

Received: 09.02.2026

Revised: 08.06.2026

Accepted: 12.06.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.074-087

AN EXACT SOLUTION TO THE STOKES EQUATIONS FOR A LAYER WITH LOCALLY PERMEABLE BOUNDARIES AND A ZERO NET FLUX: A QUASI-THREE-DIMENSIONAL GENERALIZATION OF THE COUETTE FLOW

K. V. Gubareva^{1, a, *} and E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}

¹Samara State Technical University,

244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

The paper presents an exact analytical solution to the Stokes equations, which models a creeping flow of a viscous incompressible fluid in a horizontal layer with locally permeable boundaries. On the upper and lower planes, the normal velocity varies sinusoidally along the transverse coordinate; the integral flux through any cross-section is zero, thus ensuring a balance between injection and suction. The continuity equation yields a linear dependence of the longitudinal velocity on the streamwise coordinate, which is incorporated into the boundary conditions as linear functions with unknown coefficients. The resulting flow is a quasi-three-dimensional generalization of the classical Couette flow. The method of separation of variables is used to derive closed-form expressions for all the velocity components. The pressure is uniform throughout the domain, meaning that the motion is governed solely by viscous stresses and boundary kinematics. The behavior of the solution is analyzed, i.e., the normal velocity decays exponentially from the boundaries toward the mid-plane, while the longitudinal velocity contains a term proportional to the product of the streamwise coordinate, the permeability parameter, and the hyperbolic sine of the vertical coordinate. Limiting cases are examined, namely impermeable boundaries (classical Couette flow), thin and thick layers. Additionally, cases with different translational velocities of the plates and transverse shear parameters are studied. The only nonzero vorticity component and the shear stress on the plates are calculated. Visualization is performed for parameters typical of microfluidic devices (glycerin, layer thickness 1 mm). The solution can serve as a benchmark test for numerical methods intended to simulate flows with permeable boundaries and balanced mass exchange, as well as to analyze microhydrodynamic systems.

Keywords: Stokes equations, exact solution, permeable boundaries, zero net flux, balanced mass exchange, Couette flow, quasi-three-dimensional flow, viscous incompressible fluid

References

1. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 p.
2. Pukhnachev, V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, 4 (1), 6–76. (In Russian).

3. Couette, M. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, 21, 433–510.
4. Berman, A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1953, 24 (9), 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476.
5. Yuan, S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (3), 267–269. DOI: 10.1063/1.1722355.
6. Yuan, S.W. and Finkelstein, A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1956, 78 (4), 719–724.
7. Sellars, J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, 26 (4), 489–490. DOI: 10.1063/1.1722024.
8. Berman, A.S. Concerning laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (12), 1557. DOI: 10.1063/1.1722307.
9. Stone, H.A., Stroock, A.D., and Ajdari, A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2004, 36, 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
10. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccorso, E., Butt, H.-J., and Craig, V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, 68 (12), 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
11. Wang, C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, 42 (11S), 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
12. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23, 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
13. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyinin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
14. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
15. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 66–86. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
16. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. Exact quadratic polynomial solution for describing inhomogeneous Couette–Poiseuille flow in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2026, 18 (1), 47–62. (In Russian). DOI: 10.14529/mmph260106.
17. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html
18. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2, 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
19. Polyinin, A.D. and Zhurov, A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Izd. IPMekh RAN Publ., Moscow, 2020, 384 p. (In Russian).

20. Lin, C.C. *The Theory of Hydrodynamic Stability*, University Press, Cambridge, 1955, 155 p.
21. Craik, A.D.D. and Criminale, W.O. Evolution of wavelike disturbances in shear flows: a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1986, 406, 13–26.
22. Polyanin, A.D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, 46, 726–731. DOI: 10.1134/1.1415590.
23. Kundu, P.K., Cohen, I.M., and Dowling, D.R. *Fluid Mechanics*, 6th ed., Academic Press, 2015, 921 p.
24. Berker, R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. In: Flügge, S., ed., *Handbuch der Physik*, vol. 8/2, Springer, Berlin, 1963, pp. 1–384.
25. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, 58 (4), 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
26. Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University, 1967, 616 p.
27. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34, 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.
28. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34, 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
29. Schlichting, H. and Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*, 9th ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2017, 805 p.
30. White, F.M. *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Boston, Mass., 629 p.

