

Received: 04.01.2026

Revised: 04.06.2026

Accepted: 12.06.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.059-073

AN EXACT SOLUTION FOR THE STATIONARY INHOMOGENEOUS COUETTE FLOW BETWEEN PERMEABLE PLATES WITH THE NAVIER SLIP CONDITION

K. V. Gubareva^{1, a, *}, E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}, and A. V. Eremin^{1, c}

¹Samara State Technical University,

244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^c  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

An exact solution is obtained for the stationary flow of a viscous incompressible fluid between two infinite parallel plates, accounting for boundary permeability and the partial slip condition. The problem considers an asymmetric configuration where the Navier slip condition is specified on the lower plate and the classical no-slip condition is set on the upper plate, with a constant normal flow through both boundaries. The method of separation of variables with a linear ansatz in the transverse coordinate is used to derive an exact closed-form solution generalizing the classical Couette flow. Limiting cases corresponding to various physical situations are analyzed. Numerical simulation for water and mineral oil demonstrates the decisive influence of the dimensionless parameter wh/v on the flow structure, the distribution of velocity and shear stresses. The results are relevant for problems of the mechanics of fluids, microfluid systems, and hydrodynamic lubrication. They can be applied to the development of methodologies for predicting the behavior of fluid systems under extreme conditions.

Keywords: Couette flow, permeable boundaries, Navier slip condition, exact solution, fluid mechanics, hydrodynamic modeling, microfluidics, shear flow

References

1. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 p.
2. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23, 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
3. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyandin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Stokes, G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, 1851, 9 (2), 8–106.
5. Couette, M. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, 21, 433–510.
6. Lauga, E., Brenner, M., and Stone, H. Microfluidics: the no-slip boundary condition. In: Tropea, C., Yarin, A.L., and Foss, J.F., eds., *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*:

Springer Handbooks, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 1219–1240. DOI: 10.1007/978-3-540-30299-5_19.

7. Berman, A.S. *Laminar Flow in Channels with Porous Walls*, vol. 944, Carbide and Carbon Chemicals Company, K-25 Plant, 1952.

8. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccorso, E., Butt, H.-J., and Craig, V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, 68 (12), 2859. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.

9. Itoh, S., Tanaka, N., and Tani, A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition in Hölder spaces. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2003, 5, 275–301. DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.

10. Yuan, S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*, 1956, 27 (3), 267–269. DOI: 10.1063/1.1722355.

11. Sellars, J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, 26 (4), 489–490. DOI: 10.1063/1.1722024.

12. Yuan, S.W. and Finkelstein, A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1956, 78 (4), 719–724.

13. Beirão da Veiga, H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, 2004, 9 (9–10), 1079–1114. DOI: 10.57262/ade/1355867914.

14. Pukhnachev, V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, 4 (1), 6–76. (In Russian).

15. Borzenko, E.I., Diakova, O.A., and Shrager, G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, 2 (28), 35–44. (In Russian).

16. Wang, C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, 42 (11S), 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.

17. Berker, R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. In: Flügge, S., ed., *Handbuch der Physik*, vol. 8/2, Springer, Berlin, 1963, pp. 1–384.

18. Bodewadt, U.T. Die Drehströmung über festem Grunde. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1940, 20 (5), 241–253.

19. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html

20. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 66–86. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html

21. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html

22. Aristov, S.N. and Gitman, I.M. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 2002, 464, 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.

23. Terrill, R.M. Laminar flow in a uniformly porous channel. *Aeronautical Quarterly*, 1964, 15 (3), 299–310. DOI: 10.1017/S0001925900010908.

24. Regirer, S.A. An approximate theory of the flow of a viscous incompressible fluid in tubes with porous walls. *Izv Vuzov. Matematika*, 1962, 5 (30), 65–74. (In Russian).
25. Goncharova, O.N., Hennenberg, M., Rezanova, E.V., and Kabov, O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2013, 1 (4), 317–338. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20.
26. Mehdizadeh, A. and Oberlack, M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates. *Physics of Fluids*, 2010, 22 (10), 105104. DOI: 10.1063/1.3488039.
27. Greenspan, H.P. *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge U.P., 1968, 327 p.
28. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L., and Sammakia, B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, Hemisphere, 1989.
29. Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I. *Metody razdeleniya peremennyykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Izd. IPMekh RAN Publ., Moscow, 2020, 384 p. (In Russian).
30. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, vol. 34, 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
31. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2, 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
32. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
33. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.

Подана в журнал: 04.01.2026

УДК 532.135

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.4.059-073

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО НЕОДНОРОДНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛАСТИНАМИ С УСЛОВИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ НАВЬЕ

К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвирыков^{2, 3, 6}, А. В. Еремин^{1, в}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^в  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе представлено точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, учитывающее проницаемость границ и условие частичного скольжения. Рассмотрена асимметричная конфигурация, где на нижней пластине задано условие скольжения Навье, а на верхней – классическое условие прилипания, при постоянном нормальном потоке жидкости через обе границы. Методом разделения переменных и линейного по поперечной координате анзаца получено точное решение в замкнутой форме, обобщающее классическое течение Куэтта. Проведен анализ предельных случаев, соответствующих различным физическим ситуациям. Численное моделирование для воды и минерального масла демонстрирует определяющее влияние безразмерного параметра wh/v на структуру течения, распределение скорости и касательных напряжений. Результаты представляют интерес для задач механики жидкостей, микрофлюидных систем, гидродинамической смазки и могут быть использованы при разработке методик прогнозирования поведения жидкостных систем в экстремальных условиях.

