

Received: 23.06.2025

Revised: 24.07.2025



Accepted: 15.08.2025



DOI: 10.17804/2410-9908.2025.4.006-021

A NUMERICAL SOLUTION TO A SYSTEM OF TWO COUPLED ELLIPTIC EQUATIONS

L. F. Spevak^a and O. A. Nefedova^{b, *}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

^a  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  ifs@imach.uran.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0003-1163-6699>  nefedova@imach.uran.ru

*Corresponding author. Email: nefedova@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 362-3022; fax: +7 (343) 374-5330

A solution is constructed for a system of two coupled elliptic equations. An iterative numerical algorithm based on the method of partial solutions, the collocation method, and the boundary element method is proposed for a boundary value problem in a specified two-dimensional region. The algorithm is implemented as a program with the use of the OpenMP open standard of concurrent programming. To verify the algorithm and the program, simple exact solutions are found for two particular cases of the system under study. A computational experiment is performed, showing a good agreement of the calculation results with the exact solutions. Computer-assisted convergence of the numerical algorithm with respect to the number of boundary element nodes and collocation points is demonstrated.

Keywords: system of elliptic equations, boundary element method, collocation method, radial basis functions, parallel computations, OpenMP

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment, registration number 124020600042-9.

References

1. Polyanin, A.D. and Nazaikinskii, V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC Press, New York, 2015, 1643 p. DOI: 10.1201/b19056.
2. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC Press, New York, 2012, 1912 p. DOI: 10.1201/b11412.
3. *EqWorld. Mir Matematicheskikh Uravneny.* (In Russian). Available at: <https://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm/> (accessed 30.04.2025).
4. Ambrosio, L., Carlotto, A., and Massaccesi, A. *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2018, 227 p. DOI: 10.1007/978-88-7642-651-3.
5. Li, C. and Villavert, J.A. Degree theory framework for semilinear elliptic systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2016, 144 (9), 3731–3740. DOI: 10.1090/proc/13166.
6. Azzollini, A., D’Avenia, P., and Pomponio, A. On the Schrödinger–Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term. *AIHPC*, 2010, 27 (2), 779–791. DOI: 10.1016/j.aihpc.2009.11.012.
7. Ambrosetti, A. On Schrödinger–Poisson systems. *Milan Journal of Mathematics*, 2008, 76, 257–274. DOI: 10.1007/s00032-008-0094-z.

8. Gantner, G. and Praetorius, D. Adaptive BEM for elliptic PDE systems, part II: isogeometric analysis with hierarchical B-splines for weakly-singular integral equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2022, 117, 74–96. DOI: 10.1016/j.camwa.2022.04.006.
9. Liu, M., Cai, Z., and Ramani, K. Dual Neural Network (DuNN) method for elliptic partial differential equations and systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2025, 467, 116596. DOI: 10.1016/j.cam.2025.116596.
10. Kazakov, A. and Spevak, L. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, 10 (9), 1559. DOI: 10.3390/math10091559.
11. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. Exact and approximate solutions of a degenerate reaction-diffusion system. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, 62 (4), 673–683. DOI: 10.1134/S0021894421040179.
12. Fedotov, V.P., Spevak, L.F., and Nefedova, O.A. A software package designed to solve the potential theory problems by the boundary element method. *Programmnye Produkty i Sistemy*, 2014, 108 (4), 178–182. (In Russian). DOI: 10.15827/0236-235X.108.178-182.
13. Spevak, L.F. and Nefedova, O.A. Parallel technology for solving the Poisson equation in axisymmetric domains by the boundary element method. *AIP Conf. Proc.*, 2018, 2053, 030070. DOI: 10.1063/1.5084431.
14. Nefedova, O.A. and Spevak, L.F. Parallel technology for solving axisymmetric problems of the theory of elasticity by the boundary element method. *AIP Conf. Proc.*, 2020, 2315, 020030. DOI: 10.1063/5.0037021.
15. Spevak, L.F. and Nefedova, O.A. Parallelizing the solution of the nonlinear heat conduction problem with the application of the OpenCL library. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, 6, 80–91. DOI: 10.17804/2410-9908.2016.6.080-091. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-6/2016-6_113.html
16. Kazakov, A.L., Spevak, L.F., and Nefedova, O.A. Simultaneous application of the boundary element method and the power series method for solving a two-dimensional problem of heat wave motion. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, 6, 6–15. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.006-015. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-6/2017-6_151.html
17. Spevak, L.F. and Nefedova, O.A. Parallel technology for solving nonstationary heat conduction problems in axisymmetric domains. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 5, 60–71. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.60-71. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-5/2021-5_349.html
18. Kazakov, A., Spevak, L., Nefedova, O., and Lempert, A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term. *Symmetry*, 2020, 12 (6), 921. DOI: 10.3390/sym12060921.
19. Kazakov, A.L., Nefedova, O.A., and Spevak, L.F. Solution to a two-dimensional nonlinear parabolic heat equation subject to a boundary condition specified on a moving manifold. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, 64 (2), 266–284. DOI: 10.1134/S0965542524020052.
20. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer, Berlin, Neidelberg, New York, Tokyo, 2012, 478 p.
21. Partridge, P.W., Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.
22. Golberg, M.A., Chen, C.S., and Bowman, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 1999, 23 (4), 285–296. DOI: 10.1016/s0955-7997(98)00087-3.
23. Al-Bayati, S.A. and Wrobel, L.C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions. *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, 145, 367–377. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.07.003.