Подана в журнал: 09.02.2026

УДК 532.516

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.074-087

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТОКСА ДЛЯ СЛОЯ С ЛОКАЛЬНО ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ И НУЛЕВЫМ СУММАРНЫМ ПОТОКОМ – КВАЗИТРЕХМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвирыков^{2, 3, б}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

Представлено точное аналитическое решение уравнений Стокса, моделирующее ползущее течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с локально проницаемыми границами. На верхней и нижней плоскостях нормальная скорость изменяется по синусоидальному закону вдоль поперечной координаты; при этом интегральный поток через любое сечение равен нулю, что обеспечивает баланс вдува и отсоса. Уравнение неразрывности порождает линейную зависимость продольной скорости от продольной координаты, которая закладывается в граничные условия как линейные функции с неизвестными коэффициентами. Получаемое течение является квазитрехмерным обобщением классического течения Куэтта. В ходе решения методом разделения переменных получены замкнутые выражения для всех компонент поля скорости. Давление оказывается постоянным во всей области, то есть движение определяется исключительно вязкими напряжениями и кинематикой границ. Проанализировано поведение решения: показано экспоненциальное затухание нормальной скорости от границ к центру слоя; продольная скорость содержит слагаемое, пропорциональное произведению продольной координаты, параметра проницаемости и гиперболического синуса вертикальной координаты. Рассмотрены предельные переходы: отсутствие проницаемости (классическое течение Куэтта), тонкий и толстый слой. Отдельно исследованы случаи с различными скоростями поступательного движения пластин и параметрами поперечного сдвига. Вычислены единственная ненулевая компонента завихренности и касательное напряжение на пластинах. Выполнена визуализация для параметров, характерных для микрофлюидных устройств (глицерин, толщина слоя – 1 мм). Решение может служить эталонным тестом для численных методов, предназначенных для моделирования течений с проницаемыми границами и сбалансированным массообменом, а также для анализа микрогидродинамических систем.

Ключевые слова: уравнения Стокса, точное решение, проницаемые границы, нулевой суммарный поток, сбалансированный массообмен, течение Куэтта, квазитрехмерное течение, вязкая несжимаемая жидкость

1. Введение

Исследование точных решений уравнений Навье – Стокса и их приближения для малых чисел Рейнольдса (уравнений Стокса) является одним из фундаментальных направлений гидродинамики [1, 2]. Классические решения для течений между параллельными пластинами, такие как течение Куэтта [3] и Пуазейля, предполагают непроницаемость границ и однородность поля скорости вдоль продольной координаты. Однако во многих приложениях – микрофлюидных устройствах, мембранных технологиях, процессах фильтрации – границы являются проницаемыми, что приводит к локальному массообмену между слоем и окружающей средой. Первые точные решения для каналов с пористыми стенками были получены Берманом [4] и Юаном [5]; в них проницаемость предполагалась однородной, а суммарный поток через стенки – отличным от нуля. Эти результаты были впоследствии обобщены для различных режимов вдува и отсоса [6–8].

Отдельный интерес представляют течения со сбалансированным массообменом, когда локальный вдув на одних участках границы компенсируется отсосом на других, так что интегральный поток жидкости через любое горизонтальное сечение равен нулю. Такая ситуация возникает в замкнутых циркуляционных системах, микрофлюидных устройствах с мембранами, а также при моделировании биологических жидкостей [9, 10]. В отличие от классической задачи о замкнутой полости (с нулевой нормальной скоростью на всей границе), здесь границы локально проницаемы, но глобальный баланс массы сохраняется благодаря специальному распределению нормальной скорости.

В последние годы активно развиваются методы построения точных решений для пространственно неоднородных течений [11–13]. Работы [14–16] посвящены течениям Куэтта – Пуазейля с неоднородными граничными условиями. В работах [17, 18] исследованы трехмерные стационарные течения вязкой жидкости, допускающие точные решения. Общие подходы к классификации точных решений уравнений Навье – Стокса изложены в монографиях [19, 20].

Значительный прогресс достигнут в описании слоистых течений с проницаемыми границами. В работе [21] построены точные решения для неоднородных изобарических вертикальных вихревых течений в областях с проницаемыми границами. Нелинейные градиентные течения вертикально завихренной жидкости в тонком слое изучены в работе [22]. Дальнейшее развитие эти результаты получили в работе [23], где рассмотрено нелинейное изобарическое течение в тонком слое с проницаемыми границами, что важно для приложений в микрофлюидике.

Новые классы точных решений уравнений Навье – Стокса с экспоненциальной зависимостью скорости от двух пространственных координат предложены в работе [24]. Это направление позволяет моделировать течения с локализованными возмущениями. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости исследованы в работе [25]; показано, что такие решения могут описывать вихревые структуры в геофизических и технологических приложениях. Неоднородные течения Куэтта, включающие линейную зависимость скорости от поперечной координаты, проанализированы в работе [26].