Ключевые слова: течение Куэтта, проницаемые границы, условие скольжения Навье, точное решение, механика жидкости, гидродинамическое моделирование, микрофлюидика

1. Введение

Исследование точных решений уравнений Навье – Стокса занимает центральное место в теоретической гидродинамике и имеет фундаментальное значение для понимания широкого класса течений вязкой жидкости [1–3]. Эти решения не только служат эталоном для проверки численных методов и экспериментальных данных, но и позволяют выявить качественные закономерности, часто упускаемые при приближенных подходах. Классическое течение Куэтта, описывающее движение жидкости между параллельными пластинами, представляет собой одну из базовых моделей в механике сплошных сред и находит применение в различных областях – от трибологии до микрофлюидики [4–6].

Современные технологические задачи, связанные с проектированием высоконагруженных узлов трения, микрофлюидных устройств, систем охлаждения и фильтрации, требуют учета сложных граничных условий, выходящих за рамки классической постановки [7–9]. В частности, проницаемость границ, обеспечивающая вдув или отсос жидкости, существенно изменяет структуру течения и характеристики переноса [10–12]. Одновременно в микро- и наномасштабных системах, а также при взаимодействии жидкостей с супергидрофобными поверхностями классическое условие прилипания может не выполняться, что требует введения условий скольжения [13–15]. Условие скольжения Навье, устанавливающее линейную зависимость между тангенциальной скоростью жидкости на границе и градиентом скорости, стало стандартным инструментом для моделирования подобных эффектов [16–18].

Актуальным направлением исследований является совместное рассмотрение проницаемости границ и условий скольжения, что соответствует многим практическим ситуациям в механике и материаловедении [19–21]. Например, в задачах гидродинамической смазки с принудительной подачей смазочного материала одна поверхность может быть пористой (проницаемой) и характеризоваться частичным скольжением, в то время как другая остается гладкой с условием прилипания [22–24]. Такие конфигурации встречаются также в микрофлюидных чипах с функционализированными поверхностями, мембранных технологиях и системах конвективного теплообмена [25–27].

В контексте развития методологий прогнозирования ресурса механизмов и конструкций, работающих в экстремальных условиях, точные решения для течений с проницаемыми границами и скольжением представляют особую ценность [28–30]. Они позволяют устанавливать аналитические зависимости между параметрами течения и характеристиками материалов, что необходимо для создания комплексных моделей, учитывающих взаимодействие гидродинамических, тепловых и деформационных процессов [31–33].

Целью настоящей работы является получение точного аналитического решения для стационарного неоднородного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами с учетом постоянной нормальной скорости на границах и условия скольжения Навье на нижней пластине. Основные задачи исследования включают: математическую постановку краевой задачи, вывод точного решения методом разделения переменных с использованием анзаца, линейного по поперечной координате, анализ предельных случаев и численное исследование влияния физических параметров на структуру течения и распределение касательных напряжений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, расстояние между которыми составляет h . Введем декартову систему координат (x, y, z) , где ось x направлена вдоль пластин в направлении основного течения, ось y – вдоль пластин в поперечном направлении, ось z – перпендикулярно пластинам. Нижняя пластина расположена при $z = 0$, верхняя – при $z = h$. Обе пластины являются проницаемыми, и через них происходит постоянный нормальный поток жидкости со скоростью w , где $w > 0$ соответствует вдуву, а $w < 0$ – отсосу. Пластины предполагаются бесконечными в направлениях x и y ; краевыми эффектами на торцах пренебрегаем. В случае пластин конечных размеров представленная модель остается корректной в центральной области течения, удаленной от боковых границ, где влияние концевых трехмерных эффектов пренебрежимо мало по сравнению с основным сдвиговым течением.

Поле скорости ищем в виде

$$\mathbf{V} = (V_x(y, z), 0, w), \quad (1)$$

что автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Уравнение Навье – Стокса для стационарного течения в отсутствие массовых сил в проекции на ось x принимает вид

$$\rho w \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

Рассматривается сдвиговое течение, вызванное заданными скоростями на границах и постоянным поперечным потоком, без наложения продольного градиента давления. Поэтому полагаем $\partial p / \partial x = 0$, что соответствует классической задаче Куэтта и дает возможность изолировать эффекты проницаемости и скольжения, исключив одновременное влияние градиента давления. Тогда уравнение (2) упрощается:

$$\rho w \frac{\partial V_x}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

На нижней пластине ($z = 0$) задано условие скольжения Навье:

$$a \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_x(y, 0) - (W_0 + y\Omega_0), \quad (4)$$

где $a \geq 0$ – коэффициент скольжения (имеющий размерность длины), W_0 и Ω_0 – заданные постоянные, определяющие значение скорости жидкости на нижней границе (при $z = 0$). Физически условие (4) означает, что тангенциальная скорость жидкости на границе пропорциональна производной скорости по нормали.

На верхней пластине ($z = h$) задано условие прилипания:

$$V_x(y, h) = W_1 + y\Omega_1, \quad (5)$$

где W_1 и Ω_1 – заданные постоянные.

3. Точное решение

Решение уравнения (3) ищем в виде, линейном по поперечной координате y :

$$V_x(y, z) = U(z) + yu_1(z), \quad (6)$$

где $U(z)$ и $u_1(z)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Подстановка выражения (6) в уравнение (3) приводит к двум независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\mu U''(z) - \rho w U'(z) = 0, \quad \mu u_1''(z) - \rho w u_1'(z) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, функции $U(z)$ и $u_1(z)$ удовлетворяют одинаковым линейным однородным уравнениям второго порядка.