24. Zakerdoost, H. and Ghassemi, H. Dual reciprocity boundary element method for steady state convection-diffusion-radiation problems. *International Journal of PDE*, 2014, 2 (4), 68–71. DOI: 10.12691/ijpdea-2-4-2.
25. Chen, W., Fu, Z.J., and Chen, C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2014, 90 p. DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
26. Buhmann, M.D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 271 p. DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
27. Fornberg, B. and Flyer, N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, 24, 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130.
28. Fedotov, V.P. and Spevak, L.F. Analytical integration of kernel functions for solving elasticity problems and potential theory by the method of boundary elements. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2007, 19 (2), 87–104. (In Russian).
29. Fedotov, V.P. and Spevak, L.F. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32 (10), 883–888. DOI: 10.1016/j.enganabound.2008.03.001.
30. García-Melián, J. Large solutions for an elliptic system of quasilinear equations. *J. Differential Equations*, 2008, 245 (12), 3735–3752. DOI: 10.1016/j.jde.2008.04.004.
31. Polyanin, A.D. and Vyazmina, E.A. New classes of exact solutions of nonlinear systems of equations of reaction-diffusion type. *Doklady Akademii Nauk*, 2006, 409 (4), 455–460. (In Russian).
32. Antonov, A.S. *Parallelnoe programmirovaniye s ispolzovaniem tekhnologii OpenMP* [Parallel programming using OpenMP technology]. MGU Publ., Moscow, 2009, 77 p. (In Russian).
33. OpenMP. Available at: <http://www.openmp.org> (accessed 04.05.2025).
34. The Boost C++ Libraries. Available at: <http://www.boost.org> (accessed 29.04.2025).
35. GSL—GNU Scientific Library. Available at: <http://www.gnu.org/software/gsl> (accessed 29.04.2025).

Подана в журнал: 23.06.2025



УДК 519.633



DOI: 10.17804/2410-9908.2025.4.006-021

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л. Ф. Спевак^а, О. А. Нефедова^{б, *}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

^а  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  ifs@imach.uran.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0003-1163-6699>  nefedova@imach.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: nefedova@imach.uran.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
Тел.: +7 (343) 362-30-22; факс: +7 (343) 374-53-30

Работа посвящена построению решения системы двух связанных уравнений эллиптического типа. Для краевой задачи в заданной двумерной области предложен итерационный численный алгоритм, основанный на методе частных решений, методе коллокаций и методе граничных элементов. Разработанный алгоритм реализован в виде программы с использованием открытого стандарта параллельного программирования OpenMP. Для верификации алгоритма и программы найдены простые точные решения для двух частных случаев рассматриваемой системы. Проведен вычислительный эксперимент, показавший хорошее соответствие результатов расчетов точным решениям. Продемонстрирована машинная сходимость численного алгоритма относительно числа узлов граничных элементов и точек коллокации.

Ключевые слова: система эллиптических уравнений, метод граничных элементов, метод коллокаций, радиальные базисные функции, параллельные вычисления, OpenMP

1. Введение

Данная работа посвящена разработке алгоритма и программы для решения системы эллиптических уравнений вида

$$\begin{cases} \Delta u = F(u, v), \\ \Delta v = G(u, v). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u(x, y)$, $v(x, y)$ – искомые функции; Δ – оператор Лапласа; $F(u, v)$, $G(u, v)$ – заданные функции. Иногда систему (1) называют уравнениями диффузии реагирующих сред. Такие системы используются в моделях стационарных процессов в теории тепло- и массопереноса реагирующих сред, теории химических реакторов, теории горения, в математической биологии и биофизике. Большой объем информации о построении точных решений системы (1) при различных правых частях содержится в справочниках [1, 2] и на ресурсах [3, 4]. Отметим, что к виду (1) также могут приводиться стационарные системы уравнений Шредингера [5], системы Шредингера – Максвелла [6], системы Шредингера – Пуассона [7].

Спектр численных методов решения краевых задач для системы (1) достаточно широк. Отметим метод граничных элементов (МГЭ) [8], а также современный подход с использованием нейросетей [9]. Выбор метода определяется граничными условиями, содержательной постановкой, целями исследований и т. д. Авторы настоящей работы при решении задач

исходят из желания получить непрерывные по пространственным координатам решения, что повышает возможности исследования и оценки точности. Ранее были разработаны алгоритмы и программы для решения параболических уравнений и систем в случае одной пространственной переменной [10, 11], а также двумерных задач для эллиптических [12–14] и параболических уравнений [15–19]. В основе алгоритмов решения двумерных задач лежат МГЭ [20] в сочетании с методом двойственной взаимности (МДВ) [21–24] либо с методом коллокаций [25] и аппроксимация радиальными базисными функциями (РБФ) [26, 27]. При реализации МГЭ используются формулы для аналитического вычисления интегралов по граничным элементам [28, 29].