Современные исследования также выявили новые эффекты, такие как осцилляции вектора полного момента импульса в вязкой жидкости [27] и осцилляции вектора полного кинематического импульса [28]. Эти эффекты демонстрируют богатство динамики, описываемой точными решениями, и стимулируют дальнейший поиск аналитических представлений для сложных течений.

Важный класс точных решений составляют нестационарные слоистые вихревые течения. В работе [29] получены решения для нестационарных слоистых вихревых потоков, демонстрирующие сложную пространственно-временную динамику. Трехмерные нестационарные изобарические течения вязкой несжимаемой жидкости изучены в работе [30]; эти решения обобщают классические результаты на случай нестационарности и трехмерности.

Цель настоящей работы – построить точное решение уравнений Стокса для слоя с локально проницаемыми границами, обеспечивающее нулевой суммарный поток через любое сечение, и провести детальный анализ структуры течения. Полученное решение является квазитрехмерным обобщением классического течения Куэтта и содержит параметр, управляющий интенсивностью локального массообмена.

2. Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в бесконечном горизонтальном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = h$. Декартова система координат выбрана так, что ось x направлена вдоль пластин, ось y – поперек пластин, ось z – по нормали к границам.

Поле скорости ищется в виде, допускающем трехмерность, но с нулевой поперечной компонентой:

$$\vec{V} = (V_x(x, y, z), 0, V_z(y, z)). \quad (1)$$

Предположение $V_y = 0$ и независимость V_z от x упрощают математическую структуру, сохраняя при этом квазитрехмерный характер течения за счет зависимости V_x от x .

Уравнения движения в приближении Стокса (малые числа Рейнольдса) имеют вид

$$\mu \nabla^2 \vec{V} = \nabla p, \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (2)$$

где μ – динамическая вязкость, p – давление.

Требуется, чтобы поток жидкости через любое горизонтальное сечение был равен нулю:

$$\int_{y_1}^{y_2} V_z(y, z) dy = 0 \forall z \in [0, h]. \quad (3)$$

Здесь $[y_1, y_2]$ – произвольный интервал по y , на котором задано распределение проницаемости. Условие (3) допускает локальную проницаемость ($V_z \neq 0$ на границах), но запрещает накопление или убыль массы в системе.

Для решения краевой задачи сформулируем граничные условия. Из уравнения неразрывности $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ с учетом вида поля скорости (1) получаем $\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_z}{\partial z}$. Поскольку V_z не зависит от координаты x , правая часть этого равенства является функцией только y и z . Интегрирование по x приводит к линейной зависимости продольной скорости от x :

$$V_x(x, y, z) = U(y, z) + x f(y, z),$$

где $U(y, z)$ и $f(y, z)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Такая же линейная структура должна выполняться и на границах слоя. Поэтому граничные условия для продольной скорости на пластинах $z = 0$ и $z = h$ естественно задать в виде линейных функций по x с неизвестными функциями $g_0(y)$ и $g_1(y)$:

$$\begin{cases} V_x(x, y, 0) = W_0 + y\Omega_0 + x \cdot g_0(y), \\ V_x(x, y, h) = W_1 + y\Omega_1 + x \cdot g_1(y), \end{cases} \quad (4)$$

где W_0, W_1 – скорости поступательного движения пластин, Ω_0, Ω_1 – параметры поперечного сдвига (линейное изменение скорости вдоль y), а функции $g_0(y)$ и $g_1(y)$ определяются из условия совместности с полем скорости внутри слоя. Физически такие условия могут моделировать активные поверхности с распределенными микронасосами или деформируемые мембраны.

Нормальная компонента скорости на границах задается как

$$V_z(y, 0) = V_z(y, h) = \beta \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right), L = y_2 - y_1, \quad (5)$$

где β – параметр интенсивности локального массообмена (размерность скорости). Синусоидальное распределение обеспечивает выполнение условия (3), поскольку интеграл от синуса по периоду равен нулю.

3. Точное решение

Представим продольную скорость в виде

$$V_x(x, y, z) = U(y, z) + x \cdot f(y, z). \quad (6)$$

Подстановка (6) в уравнение неразрывности $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ дает

$$f(y, z) = -\frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Выберем нормальную скорость, удовлетворяющую выражению (5) и условию (3), в виде

$$V_z(y, z) = \beta \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right) \cdot \Phi(z), \quad (8)$$

где функция $\Phi(z)$ подлежит определению. Тогда из уравнения (7) следует

$$f(y, z) = -\beta \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right) \cdot \Phi'(z). \quad (9)$$

