси ординат Oy представляет собой хорошо известное течение Пуазейля с одной застойной точкой, в которой скорость V обращается в нуль. Единственный нуль у полинома V существует при выполнении неравенства

$$W \sin \alpha \left(W \sin \alpha - \frac{h^2 P_2}{2v} \right) \leq 0. \quad (9)$$

Таким образом, если для управляющих параметров W , α , h , v и заданного градиента давления P_2 выполняется неравенство (9), то в жидкости в направлении оси Oy возникают противотечения, характеризующиеся монотонным профилем скорости. Другими словами, усиления скорости относительно граничных возмущений потока не происходит.

Течение вдоль оси Ox имеет более сложную структуру. Исследование спектральных свойств полинома U показывает, что он может принимать нулевые значения не более чем в двух точках. Единственный корень у полинома U для поля скоростей (8) существует тогда и только тогда, когда для управляющих параметров выполнено неравенство

$$W \cos \alpha \left(\frac{24Wv^2 \cos \alpha + 12h^2Wv \sin \alpha - 12h^2vP_1 - 5h^4\Omega P_2}{24v^2} \right) \leq 0. \quad (10)$$

При выполнении неравенства (10) у полинома U существует единственный экстремум, который по модулю всегда превосходит значение скорости W (происходит усиление скоростей). Таким образом, генерация противотечений всегда сопровождается локальным экстремумом, который может при определенных значениях управляющих параметров краевой задачи стать глобальным, а течение жидкости в этом случае локализуется вблизи границ слоя.

Единственный экстремум также имеет место, если у полинома U существует два корня. Два нулевых значения существуют, если параметры задачи удовлетворяют системе неравенств

$$W \cos \alpha \left(\frac{24Wv^2 \cos \alpha + 12h^2Wv \sin \alpha - 12h^2vP_1 - 5h^4\Omega P_2}{24v^2} \right) \geq 0,$$

$$(3vP + h^2\Omega P_2)(12vP_1 + 5h^2\Omega P_2) \leq 0. \quad (11)$$

Если приравнять к нулю вертикальную компоненту завихренности жидкости, то система неравенств (11) не имеет решений, а неравенство (10) с точностью до градиента P_2 принимает вид (9). Это означает, что при отсутствии в жидкости вертикального вихря течение в обоих направлениях будет иметь тип Пуазейля. Иными словами, первопричиной усиления скоростей в жидкости является наличие неоднородности у поля скоростей (4), а градиенты давления могут влиять только количественно на экстремум удельной кинетической энергии

$$E = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2),$$

нормированной на плотность жидкости.

Проанализируем распределение кинетической энергии относительно толщины слоя в сечении $y = 0$. Функция E будет принимать только одно нулевое значение в точке, где совпадают нули полиномов U и V . Эта точка определяет слой, в котором жидкость замедляется, а затем вновь начинает разгоняться. В этом случае у кинетической энергии существует три экстремума (рис. 1), если вертикальная компонента завихренности отлична от нуля.

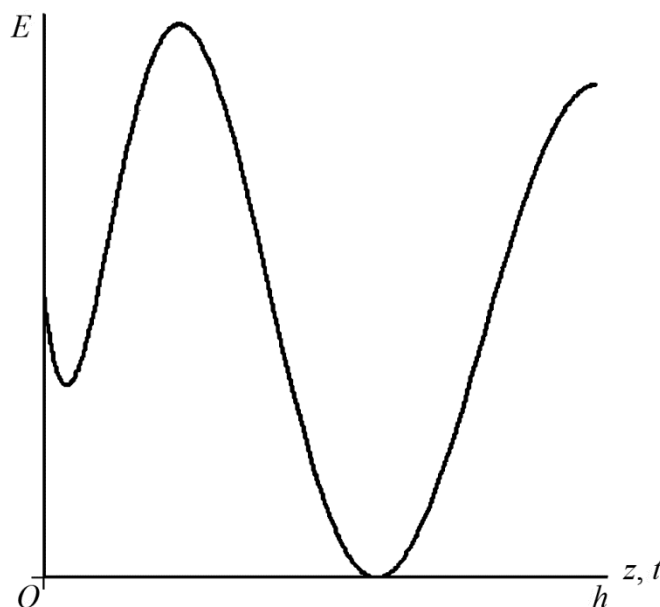


Рис. 1. Профиль кинетической энергии, характеризующий наличие мгновенной остановки жидкости и возможность усиления колебаний