В данной статье разработаны алгоритм численного решения и его программная реализация, получены точные решения системы в частных случаях, проведен комплексный вычислительный эксперимент. Верификация алгоритма выполнена сравнением численных решений с точными.

2. Алгоритм численного решения

Рассмотрим систему (1) в некоторой двумерной области V , на границе которой $S = S_1 \cup S_2$ зададим граничные условия следующего вида:

$$u|_{x \in S_1} = u^*(x, y), \quad v|_{x \in S_1} = v^*(x, y), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in S_2} = p^*(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in S_2} = q^*(x, y), \quad (3)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе; звездочкой отмечены известные функции.

Решение задачи (1) – (3) будем искать итерационно, на основе метода граничных элементов и метода коллокаций, в следующем виде:

$$u(x, y) = u_p(x, y) + u_h(x, y), \quad v(x, y) = v_p(x, y) + v_h(x, y), \quad (4)$$

где u_p, v_p – частное решение системы (1), u_h, v_h – решения соответствующих задач для уравнений Лапласа:

$$\Delta u_h = 0, \quad u_h|_{x \in S_1} = u^* - u_p, \quad \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in S_2} = p^* - \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{n}}, \quad (5)$$

$$\Delta v_h = 0, \quad v_h|_{x \in S_1} = v^* - v_p, \quad \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in S_2} = q^* - \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{n}}. \quad (6)$$

Обозначим $u^{(n)}, u_p^{(n)}, u_h^{(n)}, v^{(n)}, v_p^{(n)}, v_h^{(n)}$ – n -е итерации решений. Итерационный процесс построим следующим образом. Зададим тривиальную начальную итерацию частного решения:

$$u_p^{(0)} \equiv 0, \quad v_p^{(0)} \equiv 0. \quad (7)$$

Далее на каждой n -й итерации $n \geq 0$ при известных $u_p^{(n)}, v_p^{(n)}$ решаем методом граничных элементов задачи (5) и (6) для $u_h^{(n)}, v_h^{(n)}$:

$$\Delta u_h^{(n)} = 0, \quad u_h^{(n)}|_{\mathbf{x} \in S_1} = u^* - u_p^{(n)} = u^\#, \quad \left. \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x} \in S_2} = p^* - \frac{\partial u_p^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} = p^\#; \quad (8)$$

$$\Delta v_h^{(n)} = 0, \quad v_h^{(n)}|_{\mathbf{x} \in S_1} = v^* - v_p^{(n)} = v^\#, \quad \left. \frac{\partial v_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x} \in S_2} = q^* - \frac{\partial v_p^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} = q^\#. \quad (9)$$

Здесь для удобства решеткой обозначены известные функции. Для применения МГЭ разобьем границу S на $K = K_1 + K_2$ прямолинейных граничных элементов: e_1, e_2, \dots, e_{K_1} на границе S_1 , $e_{K_1+1}, e_{K_1+2}, \dots, e_{K_1+K_2}$ на границе S_2 . На каждом элементе e_i искомые функции и их производные по нормали будем считать постоянными и отнесенными к расположенному в середине элемента узлу ξ_i . Для простоты обозначим их, опустив индексы, следующим образом:

$$u_h^{(n)}|_{\mathbf{x}=\xi_i} = u_i^\#, \quad v_h^{(n)}|_{\mathbf{x}=\xi_i} = v_i^\#, \quad \left. \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x}=\xi_i} = p_i, \quad \left. \frac{\partial v_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x}=\xi_i} = q_i, \quad i = 1, \dots, K_1; \quad (10)$$

$$u_h^{(n)}|_{\mathbf{x}=\xi_i} = u_i, \quad v_h^{(n)}|_{\mathbf{x}=\xi_i} = v_i, \quad \left. \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x}=\xi_i} = p_i^\#, \quad \left. \frac{\partial v_h^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x}=\xi_i} = q_i^\#, \quad i = K_1 + 1, \dots, K. \quad (11)$$