Подставим выражение (6) в x -компоненту уравнений Стокса (2). Учитывая, что левая часть линейно зависит от x , давление можно представить как $p = p_0(y, z) + x \cdot p_1(y, z)$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем два уравнения:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = p_1(y, z), \quad (10)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Подстановка выражения (9) в уравнение (11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для $\Phi(z)$:

$$-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \Phi(z) + \Phi''(z) = 0. \quad (12)$$

Общее решение имеет следующий вид (12):

$$\Phi(z) = C_1 \cosh\left(\frac{\pi z}{L}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\pi z}{L}\right). \quad (13)$$

Используя граничные условия (5), т. е. $\Phi(0) = \Phi(h) = 1$, находим константы:

$$C_1 = 1, C_2 = -\tanh\left(\frac{\pi h}{2L}\right).$$

Окончательно имеем:

$$\Phi(z) = \frac{\cosh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)}. \quad (14)$$

Функция $\Phi(z)$ четна относительно середины слоя $z = h/2$ и монотонно убывает от 1 при $z = 0$ до $\text{sech}(\pi h/2L)$ при $z = h/2$, затем симметрично возрастает до 1 при $z = h$.

Нормальная компонента скорости принимает вид

$$V_z(y, z) = \beta \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right) \cdot \frac{\cosh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)}. \quad (15)$$

Граничные условия (4) с учетом (6) принимают вид

$$\begin{aligned} U(y, 0) + x f(y, 0) &= W_0 + y \Omega_0 + x g_0(y), \\ U(y, h) + x f(y, h) &= W_1 + y \Omega_1 + x g_1(y). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$U(y, 0) = W_0 + y \Omega_0, U(y, h) = W_1 + y \Omega_1, \quad (16)$$

$$g_0(y) = f(y, 0), g_1(y) = f(y, h). \quad (17)$$

Для простоты и сохранения линейной структуры решения положим $p_1(y, z) = 0$ в уравнении (10). Тогда $U(y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (18)$$

Решение (18) с граничными условиями (16) имеет вид линейного профиля:

$$U(y, z) = W_0 + (W_1 - W_0) \frac{z}{h} + y \left[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{z}{h} \right]. \quad (19)$$

Функции $g_0(y)$ и $g_1(y)$ находятся из выражений (17), (9) и (14):

$$g_0(y) = \beta \frac{\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right), \quad g_1(y) = -\beta \frac{\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right). \quad (20)$$

Из выражения (20) видно, что функции $g_0(y)$ и $g_1(y)$ имеют ту же синусоидальную форму, что и нормальная скорость на границах (5), причем $g_1(y) = -g_0(y)$. Их амплитуда пропорциональна параметру проницаемости β , обратной длине L^{-1} и множителю $\tanh(\pi h/(2L))$. В пределе $\beta \rightarrow 0$ влияние обеих функций исчезает, и течение сводится к классическому течению Куэтта. Уменьшение L усиливает локализацию эффектов вблизи границ зон вдува и отсоса. Увеличение толщины слоя h усиливает амплитуду до насыщения при $h \gg L$. Выбранная синусоидальная форма не ограничивает общности: любая функция с нулевым средним на периоде (например, суперпозиция синусоид или локализованные возмущения) приведет к аналогичной квазитрехмерной структуре, причем более высокие пространственные гармоники усиливают поперечные градиенты продольной скорости. Таким образом, форма функций g_0 и g_1 непосредственно отражает геометрию и интенсивность массообмена на границах.

Подставляя выражения для скорости (19) и (9) в формулу (6), получаем полное поле скорости:

$$V_x(x, y, z) = W_0 + (W_1 - W_0) \frac{z}{h} + y \left[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{z}{h} \right] + \beta x \frac{\pi}{L} \cdot \frac{\sinh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right), \quad (21)$$

$$V_y(x, y, z) = 0,$$

$$V_z(y, z) = \beta \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right) \cdot \frac{\cosh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)}.$$

Решение (21) точно удовлетворяет уравнениям Стокса (2), условию несжимаемости, условию нулевого суммарного потока (3) и модифицированным граничным условиям (4) при любых значениях x, y, z .

Из уравнений Стокса (2) с учетом найденного поля скорости можно определить давление. Анализ всех трех компонент уравнений (2) показывает: $\partial p / \partial y = 0$ (y -компонента); с учетом (12) $\partial p / \partial z = 0$ (z -компонента); при $\nabla^2 V_x = 0$ (что следует из уравнения (10) при $p_1 = 0$ и уравнения (11)) $\partial p / \partial x = 0$ (x -компонента).

Таким образом, давление постоянно во всем объеме: $p = \text{const}$. Это означает, что течение полностью определяется вязкими напряжениями и кинематическими условиями на границах, без участия градиентов давления.