Введем вспомогательный параметр $\alpha = w/v$ (размерность м^{-1}) – обратную длину пространства возмущения от поперечного потока. Его безразмерная форма $\alpha h = wh/v$ представляет собой число Рейнольдса поперечного потока и характеризует соотношение интенсивности конвективного переноса через границу и вязкой диффузии в объеме жидкости.

Общие решения уравнений (7) имеют вид

$$f(z) = C_1 + C_2 e^{\alpha z},$$

где $f(z)$ обозначает либо $U(z)$, либо $u_1(z)$, а C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Положим $u_1(z) = A_1 + A_2 e^{az}$. Используя граничные условия (4) и (5) для u_1 , получим систему

$$\begin{cases} u_1(h) = A_1 + A_2 e^{ah} = \Omega_1, \\ au_1'(0) = aA_2\alpha = u_1(0) - \Omega_0 = (A_1 + A_2) - \Omega_0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $A_1 = \Omega_0 + A_2(a\alpha - 1)$. Подставляя в первое уравнение, находим

$$A_2 = \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{D}, A_1 = \Omega_0 + \frac{(\Omega_1 - \Omega_0)(a\alpha - 1)}{D},$$

где введен знаменатель

$$D = a\alpha - 1 + e^{ah}.$$

Следовательно,

$$u_1(z) = \Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{a\alpha - 1 + e^{az}}{D}. \quad (8)$$

Совершенно аналогично для функции $U(z)$ из тех же уравнений (7) и граничных условий (4), (5) определяем константы и получаем

$$U(z) = W_0 + (W_1 - W_0) \frac{a\alpha - 1 + e^{az}}{D}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в решение (6), приходим к точному решению задачи:

$$V_x(y, z) = \left[W_0 + (W_1 - W_0) \frac{a\alpha - 1 + e^{az}}{D} \right] + y \left[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{a\alpha - 1 + e^{az}}{D} \right]. \quad (10)$$

Полученное решение (10) позволяет исследовать различные физические предельные случаи, которые соответствуют известным классическим результатам и представляют интерес для прикладных задач механики.

Отсутствие проницаемости ($w = 0$, $a = 0$). При $a \rightarrow 0$ разложим экспоненты в ряд Тейлора: $e^{az} \approx 1 + az$, $e^{ah} \approx 1 + ah$. Тогда

$$\frac{a\alpha - 1 + e^{az}}{D} \rightarrow \frac{z + a}{h + a}.$$

Подставляя в решение (10), получаем:

$$V_x(y, z) \rightarrow W_0 + (W_1 - W_0) \frac{z + a}{h + a} + y \left[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{z + a}{h + a} \right].$$

При $a = 0$ отсюда следует классический линейный профиль Куэтта, широко используемый в механике жидкостей.

Отсутствие скольжения ($a = 0$). Условие (4) переходит в условие прилипания. Тогда $D = e^{ah} - 1$, и решение принимает вид

$$V_x(y, z) = W_0 + (W_1 - W_0) \frac{e^{az} - 1}{e^{ah} - 1} + y \left[\Omega_0 + (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{e^{az} - 1}{e^{ah} - 1} \right].$$

Это решение соответствует классическому течению Куэтта между проницаемыми пластинами с условиями прилипания на обеих границах и находит применение в задачах фильтрации и массообмена.

Полное скольжение ($a \rightarrow \infty$). При ($a \rightarrow \infty$) условие Навье переходит в условие нулевого касательного напряжения: $\partial V_x / \partial z = 0$ при $z = 0$. Поделив числитель и знаменатель в решении (10) на a и устремив ($a \rightarrow \infty$), получим $(a\alpha - 1 + e^{\alpha z})/D \rightarrow 1$, а следовательно,

$$V_x(y, z) \rightarrow W_1 + y\Omega_1.$$

Таким образом, при полном скольжении на нижней пластине поле скорости становится однородным и совпадает со скоростью верхней пластины. Этот предельный случай важен для анализа течений на супергидрофобных поверхностях.

Вектор завихренности $\omega = \nabla \times V$ имеет компоненты:

$$\omega_x = 0, \omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial z}, \omega_z = -\frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Используя решение (10), находим:

$$\omega_y = \frac{\alpha e^{\alpha z}}{D} [(W_1 - W_0) + y(\Omega_1 - \Omega_0)],$$

$$\omega_z = -\Omega_0 - (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{a\alpha - 1 + e^{\alpha z}}{D}.$$

Касательное напряжение определяется согласно закону Ньютона:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} = \mu \omega_y = \mu \frac{\alpha e^{\alpha z}}{D} [(W_1 - W_0) + y(\Omega_1 - \Omega_0)]. \quad (11)$$

В принятой постановке $\partial p / \partial x = 0$ по условию задачи. Уравнения Навье – Стокса в проекциях на оси y и z при заданной структуре течения дают $\partial p / \partial y = 0$ и $\partial p / \partial z = 0$. Следовательно, давление постоянно во всем объеме, что характерно для чисто сдвиговых течений.