Значения, отмеченные в соотношениях (10), (11) решеткой, заданы граничными условиями в задачах (8), (9), переменные без решетки неизвестны. Для их нахождения составим две системы граничных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_j^\# &= \sum_{i=1}^{K_1} \left[p_i \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - u_i^\# \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right] + \\ &+ \sum_{i=K_1+1}^K \left[p_i^\# \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - u_i \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad j = 1, \dots, K_1, \\ \frac{1}{2} u_j &= \sum_{i=1}^{K_1} \left[p_i \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - u_i^\# \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right] + \\ &+ \sum_{i=K_1+1}^K \left[p_i^\# \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - u_i \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad j = K_1 + 1, \dots, K; \\ \frac{1}{2} v_j^\# &= \sum_{i=1}^{K_1} \left[q_i \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i^\# \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right] + \\ &+ \sum_{i=K_1+1}^K \left[q_i^\# \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad j = 1, \dots, K_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}v_j = \sum_{i=1}^{K_1} \left[q_i \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i^{\#} \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right] + \sum_{i=K_1+1}^K \left[q_i^{\#} \int_{e_i} u^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i \int_{e_i} q^*(\xi_j, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad j = K_1 + 1, \dots, K. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$, $u^*(\xi, \mathbf{x})$ – фундаментальное решение, $q^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}$ [20]. Решив системы линейных алгебраических уравнений, найдем решения задач (8), (9):

$$u_h^{(n)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^K \left[p_i \int_{e_i} u^*(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i \int_{e_i} q^*(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad (14)$$

$$v_h^{(n)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^K \left[q_i \int_{e_i} u^*(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - v_i \int_{e_i} q^*(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \quad (15)$$

где все значения u_i, v_i, p_i, q_i уже известны, $\xi = (\xi, \eta)$ – внутренняя точка области V . Таким образом мы определим полностью n -ю итерацию решения задачи (1) – (3):

$$u^{(n)}(x, y) = u_p^{(n)}(x, y) + u_h^{(n)}(x, y), \quad v^{(n)}(x, y) = v_p^{(n)}(x, y) + v_h^{(n)}(x, y). \quad (16)$$

После этого находим следующую итерацию частного решения из уравнений

$$\Delta u_p^{(n+1)} = F(u^{(n)}, v^{(n)}), \quad \Delta v_p^{(n+1)} = G(u^{(n)}, v^{(n)}). \quad (17)$$

Для этого применим метод коллокаций, разложив правые части уравнений (17) по РБФ:

$$F(u^{(n)}, v^{(n)}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad G(u^{(n)}, v^{(n)}) = \sum_{i=1}^M \beta_i^{(n+1)} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (18)$$

где $\varphi_i(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)$ – РБФ, зависящие от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M$, для каждой φ_i существует такая функция ψ_i , что $\varphi_i = \Delta \psi_i$. Коэффициенты $\alpha_i^{(n+1)}$ и $\beta_i^{(n+1)}$ определяются из решения систем линейных алгебраических уравнений, формируемых подстановкой точек коллокации в равенства (18):

$$F(u^{(n)}, v^{(n)}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} \varphi_i(\mathbf{x}_m), \quad G(u^{(n)}, v^{(n)}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} = \sum_{i=1}^M \beta_i^{(n+1)} \varphi_i(\mathbf{x}_m), \quad m = 1, \dots, M. \quad (19)$$

Решив системы (19), найдем $n+1$ -ю итерацию частного решения:

$$u_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} \psi_i(\mathbf{x}), \quad v_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^M \beta_i^{(n+1)} \psi_i(\mathbf{x}). \quad (20)$$

После этого переходим к системе (8), (9) для $n+1$ -й итерации. Итерационный процесс останавливается при достаточной близости n -й и $n+1$ -й итераций. Тогда в качестве непрерывного решения задачи (1) – (3) принимается пара функций

$$u(x, y) = u_p^{(n+1)}(x, y) + u_h^{(n+1)}(x, y), \quad v(x, y) = v_p^{(n+1)}(x, y) + v_h^{(n+1)}(x, y). \quad (21)$$

3. О точных решениях

Точные решения системы (1) для различных видов правых частей, как линейных, так и нелинейных, приводятся в работах [1–4]. При этом построение многих из них сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не всегда интегрируемых в конечной форме.

Для верификации предложенного численного алгоритма мы построим простые точные решения, которые в упомянутых источниках опущены. Рассмотрим систему (1) следующего вида:

$$\begin{cases} \Delta u = au^\alpha v^\beta, \\ \Delta v = bu^\gamma v^\delta. \end{cases} \quad (22)$$

Системы с подобной правой частью рассмотрены в работах [5, 30]. Они используются, в частности, для описания конденсата Бозе – Эйнштейна. Представим решение системы (22) в виде

$$u(x, y) = A(x + y)^n, \quad v(x, y) = B(x + y)^m. \quad (23)$$

Подставив функции (23) в систему (22) и полагая, что $n, m \neq 1$ и $n, m \neq 2$, получим

$$2An(n-1)(x+y)^{n-2} = aA^\alpha B^\beta (x+y)^{\alpha+m\beta}, \quad 2Bm(m-1)(x+y)^{m-2} = bA^\gamma B^\delta (x+y)^{\gamma+m\delta}. \quad (24)$$

Отсюда

$$2n(n-1)A = aA^\alpha B^\beta, \quad 2m(m-1)B = bA^\gamma B^\delta, \quad (25)$$

$$(\alpha-1)n + \beta m = -2, \quad \gamma n + (\delta-1)m = -2. \quad (26)$$

Таким образом, если выполняются равенства (25), (26), то функции (23) будут решением системы (22). Отметим, что аналогичные решения можно получить с помощью алгоритма, приведенного в работе [31].