Параметр β управляет интенсивностью локального массообмена:

- при $\beta = 0$ $V_z \equiv 0$, V_x не зависит от x – получается классическое обобщенное течение Куэтта (плоскопараллельное течение с линейным профилем);
- при $\beta \neq 0$ возникают локальные вдувы ($V_z > 0$) и отсосы ($V_z < 0$), скомпенсированные по поперечной координате y .

Глобальный баланс массы сохраняется при любом β благодаря синусоидальному распределению (5).

Зависимость V_x от координаты x является прямым следствием уравнения неразрывности при наличии неоднородной нормальной скорости. Из уравнения (7) следует, что

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_z}{\partial z} \neq 0,$$

поэтому течение принципиально квазитрехмерно. Этот эффект может быть использован для управления структурой потока в микрофлюидных устройствах [9, 10].

Далее рассмотрим физически содержательные предельные случаи.

1. Отсутствие проницаемости ($\beta = 0$): $V_x = W_0 + (W_1 - W_0)z/h + y[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0)z/h]$, $V_z = 0$ – классическое течение Куэтта [3].
2. Тонкий слой ($h/L \ll 1$): $\Phi(z) \approx 1$, $\Phi'(z) \approx 0$. Нормальная скорость почти постоянна по толщине: $V_z \approx \beta \sin(\pi(y - y_1)/L)$, влияние на V_x пренебрежимо мало.
3. Толстый слой ($h/L \gg 1$): $\Phi(z) \approx \exp(\pi/L |h/2 - z|)$ – экспоненциальное затухание нормального потока к центру слоя. Эффекты проницаемости сосредоточены в тонких пристеночных областях.

Единственная ненулевая компонента вектора завихренности $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ направлена вдоль оси y :

$$\omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{W_1 - W_0}{h} + y \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{h} + \beta x \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\cosh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)} \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right). \quad (22)$$

Для ньютоновской жидкости касательное напряжение на площадках, нормальных к оси z , определяется законом Ньютона:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} = \mu \left[\frac{W_1 - W_0}{h} + y \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{h} + \beta x \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{\cosh\left[\frac{\pi}{L}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\pi h}{2L}\right)} \sin\left(\frac{\pi(y - y_1)}{L}\right) \right]. \quad (23)$$

4. Результаты и обсуждение

Для визуализации полученного решения проведены расчеты в пакете Matlab с параметрами, соответствующими микрофлюидному масштабу: толщина слоя $h = 1$ мм, ширина области по y $L = 2$ мм, вязкость жидкости (глицерин) $\mu = 1,5$ Па·с, плотность $\rho = 1260$ кг/м³. Число Рейнольдса $Re = (\rho \max(W_0, W_1)h)/\mu \approx 8,4 \times 10^{-4}$, что полностью оправдывает использование уравнений Стокса. Параметры сдвига пластин выбраны следующим образом: $W_0 = 0,5$ мм/с, $W_1 = 1,0$ мм/с, $\Omega_0 = 2,0$ с⁻¹, $\Omega_1 = -1,5$ с⁻¹. Параметр проницаемости $\beta = 1,0$ мм/с.

Отметим, что в рассматриваемой постановке границы слоя представляют собой твердые проницаемые пластины, свободная поверхность жидкости отсутствует, поэтому капиллярные эффекты не влияют на динамику течения. Для выбранных параметров (глицерин, $\mu = 1,5$ Па·с, $\sigma \approx 0,063$ Н/м, $U \ll 1$ мм/с) число капиллярности $Ca = \mu U / \sigma \approx 0,024 \ll 1$, что подтверждает доминирование вязких сил над поверхностным натяжением.