4. Результаты и обсуждение

Для анализа влияния физических параметров на структуру течения и распределение механических напряжений проведено численное моделирование для двух типов жидкостей с различными вязкостными свойствами: воды при 20 °C ($\nu = 10^{-6}$ м²/с) и минерального моторного масла SAE 30-40 при той же температуре ($\nu = 10^{-4}$ м²/с). Основные параметры модели, выбранные в соответствии с типичными масштабами микрофлюидных систем и тонких смазочных слоев: расстояние между пластинами $h = 100$ мкм, скорость проницаемости $w = 0,01$ м/с, коэффициент скольжения $a = 50$ мкм. Граничные условия: нижняя пластина неподвижна ($W_0 = 0, \Omega_0 = 0$), верхняя движется со скоростью $W_1 = 0,1$ м/с и параметром сдвига $\Omega_1 = 2000$ с⁻¹.

Определяющим безразмерным параметром, характеризующим относительное влияние конвективного переноса за счет вдува по сравнению с вязкой диффузией, является $ah = wh/\nu$. Для воды этот параметр равен 1, что свидетельствует о сопоставимости конвективных и вязких эффектов. Для масла $ah = 0,01$, что указывает на доминирование вязких сил. Как следует из аналитического решения (10), величина ah непосредственно определяет степень нелинейности профиля скорости: при $ah \ll 1$ профиль близок к линейному, тогда как при $ah \sim 1$ и более наблюдается существенное экспоненциальное искривление.

На рис. 1 представлена эволюция профиля скорости $V_x(z)$ при фиксированном $y = 0$ для различных значений коэффициента скольжения a в диапазоне от 10^{-6} до 10^{-4} м. Для во-

ды, характеризующейся значением $\alpha h = 1$, профили скорости демонстрируют выраженную нелинейность.

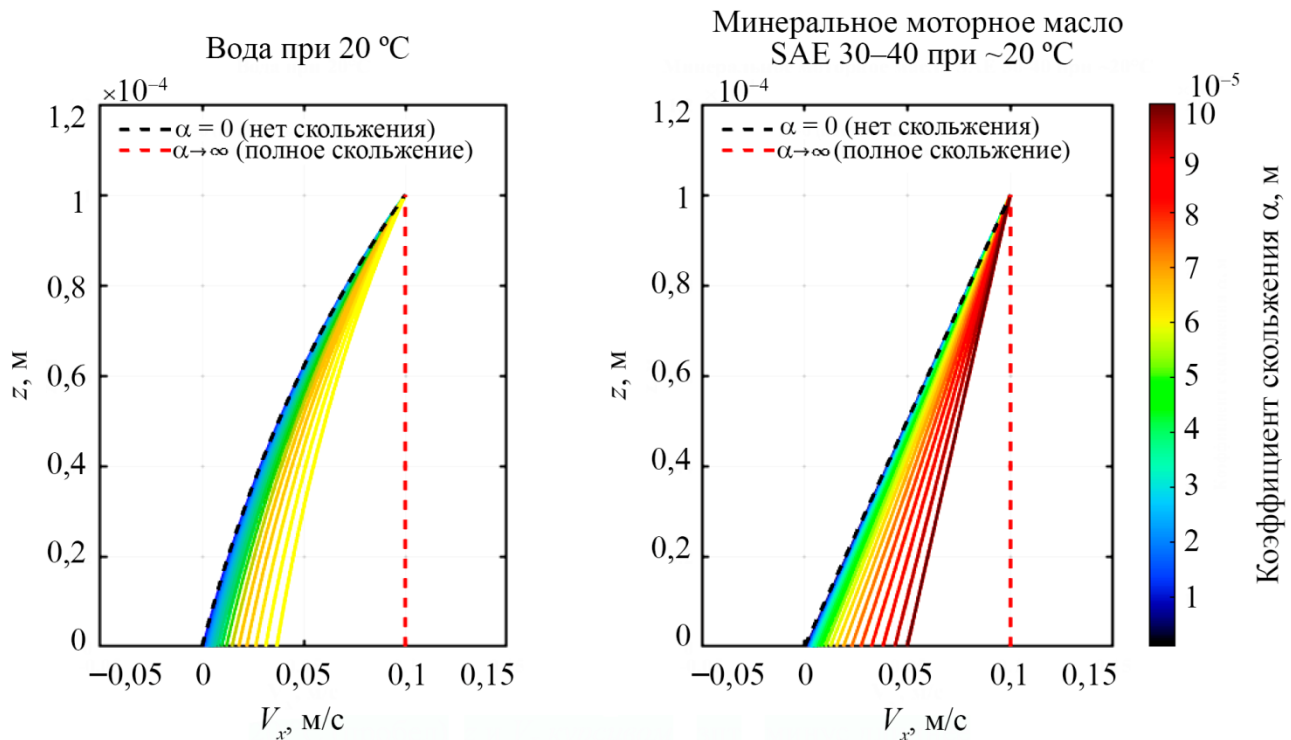


Рис. 1. Эволюция профиля скорости в зависимости от значения параметра скольжения при $w = 0,1$ м/с

С увеличением коэффициента скольжения распределение скорости становится более равномерным по высоте канала, приближаясь к предельному случаю полного скольжения. Для масла с $\alpha h = 0,01$ профили скорости практически линейны при всех рассмотренных значениях α , что отражает слабое влияние вдува по сравнению с вязкими силами. Данные результаты иллюстрируют возможность управления профилем скорости путем варьирования свойств граничных поверхностей, что актуально для задач управления тепломассопереносом в микрофлюидных устройствах.