Построим теперь точное решение для системы (1), когда функции F и G имеют разный вид.

Пусть в системе (1) $F = cv^k, G = de^u$:

$$\begin{cases} \Delta u = cv^k, \\ \Delta v = de^u, \end{cases} \quad (27)$$

а решение имеет вид

$$u = U(x + y), \quad v = (x + y)^m. \quad (28)$$

Подставив функции (28) в систему (27), получим

$$2U'' = c(x + y)^{km}, \quad 2m(m-1)(x + y)^{m-2} = de^U. \quad (29)$$

Из второго уравнения (29) получаем

$$U = \ln\left(\frac{2m(m-1)}{d}\right) + \ln(x + y)^{m-2}, \quad (30)$$

тогда первое примет вид

$$-2(m-2)(x + y)^{-2} = c(x + y)^{km}. \quad (31)$$

Следовательно, при выполнении равенств

$$c = -2(m-2), \quad m = -\frac{2}{k} \quad (32)$$

(28), (30) будет решением системы (27).

4. Программная реализация

Представленный алгоритм был реализован в виде программы, написанной в интегрированной среде разработки Eclipse на языке программирования C++. Программа предназначена для решения двумерных стационарных задач для системы двух уравнений эллиптического типа. Для оптимизации вычислительного алгоритма и эффективного использования ресурсов многоядерных процессоров была использована методика распараллеливания алгоритма на основе МГЭ [13, 17] для открытого стандарта параллельного программирования OpenMP [32, 33]. Реализация численных расчетов проводилась с использованием специальных функций из сборника библиотек Boost [34] и библиотеки GNU Scientific Library (GSL) [35]. В программе существует возможность выбора количества граничных узлов, а также числа внутренних точек коллокации. Программный модуль дополняет разрабатываемый авторами комплекс программ для решения краевых задач математической физики.

5. Примеры

Проиллюстрируем работу алгоритма и программы на двух примерах.

5.1. Пример 1

В качестве первого тестового примера рассмотрим краевую задачу для системы (22) в области $V = \{1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5\}$ при $a = 0,72, b = 0,56, \alpha = 3, \beta = \gamma = 1, \delta = 4$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0,72 \cdot u^3 v, \\ \Delta v = 0,56 \cdot uv^4. \end{cases} \quad (33)$$

Точное решение системы (33) имеет вид

$$u_1(x, y) = \frac{2}{(x+y)^{0,8}}, \quad v_1(x, y) = \frac{1}{(x+y)^{0,4}}. \quad (34)$$

На границе S области V зададим граничные условия, соответствующие решению (34):

$$\begin{aligned} u|_{x \in S} &= u_1|_{x \in S}, \\ v|_{x \in S} &= v_1|_{x \in S}. \end{aligned} \quad (35)$$

В качестве точек коллокации принимались K узлов граничных элементов и M_{in} внутренних точек коллокации в области V . На рис. 1 и 2 представлены сравнения численного, полученного при $K = 240$ и $M_{in} = 120$, и точного решений задачи.

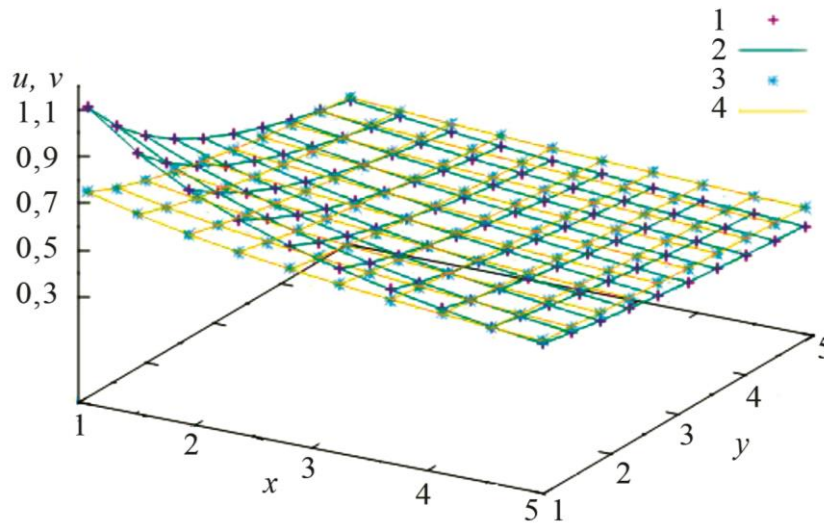


Рис. 1. Сравнение численного и точного решений задачи (33), (35) в области V : 1 – $u(x, y)$, численное; 2 – $u_1(x, y)$; 3 – $v(x, y)$, численное; 4 – $v_1(x, y)$

В табл. 1 приведены относительные погрешности δu и δv численных решений задачи (33), (35) относительно точного решения (34) при различных количествах граничных элементов K и внутренних точек коллокаций M_{in} . Расчеты проводились вдоль отрезка $[(1, 3), (5, 3)]$, параллельного оси абсцисс. Результаты расчетов показывают, что алгоритм сходится относительно числа граничных элементов и точек коллокации.