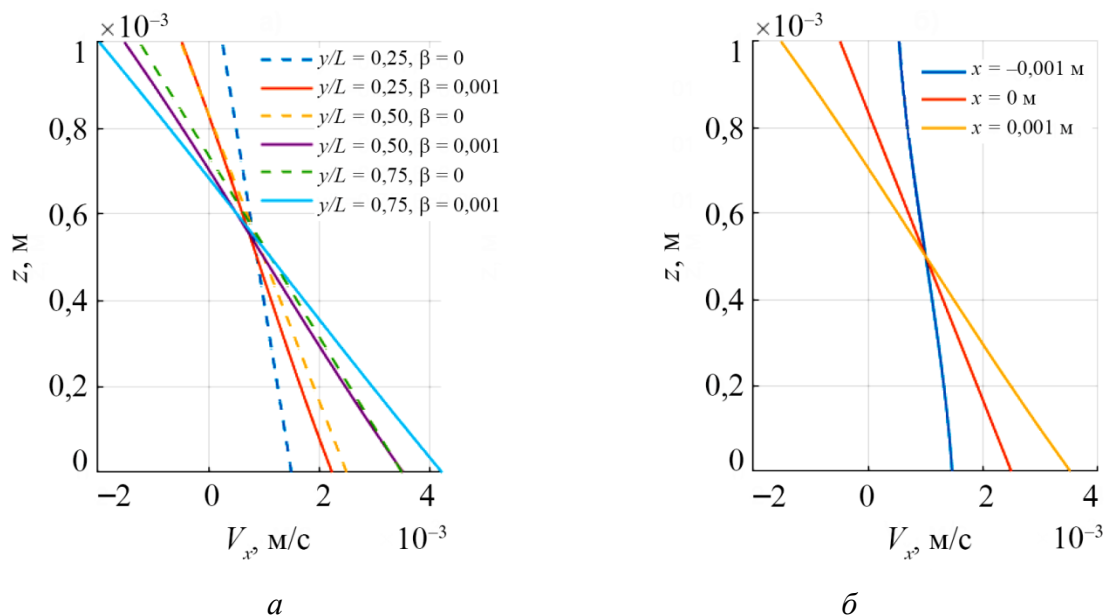


Рис. 1. Профили продольной скорости $V_x(z)$: при $x = 1$ мм для различных y , сравнение с классическим течением Куэтта (а); при $y = L/2$ для различных x (б)

На рис. 1 представлены профили продольной скорости $V_x(z)$ при фиксированном $x = 1$ мм для трех значений поперечной координаты $y = L/4, L/2, 3L/4$. Выбор $x = 1$ мм (отличного от нуля) обусловлен тем, что при $x = 0$ влияние проницаемости на продольную скорость исчезает, поскольку слагаемое, пропорциональное βx , обращается в нуль. Таким образом, именно при ненулевых x проявляется квазитрехмерный характер течения, связанный с локальным массообменом. Пунктирными линиями показано классическое течение Куэтта ($\beta = 0$), сплошными – решение с проницаемыми границами. Видно, что влияние проницаемости проявляется в отклонении профилей от линейной формы, причем знак отклонения зависит от знака $\sin(\pi(y - y_1)/L)$. На рис. 1 б показана зависимость профилей $V_x(z)$ от ко-

ординаты x при фиксированном $y = L/2$; линейный рост амплитуды отклонения при различных значениях x подтверждает структуру решения (21).

Профили на рис. 1 количественно иллюстрируют вертикальные сечения векторных полей, показанных на рис. 3. Следует отметить, что рис. 1 отображает только продольную компоненту V_x , тогда как цветовая шкала на рис. 3 соответствует модулю полной скорости $|V| = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$. Сечение на рис. 1 б выполнено при $y = L/2$ (плоскость симметрии, где $V_z = 0$), поэтому там модуль скорости совпадает с $|V_x|$. На рис. 3 показаны сечения в зонах максимальной проницаемости ($y = L/4$ и $3L/4$), где вклад нормальной компоненты V_z существенен. Положительные и отрицательные значения V_x на рис. 1 а для сечений $y = L/4$ и $y = 3L/4$ соответственно согласуются с направлением векторов скорости на рис. 3.

На рис. 2 приведены поля скорости в плоскости (y, z) при $x = 0$. Контурный график V_x (рис. 2 а) демонстрирует линейную зависимость от y и z , обусловленную слагаемыми $U(y, z)$. Поле V_z (рис. 2 б) не зависит от x и имеет характерную структуру: положительные значения в левой половине области (вдув) и отрицательные в правой (отсос), с максимумом на границах и затуханием к центру слоя.

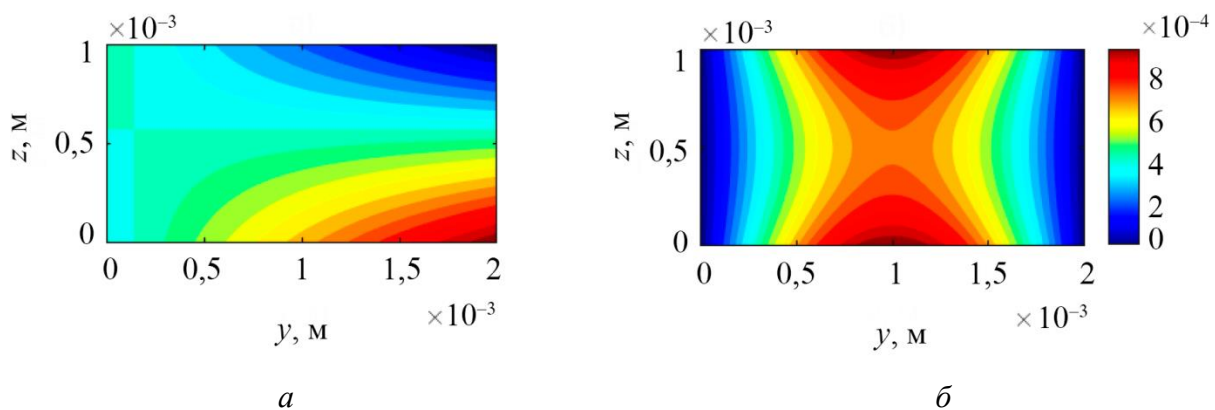


Рис. 2. Поля скорости в плоскости (y, z) при $x = 0$: V_x (а); V_z (б)