Рисунок 2 демонстрирует влияние интенсивности вдува на профили скорости при фиксированном коэффициенте скольжения $\alpha = 50 \mu\text{m}$. Рассмотрены три значения скорости проницаемости: $w = 0,005, 0,01$ и $0,02$ м/с, что соответствует $\alpha h = 0,5, 1$ и 2 для воды и $\alpha h = 0,005, 0,01$ и $0,02$ для масла. Для воды увеличение скорости вдува приводит к усилению нелинейности профиля, причем при $w = 0,02$ м/с ($\alpha h = 2$) наблюдается образование области обратного течения вблизи нижней пластины. Для масла профили сохраняют практически линейный характер даже при максимальной рассмотренной скорости вдува. Эти результаты подчеркивают определяющую роль безразмерного параметра αh в формировании структуры течения.

На рис. 3 показано распределение касательных напряжений $\tau_{zx}(y, z)$. Для воды, где $\alpha h = 1$, экспоненциальный множитель e^{az} создает умеренный градиент напряжения по высоте, что видно по относительно равномерному распределению изолиний. Для масла с $\alpha h = 0,01$ экспоненциальная зависимость выражена слабо, а основное изменение напряжения происходит из-за линейной зависимости от поперечной координаты y . Максимальные значения напряжений у верхней пластины для масла существенно превышают аналогичные значения для воды, что объясняется большей динамической вязкостью. Анализ распределе-

ния касательных напряжений важен для оценки механических нагрузок на граничные поверхности и прогнозирования их износостойкости.