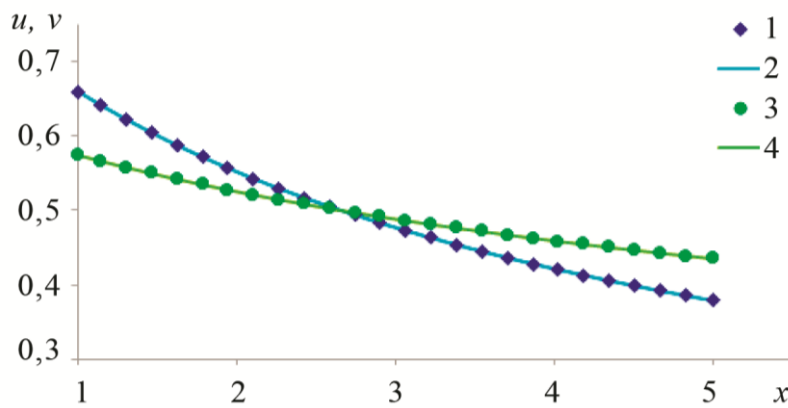


Рис. 2. Сравнение численного и точного решений задачи (33), (35) вдоль отрезка [(1, 3), (5, 3)]: 1 – $u(x, y)$, численное; 2 – $u_1(x, y)$; 3 – $v(x, y)$, численное; 4 – $v_1(x, y)$

Таблица 1

Относительные погрешности численного решения задачи (33), (35), рассчитанные вдоль отрезка [(1, 3), (5, 3)]

(x, y)	K	M_{in}	δu	δv
(1,0, 3)	80	40	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
	240	120	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$9,1 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-6}$
(1,3, 3)	80	40	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$
(1,9, 3)	80	40	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$
(2,5, 3)	80	40	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$8,5 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
	400	200	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$
(3,1, 3)	80	40	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
	400	200	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$5,4 \cdot 10^{-5}$
(3,7, 3)	80	40	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
	400	200	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$
(4,3, 3)	80	40	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
	400	200	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$
(5,0, 3)	80	40	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$
	240	120	$7,9 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$
	400	200	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^{-7}$

5.2. Пример 2

Далее рассмотрим краевую задачу для системы (27) в области $\tilde{V} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ при $c = -2, d = 12, k = -2/3$:

$$\begin{cases} \Delta u = -2 \cdot v^{-2/3}, \\ \Delta v = 12 \cdot e^u. \end{cases} \quad (36)$$

Точное решение системы (36) имеет вид

$$u_2(x, y) = \ln(x + y), \quad v_2(x, y) = (x + y)^3. \quad (37)$$

Для системы (36) с граничными условиями на границе \tilde{S} области \tilde{V}

$$\begin{aligned} u|_{x \in \tilde{S}} &= u_2|_{x \in \tilde{S}}, \\ v|_{x \in \tilde{S}} &= v_2|_{x \in \tilde{S}} \end{aligned} \quad (38)$$

были построены численные решения. На рис. 3 и 4 представлены сравнения численного решения, рассчитанного при $K = 240$ и $M_{in} = 120$, и точного решения (37).

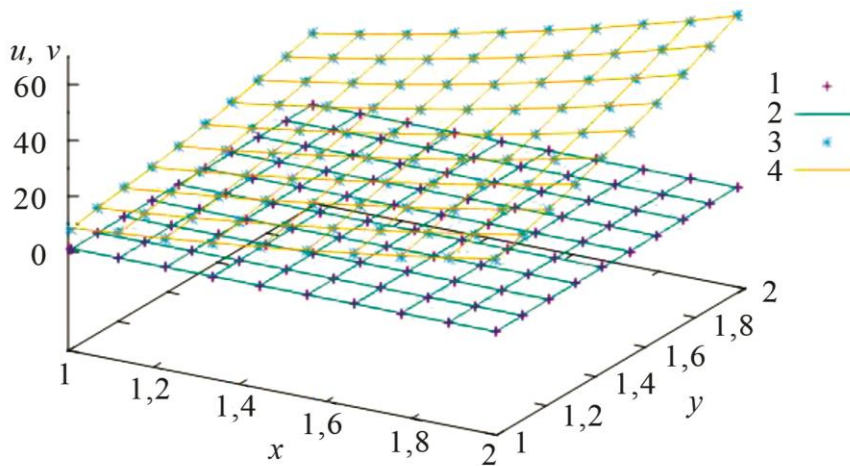


Рис. 3. Сравнение численного и точного решений задачи (36), (38) в области \tilde{V} : 1 – $u(x, y)$, численное; 2 – $u_2(x, y)$; 3 – $v(x, y)$, численное; 4 – $v_2(x, y)$