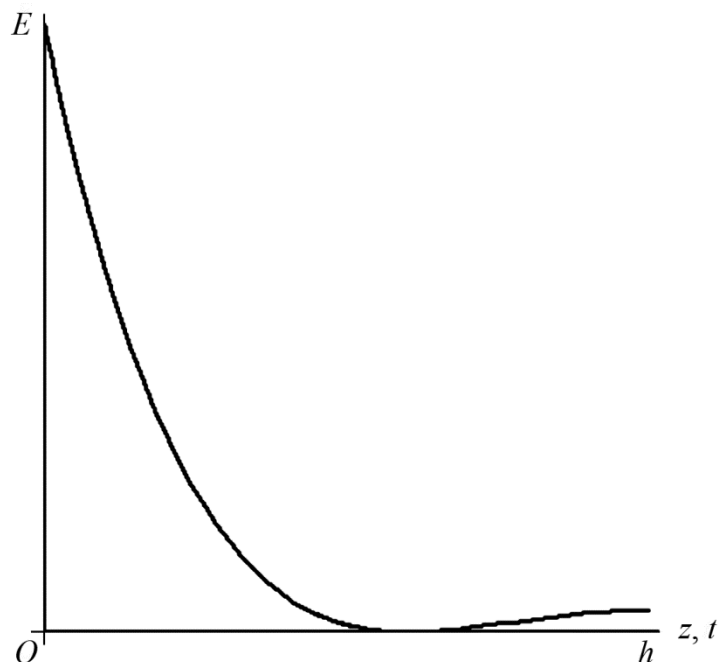


Рис. 2. Профиль кинетической энергии с застойной точкой при нулевом значении вертикальной компоненты завихренности, иллюстрирующий невозможность усиления волн Стокса

При дальнейшем изменении параметров число экстремумов будет определяться немонотонностью профиля U , но их всегда будет не больше трех. Если профили скоростей U и V подобны, то у кинетической энергии нулевая точка существует, а экстремума не наблюдается. Этот случай реализуется, если положить в (8) $\Omega = 0$ (рис. 2). Аналогичные профили кинетической энергии будут и при других значениях координаты y .

5. Описание колебаний жидкости

Для описания колебаний вязкой несжимаемой жидкости, задаваемых граничными условиями (2) и (3), будем искать точное решение системы (6) в виде [18, 19]

$$U = U_1(z) \cos \omega t + U_2(z) \sin \omega t,$$

$$V = V_1(z) \cos \omega t + V_2(z) \sin \omega t,$$

$$P_1 = S_1 \cos \omega t + S_2 \sin \omega t,$$

$$P_2 = S_3 \cos \omega t + S_4 \sin \omega t. \quad (12)$$

Подставляя данные выражения (12) для скоростей и давления в систему (6), получим систему для вычисления функций U_1 , U_2 , V_1 , V_2 :

$$\nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = S_3 + \omega V_2,$$

$$\nu \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = S_4 - \omega V_1, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} &= S_1 + \omega U_2 - \Omega V_1, \\ \nu \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} &= S_2 - \omega U_1 - \Omega V_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Системы (13), (14), состоящие из двух изолированных подсистем типа Экмана [2], имеют аналитическое решение [13, 15]. После интегрирования подсистемы (13) получим точное решение для амплитуд V_1 , V_2 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(C_1 \cosh(kz) + \frac{C_2}{2k} \sinh(kz) - \frac{C_4}{2k} \sinh(kz) \right) \cos(kz) + \\ &+ \left(\frac{C_2}{2k} \cosh(kz) + C_3 \sinh(kz) + \frac{C_4}{2k} \cosh(kz) \right) \sin(kz) + \frac{S_4}{2k^2 \nu}, \\ V_2 &= \left(C_3 \cosh(kz) + \frac{C_2}{2k} \sinh(kz) + \frac{C_4}{2k} \sinh(kz) \right) \cos(kz) + \\ &+ \left(-\frac{C_2}{2k} \cosh(kz) - C_3 \sinh(kz) + \frac{C_4}{2k} \cosh(kz) \right) \sin(kz) + \frac{S_4}{2k^2 \nu}. \end{aligned}$$

Подставив амплитуды V_1 и V_2 в подсистему (14), проинтегрировав эту подсистему, получим точное решение для U_1 , U_2 , которое является достаточно громоздким. В настоящей статье оно не будет приведено, поскольку может быть легко получено. С интегрированием подобных систем можно ознакомиться в статьях [13, 15], где приведено точное решение для амплитуд V_1 и V_2 , выражающееся через дисперсионное соотношение $k^2 = \frac{\omega}{2\nu}$.