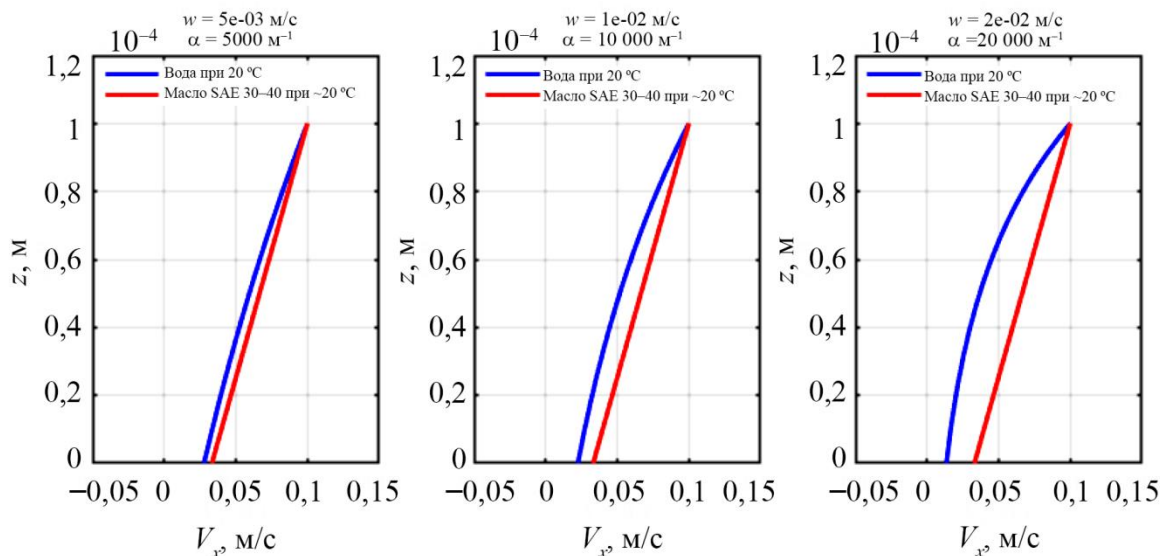


Рис. 2. Профили скорости при разной проницаемости

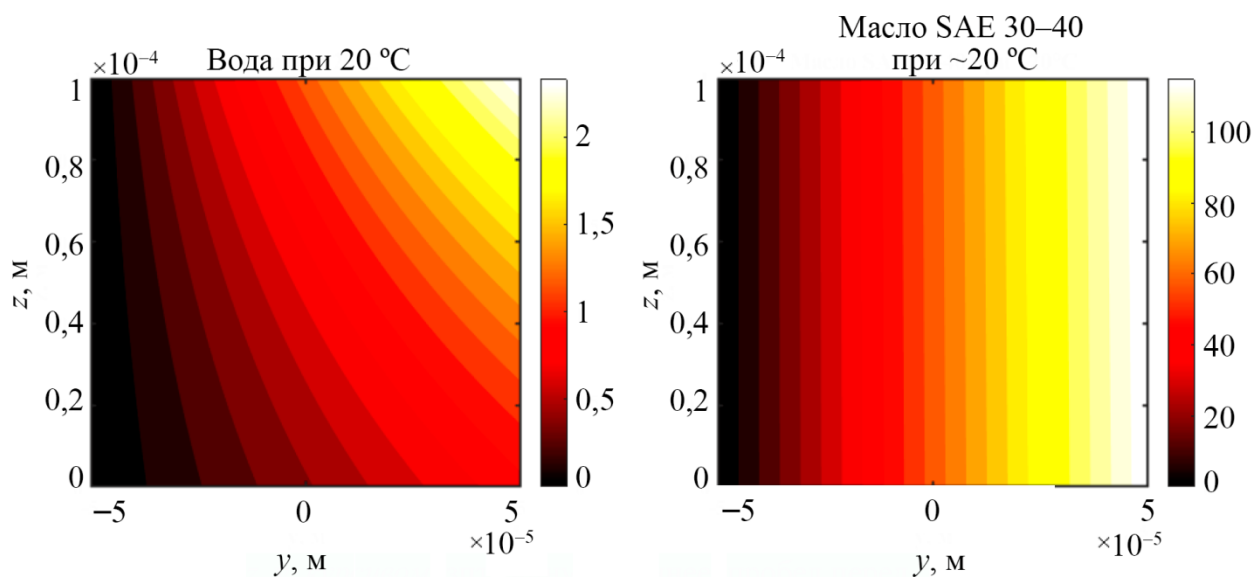


Рис. 3. Изолинии касательного напряжения

Рисунок 4 представляет трехмерные поверхности продольной скорости $V_x(y, z)$. Для воды поверхность имеет выраженную кривизну по координате z и линейный наклон по координате y , что соответствует структуре неоднородного сдвигового течения. Для масла поверхность близка к плоскости с небольшим линейным изменением по z и y , что характерно для почти классического течения Куэтта. Визуализация трехмерной структуры течения полезна для понимания пространственного распределения кинематических характеристик.

Рисунок 5 иллюстрирует пространственное распределение касательных напряжений $\tau_{zx}(y, z)$. Поверхность для воды демонстрирует умеренную зависимость от z и линейную зависимость от y . Для масла зависимость от z выражена слабо, а линейный рост с y приводит к образованию наклонной плоскости. Различие в масштабах напряжений для двух жидкостей превышает два порядка, что важно для расчетов на прочность и износостойкость элементов конструкций, работающих в контакте с жидкостями различной вязкости.