На рис. 3 изображены векторные поля (V_x, V_z) в плоскости (x, z) для двух характерных сечений: $y = L/4$ (область вдува) и $y = 3L/4$ (область отсоса). В области вдува жидкость движется от нижней и верхней границ к центру, одновременно смещаясь вдоль оси x . В области отсоса, наоборот, жидкость стягивается к границам. Цветовая шкала отражает модуль скорости; одинаковые пределы для обоих подграфиков позволяют сравнить интенсивность течения.

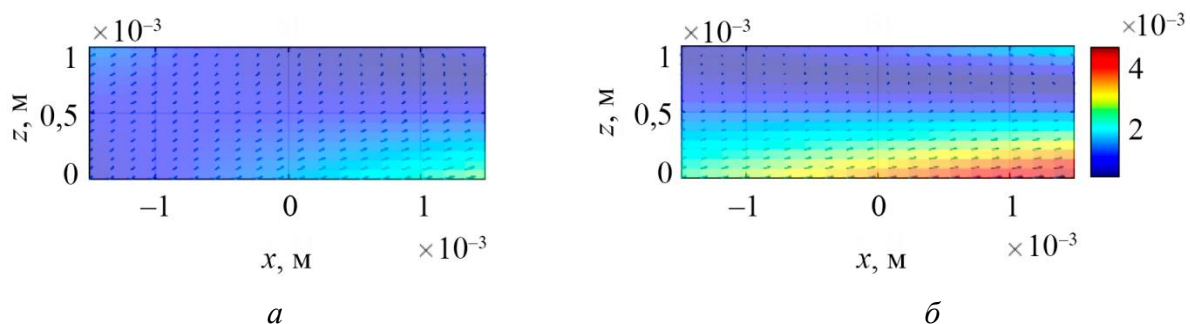


Рис. 3. Векторные поля (V_x, V_z) в плоскости (x, z) для сечений: $y = L/4$ (а); $y = 3L/4$ (б)

Касательное напряжение τ_{zx} (рис. 4) также имеет квазитрехмерную структуру. В области вдува напряжение выше вблизи границ и ниже в области отсоса. Максимальные значения достигаются при больших $|x|$ благодаря линейному росту третьего слагаемого в выражении (23).

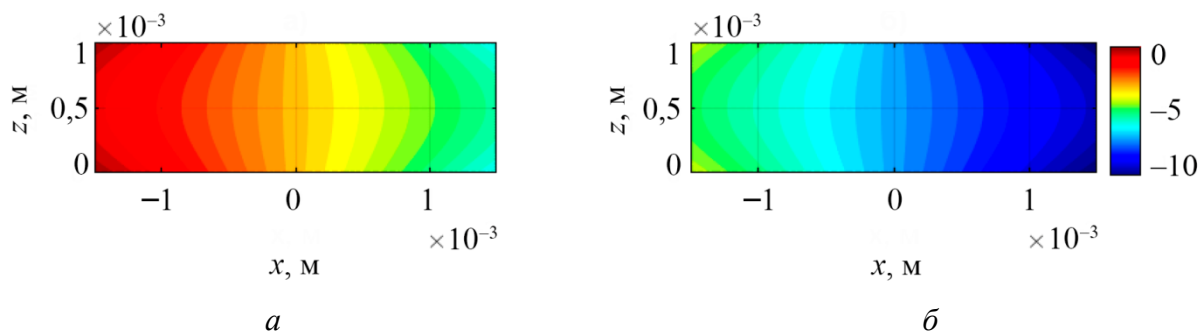


Рис. 4. Касательное напряжение τ_{zx} в плоскости (x, z) для сечений: $y = L/4$ (а); $y = 3L/4$ (б)