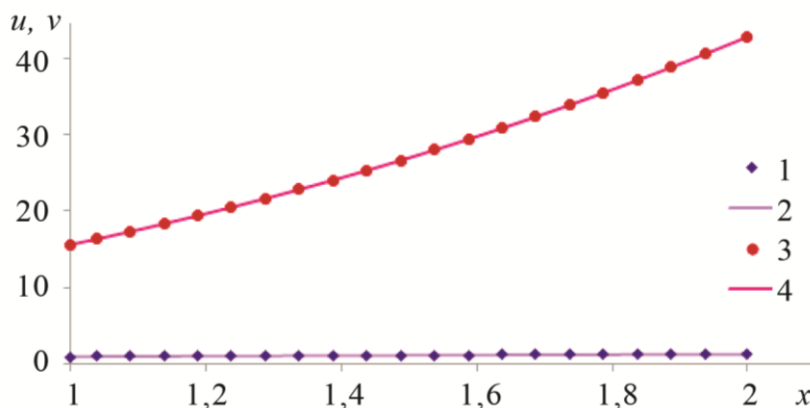


Рис. 4. Сравнение численного и точного решений задачи (36), (38) вдоль отрезка $[(1, 1,5), (2, 1,5)]$: 1 – $u(x, y)$, численное; 2 – $u_2(x, y)$; 3 – $v(x, y)$, численное; 4 – $v_2(x, y)$

В табл. 2 приведены относительные погрешности численного решения, вычисленные вдоль отрезка $[(1, 1,5), (2, 1,5)]$, параллельного оси абсцисс, при различных количествах K и

M_{in} . Результаты расчетов вновь демонстрируют сходимость относительно числа граничных элементов и внутренних точек коллокации.

В целом, проведенный вычислительный эксперимент показал хорошую сходимость итерационных процессов, сравнение результатов расчетов с точными решениями продемонстрировало высокую эффективность алгоритма. Таким образом, представленные расчеты для тестовых примеров убедительно верифицируют предложенную методику решения задач для системы эллиптических уравнений.

Таблица 2

Относительные погрешности численного решения задачи (36), (38), рассчитанные вдоль отрезка [(1, 1,5), (2, 1,5)]

(x, y)	K	M_{in}	δu	δv
(1,000, 1,5)	80	40	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$
	240	120	$4,5 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
	400	200	$8,8 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$
(1,025, 1,5)	80	40	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$9,8 \cdot 10^{-5}$
	240	120	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$
	400	200	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$
(1,225, 1,5)	80	40	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$7,9 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$
(1,425, 1,5)	80	40	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$9,3 \cdot 10^{-6}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
(1,625, 1,5)	80	40	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$8,1 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
(1,825, 1,5)	80	40	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
	240	120	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$
	400	200	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$
(1,975, 1,5)	80	40	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$
	240	120	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$
	400	200	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
(2,000, 1,5)	80	40	$8,0 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$
	240	120	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$
	400	200	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$

6. Заключение

Предложен алгоритм численного решения системы двух связанных уравнений эллиптического типа. Задача решается итерационно, с совместным применением МГЭ и метода коллокаций. Для повышения эффективности и ускорения работы компьютерной реализации алгоритма использован открытый стандарт параллельного программирования OpenMP. В двух частных случаях для рассмотренной системы получены точные решения. Для проверки корректной работы алгоритма и тестирования программы проведен вычислительный эксперимент, позволивший сделать следующие выводы: 1) алгоритм показал хорошую сходимость итерационных процессов; 2) сравнение численных решений с точными показало, что относительная погрешность численных решений достаточно мала даже при небольших количествах граничных элементов и внутренних то-

чек коллокации; 3) увеличение количества граничных элементов и внутренних точек коллокации повышает точность численных решений. Таким образом, проведенные расчеты показали эффективность работы алгоритма и программы.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания, номер государственной регистрации 124020600042-9.