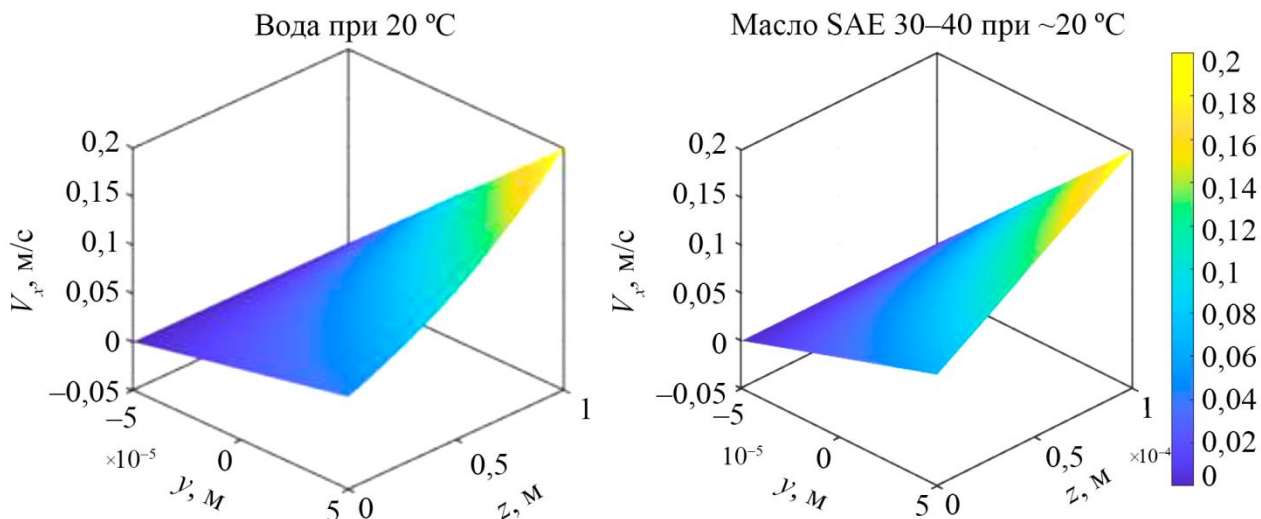


Рис. 4. 3D-поверхность скорости $V_x(y, z)$

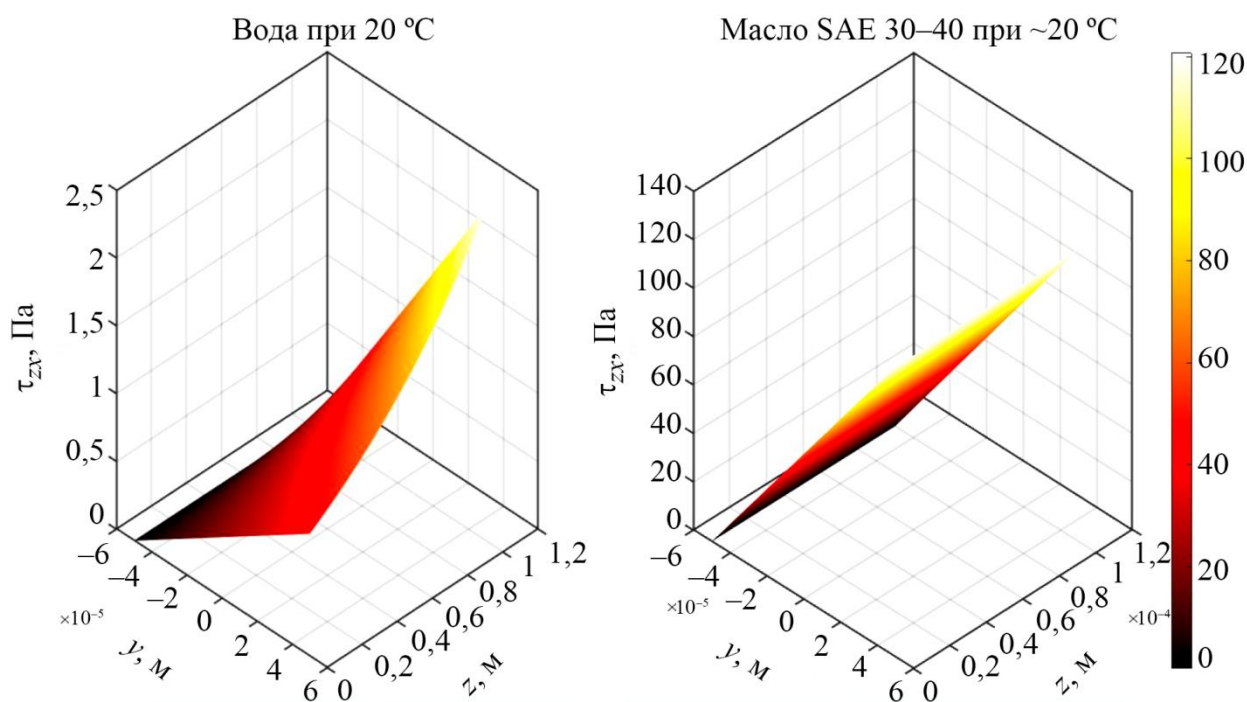


Рис. 5. 3D-поверхность напряжения $\tau_{zx}(y, z)$

Рисунок 6 демонстрирует поле скорости в проекции на плоскость yz с использованием векторной диаграммы (V_x, w). Для воды векторы имеют значительную горизонтальную составляющую во всей области течения, что отражает существенный вклад продольного конвективного переноса. Для масла векторы имеют небольшой наклон, что соответствует доминированию нормального потока над продольным конвективным переносом. Такая визуализация позволяет качественно оценить траектории частиц жидкости и структуру потока.

Численные значения ключевых параметров подтверждают качественный анализ. Число Рейнольдса, рассчитанное по скорости верхней пластины W_1 и характерному размеру h , составляет для воды $Re = W_1 h / \nu = 10$, для масла $Re = 0,1$. В обоих случаях течение является ламинарным, что согласуется с исходными предположениями. Касательное напряжение на нижней пластине при $y = 0$ составляет $1,23 \times 10^{-3}$ Па для воды и $1,35 \times 10^{-1}$ Па для масла.

Полученные значения напряжений могут быть использованы в комплексных моделях механики для оценки нагрузок на элементы конструкций и прогнозирования их ресурса.

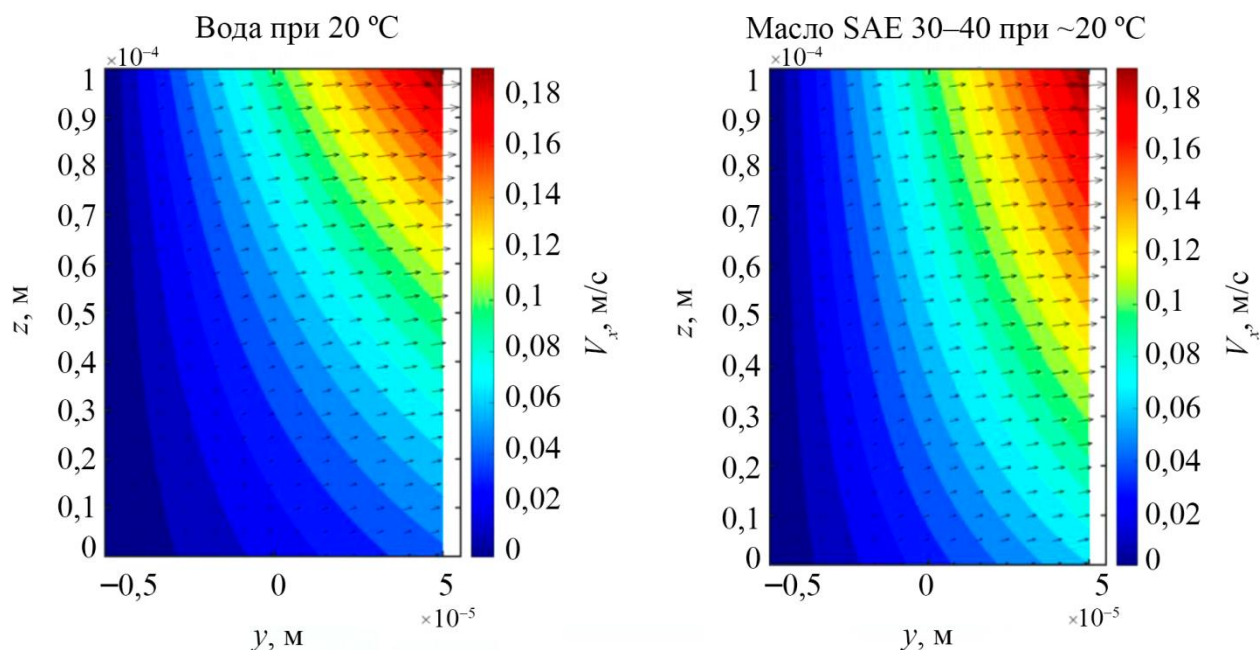


Рис. 6. Векторное поле скорости (V_x , w)

Полученные результаты имеют значение для развития методологий использования результатов гидродинамического моделирования в задачах механики и материаловедения. Точные аналитические зависимости позволяют устанавливать прямые связи между параметрами течения и механическими напряжениями на границах, что необходимо для создания физически обоснованных критериев оценки работоспособности жидкостных систем. В частности, возможность управления распределением касательных напряжений путем варьирования проницаемости границ и коэффициента скольжения открывает перспективы для оптимизации рабочих характеристик узлов трения, микрофлюидных смесителей и систем охлаждения.