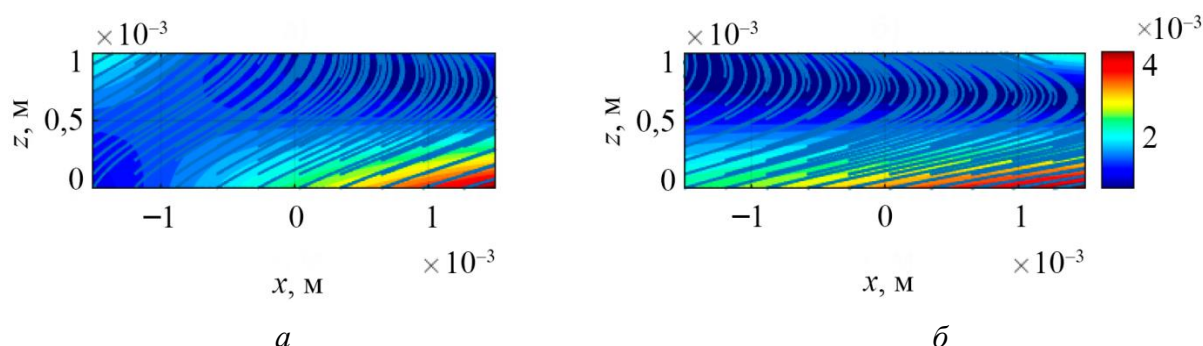


Рис. 5. Модуль скорости и линии тока в плоскости (x, z) для сечений: $y = L/4$ (а); $y = 3L/4$ (б)

На рис. 5 представлены линии тока, наложенные на поле модуля скорости. В области вдува линии тока направлены от границ к центру, в области отсоса – от центра к границам. Форма линий отражает комбинацию продольного сноса и вертикального движения.

5. Заключение

Получено точное аналитическое решение уравнений Стокса для стационарного квазитрехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости в слое с локально проницаемыми границами при нулевом суммарном потоке. Установлено, что давление постоянно, а квазитрехмерность поля скорости является кинематическим следствием неразрывности. Решение содержит параметр, управляющий интенсивностью массообмена, и в предельном случае переходит в классическое течение Куэтта. Проведенная визуализация подтверждает структуру течения и демонстрирует его основные особенности. Полученные результаты могут быть использованы для верификации численных методов и моделирования микрофлюидных устройств.

Литература

1. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 196 p.
2. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
3. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
4. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1953. – Vol. 24 (9). – P. 1232–1235. – DOI: 10.1063/1.1721476.
5. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27 (3). – P. 267–269. – DOI: 10.1063/1.1722355.

6. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1956. – Vol. 78 (4). – P. 719–724. – DOI: 10.1115/1.4013794.
7. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26 (4). – P. 489–490. – DOI: 10.1063/1.1722024.
8. Berman A. S. Concerning laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27 (12). – P. 1557. – DOI: 10.1063/1.1722307.
9. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2004. – Vol. 36. – P. 381–411. – DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
10. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. R. Evans, E. Bonaccorso, H.-J. Butt, V. S. J. Craig // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68 (12). – P. 2859. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
11. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Appl. Mech. Rev. – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
12. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
13. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
14. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 5. – P. 6–28. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
15. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 5. – P. 66–86. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
16. Губарева К. В., Просвирыков Е. Ю., Еремин А. В. Точное квадратичное полиномиальное решение для описания неоднородного течения Куэтта–Пуазейля в бесконечном горизонтальном слое с проницаемыми границами // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2026. – Т. 18 (1). – С. 4762. – DOI: 10.14529/mmph260106.
17. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html
18. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. – 2022. – Vol. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
19. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : ИПМех РАН, 2020. – 384 с.
20. Lin C. C. The Theory of Hydrodynamic Stability. – Cambridge : University Press, 1955. – 155 p.
21. Craik A. D. D., Criminale W. O. Evolution of wavelike disturbances in shear flows: a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences – 1986. – Vol. 406. – P. 13–26.
22. Polyanin A. D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables // Doklady Physics. – 2001. – Vol. 46. – P. 726–731. – DOI: 10.1134/1.1415590.

23. Kundu P. K., Cohen I. M., Dowling D. R. Fluid Mechanics. – 6th ed. – Academic Press, 2015. – 921 p.
24. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible // Handbuch der Physik / ed. by S. Flügge. – Berlin : Springer, 1963. – P. 1–384. – Vol. VIII/2.
25. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid // Russian Aeronautics. – 2015. – Vol. 58 (4). – P. 413–418. – DOI: 10.3103/S1068799815040091.
26. Batchelor G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge University, 1967. – 616 p.
27. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34. – P. 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.
28. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34. – P. 123104. – DOI: 10.1063/5.0127990.
29. Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. – 9th ed. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2017. – 805 p.
30. White F. M. Viscous Fluid Flow. – Boston, Mass. : McGraw-Hill. – 629 p.