Литература

1. Polyanin A. D., Nazaikinskii V. E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – 2nd Edition. – New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2015. – 1643 p. – DOI: 10.1201/b19056.
2. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – 2nd Edition. – New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2012. – 1912 p. – DOI: 10.1201/b11412.
3. EqWorld. Мир математических уравнений. – URL: <https://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> (дата обращения: 30.04.2025).
4. Ambrosio L., Carlotto A., Massaccesi A. Lectures on Elliptic Partial Differential Equations. – Pisa : Scuola Normale Superiore, 2018. – 227 p. – DOI: 10.1007/978-88-7642-651-3.
5. Li C., Villavert J. A. Degree theory framework for semilinear elliptic systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 2016. – Vol. 144 (9). – P. 3731–3740. – DOI: 10.1090/proc/13166.
6. Azzollini A., D’Avenia P., Pomponio A. On the Schrödinger–Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term // AIHPC. – 2010. – Vol. 27 (2). – P. 779–791. – DOI: 10.1016/j.aihpc.2009.11.012.
7. Ambrosetti A. On Schrödinger–Poisson systems // Milan Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 76. – P. 257–274. – DOI: 10.1007/s00032-008-0094-z.
8. Gantner G., Praetorius D. Adaptive BEM for elliptic PDE systems, part II: isogeometric analysis with hierarchical B-splines for weakly-singular integral equations // Computers and Mathematics with Applications. – 2022. – Vol. 117. – P. 74–96. – DOI: 10.1016/j.camwa.2022.04.006.
9. Liu M., Cai Z., Ramani K. Dual Neural Network (DuNN) method for elliptic partial differential equations and systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 467. – P. 116596. – DOI: 10.1016/j.cam.2025.116596.
10. Kazakov A., Spevak L. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10 (9). – P. 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.
11. Kazakov A. L., Spevak L. F. Exact and approximate solutions of a degenerate reaction-diffusion system // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62 (4). – P. 673–683. – DOI: 10.1134/S0021894421040179.
12. Федотов В. П., Спевак Л. Ф., Нefeldова О. А. Программный комплекс для решения задач теории потенциала методом граничных элементов // Программные продукты и системы. – 2014. – Т. 108 (4). – С. 178–182. – DOI: 10.15827/0236-235X.108.178-182.
13. Spevak L. F., Nefedova O. A. Parallel technology for solving the Poisson equation in axisymmetric domains by the boundary element method // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 2053. – P. 030070. – DOI: 10.1063/1.5084431.
14. Nefedova O. A., Spevak L. F. Parallel technology for solving axisymmetric problems of the theory of elasticity by the boundary element method // AIP Conf. Proc. – 2020. – Vol. 2315. – P. 020030. – DOI: 10.1063/5.0037021.

15. Spevak L. F., Nefedova O. A. Parallelizing the solution of the nonlinear heat conduction problem with the application of the OpenCL library // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2016. – Iss. 6. – P. 80–91. – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.6.080-091. – URL: http://dream-journal.org/issues/2016-6/2016-6_113.html
16. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. Simultaneous application of the boundary element method and the power series method for solving a two-dimensional problem of heat wave motion // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2017. – Iss. 6. – P. 6–15 – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.006-015. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-6/2017-6_151.html
17. Spevak L. F., Nefedova O. A. Parallel technology for solving nonstationary heat conduction problems in axisymmetric domains // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 5. – P. 60–71. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.60-71. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-5/2021-5_349.html
18. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term / A. Kazakov, L. Spevak, O. Nefedova, A. Lempert // *Symmetry*. – 2020. – Vol. 12 (6). – P. 921. – DOI: 10.3390/sym12060921.
19. Kazakov A. L., Nefedova O. A., Spevak L. F. Solution to a two-dimensional nonlinear parabolic heat equation subject to a boundary condition specified on a moving manifold // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 2024. – Vol. 64 (2). – P. 266–284. – DOI: 10.1134/S0965542524020052.
20. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer, 2012. – 478 p.
21. Partridge P. W., Brebbia C. A., Wrobel L. C. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. – Southampton : Computational Mechanics Publications, 1992.
22. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 1999. – Vol. 23 (4). – P. 285–296. – DOI: 10.1016/s0955-7997(98)00087-3.
23. Al-Bayati S. A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection–diffusion–reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions // *Int. J. Mech. Sci.* – 2018. – Vol. 145. – P. 367–377. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.07.003.
24. Zakerdoost H., Ghassemi H. Dual reciprocity boundary element method for steady state convection-diffusion-radiation problems // *International Journal of PDE*. – 2014. – Vol. 2 (4). – P. 68–71. – DOI: 10.12691/ijpdea-2-4-2.
25. Chen W., Fu Z. J., Chen C. S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer, 2014. – 90 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
26. Buhmann M. D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations* – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 271 p. – DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
27. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica*. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: 10.1017/S0962492914000130.
28. Федотов В. П., Спевак Л. Ф. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов // *Математическое моделирование*. – 2007. – Т. 19 (2). – С. 87–104.
29. Fedotov V. P., Spevak L. F. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2008. – Vol. 32 (10). – P. 883–888. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2008.03.001.

30. García-Melián J. Large solutions for an elliptic system of quasilinear equations // J. Differential Equations. – 2008. – Vol. 245 (12). – P. 3735–3752. – DOI: 10.1016/j.jde.2008.04.004.
31. Полянин А. Д., Вязьмина Е. А. Новые классы точных решений нелинейных систем уравнений реакционно-диффузионного типа // Доклады АН. – 2006. – Т. 409 (4). – С. 455–460.
32. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. – М. : МГУ, 2009. – 77 с.
33. OpenMP. – URL: <http://www.openmp.org> (дата обращения: 04.05.2025).
34. The Boost C++ Libraries. – URL: <http://www.boost.org> (дата обращения: 29.04.2025).
35. GSL–GNU Scientific Library. – URL: <http://www.gnu.org/software/gsl> (дата обращения: 29.04.2025).