5. Заключение

В работе получено точное аналитическое решение для стационарного неоднородного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами с учетом проницаемости границ и условия скольжения Навье на нижней пластине. Решение выведено методом разделения переменных с использованием анзаца, линейного по поперечной координате, и имеет компактную замкнутую форму. Оно обобщает классическое течение Куэтта на случай асимметричных граничных условий, что расширяет область его применимости для моделирования реальных физических систем.

Проведенный анализ предельных случаев показал, что решение согласуется с известными классическими результатами: при отсутствии проницаемости воспроизводится линейный профиль скорости со скольжением, при отсутствии скольжения – экспоненциальный профиль для проницаемых границ с прилипанием, при полном скольжении – однородное течение. Особенностью решения является наличие устранимой сингулярности при нулевой проницаемости, что требует аккуратного предельного перехода.

Численное исследование для жидкостей с различными вязкостными свойствами выявило определяющую роль безразмерного параметра $ah = wh/\nu$, характеризующего соотношение конвективных и вязких эффектов. Для маловязких жидкостей (вода) даже умеренный вдув приводит к значительному искривлению профиля скорости и возможности возникнове-

ния обратных течений. Для высоковязких жидкостей (масло) течение остается близким к классическому течению Куэтта даже при существенной проницаемости границ. Распределение касательных напряжений существенно зависит от вязкости жидкости и условий на границах, что имеет большое значение для оценки механических нагрузок.

Полученные результаты создают основу для дальнейших исследований, направленных на развитие комплексных методик прогнозирования ресурса механизмов и конструкций, работающих в контакте с жидкостями. Перспективными представляются направления, связанные с учетом нестационарности, тепломассопереноса, нелинейных реологических свойств и деформации граничных поверхностей. В частности, расширение решения на случай постоянного продольного градиента давления (течение Куэтта – Пуазейля) может быть выполнено в рамках предложенного метода, и оно составит предмет дальнейших исследований. Практическое применение решения может быть найдено при проектировании микрофлюидных устройств, систем гидродинамической смазки, теплообменных аппаратов и фильтрационных систем, где требуется точный учет взаимодействия жидкости с проницаемыми границами, характеризующимися частичным скольжением.

Литература

1. Drazin P.G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 196 p.
2. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
3. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Stokes G. G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Transaction of the Cambridge Philosophical Society. – 1851. – Vol. 9, part 2. – P. 8–106.
5. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
6. Lauga E., Brenner M., Stone H. Microfluidics: the no-slip boundary condition // Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics : Springer Handbooks / ed. by C. Tropea, A. L. Yarin, J. F. Foss. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – P. 1219–1240. – DOI: 10.1007/978-3-540-30299-5_19.
7. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. – Carbide and Carbon Chemicals Company, K-25 Plant, 1952. – Vol. 944.
8. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. R. Evans, E. Bonaccorso, H.-J. Butt, V. S. J. Craig // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68 (12). – P. 2859. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
9. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition in Hölder spaces // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2003. – Vol. 5. – P. 275–301. – DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.
10. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // Journal of Applied Physics. – 1956. – Vol. 27 (3). – P. 267–269. – DOI: 10.1063/1.1722355.
11. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26 (4). – P. 489–490. – DOI: 10.1063/1.1722024.
12. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1956. – Vol. 78 (4). – P. 719–724. – DOI: 10.1115/1.4013794.

13. Beirão da Veiga H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions // *Advances in Differential Equations* – 2004. – Vol. 9 (9–10). – P. 1079–1114. – DOI: 10.57262/ade/1355867914.
14. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*. – 2006. – Т. 4 (1). – С. 6–76.
15. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* – 2014. – № 2 (28). – С. 35–44.
16. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
17. Berker R. *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible* // *Handbuch der Physik* / ed. by S. Flügge. – Berlin : Springer, 1963. – P. 1–384. – Vol. VIII/2.
18. Bodewadt U. T. Die Drehströmung über festem Grunde // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. – 1940. – 20 (5). – 241–253.
19. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2025. – Iss. 5. – P. 6–28. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
20. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2025. – Iss. 5. – P. 66–86. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html
22. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215. – DOI: 10.1017/S0022112002001003.
23. Terrill R. M. Laminar flow in a uniformly porous channel // *Aeronautical Quarterly*. – 1964. – Vol. 15 (3). – P. 299–310. – DOI: 10.1017/S0001925900010908.
24. Регирер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // *Изв. вузов. Математика*. – 1962. – № 5. – С. 65–74.
25. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system / O. N. Goncharova, M. Hennenberg, E. V. Rezanova, O. A. Kabov // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2013. – Vol. 1 (4). – P. 317–338. – DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20.
26. Mehdizadeh A., Oberlack M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates // *Physics of Fluids*. – 2010. – Vol. 22 (10). – 105104. – DOI: 10.1063/1.3488039.
27. Greenspan H. P. *The theory of rotating fluids*. – Cambridge U.P., 1968. – 327 p.
28. *Buoyancy-Induced Flows and Transport* / B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan, B. Sammakia // Hemisphere, 1989.
29. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : ИПМех РАН, 2020. – 384 с.
30. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // *Physics of Fluids*. – 2022. – Vol. 34. – P. 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.

31. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. – 2022. – Vol. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
32. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
33. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.