Исследование амплитуд (огibaющих) скоростей нестационарного решения (12), определяемых системой (14), аналогично исследованию стационарного решения (8). Анализ этого решения показывает, что зависимость кинетической энергии потока жидкости от времени для каждого фиксированного значения z и y качественно совпадает с профилем, представленным на рис. 1. Таким образом, задание возмущения на границе слоя вертикально завихренной жидкости сначала разгоняет жидкость, затем тормозит, а дальнейший разгон жидкости сопровождается усилением колебаний относительно граничных вибраций. Отметим, что если зафиксировать некоторый момент времени, то в жидкости по толщине слоя будет регистрироваться профиль, изображенный на рис. 1. Следовательно, усиление колебаний вязкой несжимаемой жидкости обладает пространственной и временной протяженностью. Подчеркнем еще раз, что увеличение амплитуды колебаний в жидкости происходит из-за вихря, ориентированного поперек слоя, а влияние горизонтальных градиентов давления может только увеличить значение экстремума, но не сформировать такой режим течения жидкости.

Отметим, что при построении точного решения системы учитываются экспоненциальные слагаемые вида $\exp(kz)$. Поскольку рассматривается слой конечной толщины, то функция $\exp(kz)$ не обращается в бесконечность относительно переменной z . Учет всех экспоненциальных слагаемых без учета вертикальной компоненты завихренности, как показывает анализ точного решения, не обеспечивает усиления колебаний.

6. Заключение

В статье предложено новое точное решение уравнений Навье – Стокса для исследования второй задачи Стокса для вертикально завихренной жидкости. При нахождении точного решения учитывались горизонтальные градиенты давления. Оно построено в классе Линя – Сидорова – Аристов. Показано, что при учете пространственного ускорения (вертикальной закрутки) в жидкости возникают застойные точки, приводящие к противотечениям, и реализуется способ переноса импульса в несжимаемой среде, приводящий к усилению граничных периодических возмущений. Таким образом, классическая вторая задача Стокса с однородным полем скоростей не может описывать усиления волн в вязкой несжимаемой жидкости.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00339, <https://rscf.ru/project/25-29-00339/>).

Литература

1. Stokes G. G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Transaction of the Cambridge Philosophical Society. – 1851. – Vol. 9, part 2. – P. 8–106.
2. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
3. Bukreev V. I. Experimental investigation of the range of applicability of the solution of Stokes's second problem // Fluid Dynamics. – 1988. – Vol. 23. – P. 504–509. – DOI: 10.1007/BF01055071.
4. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2010. – Вып. 2. – С. 18–31.
5. Hayat T., Asghar S., Siddiqui A. M. Stokes' second problem for a Johnson-Segalman fluid // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Vol. 148 (3). – P. 697–706. – DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00928-1.
6. Pritchard D., McArdle C. R., Wilson S. K. The Stokes boundary layer for a power-law fluid // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2011. – Vol. 166 (12–13). – P. 745–753. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2011.04.011.
7. Rajagopal K. R. A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1982. – Vol. 17 (5–6). – P. 369–373. – DOI: 10.1016/0020-7462(82)90006-3.
8. Абрашкин А. А., Якубович В. И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. – М. : Физматлит, 2006. – 176 с.
9. Петров А. Г. Аналитическая гидродинамика. – М. : Физматлит, 2010. – 520 с.
10. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions, London Mathematical Society Lecture Note Series. Series Number 334. – Cambridge University Press, 2006. – 208 p. – DOI: 10.1017/CBO9780511526459.
11. Debler W. R., Montgomery R. D. Flow over an oscillating plate with suction or with an intermediate film: two exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Appl. Mech. – 1971. – Vol. 38 (1). – P. 262–265. – DOI: 10.1115/1.3408752.
12. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.

13. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Волны Стокса в завихренной жидкости // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10 (3). – С. 309–318.
14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid // Russian Aeronautics. – 2015. – Vol. 58. – P. 413–418. – DOI: 10.3103/S1068799815040091.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.
16. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2019. – Vol. 23 (2). – P. 341–360. – DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1670>.
17. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26 (2). – С. 79–87. – DOI 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
18. Prosviryakov E. Yu. Goruleva L. S., Ledyankina O. A. A new exact solution of the Navier–Stokes equations for describing the unsteady flows of vertically swirled fluid // Russian Aeronautics. – 2025. – Vol. 68 (2). – P. 393–401. – DOI: 10.3103/S1068799825020151.
19. Prosviryakov E. Yu., Goruleva L. S., Ledyankina O. A. New exact solutions of the Navier–Stokes equations for the description of unsteady gradient shear flows of two and a half dimensions // Russian Aeronautics. – 2025. – Vol. 68. – P. 867–875. – DOI: 10.3103/S1068799825040099.