

Received: 23.04.2025

Revised: 15.08.2025


Accepted: 29.08.2025

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.4.022-040

CALCULATING RESONANT FREQUENCIES OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL RODS

S. L. Skalozub

77 Gerhart Hauptmann Ring, Frankfurt on the Main, 60439, Germany

 sem.sk@gmx.de

Address for correspondence: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland
Tel.: +49(69) 2694 9997

Resonant longitudinal-transverse axisymmetric oscillations of cylindrical rods made of isotropic materials are analytically studied in accordance with the Pochhammer–Chree theory and the proposed hypothesis that there are no shear stresses at the rod ends during resonance due to reflection of standing shear surface waves attenuating as they move away from the end surface. Correlations relating dimensionless resonant frequencies to the geometric dimensions of the rods and the dynamic characteristics of the material (Poisson’s ratio and shear wave velocity) are presented in a form convenient for calculation. The developed algorithms and calculation programs are used to evaluate, by means of a personal computer and/or a desktop calculator, and tabulate the resonance frequencies of the first and second oscillation modes at different fixed values of Poisson’s ratio within 0.20–0.45 with a step of 0.05 and at discrete values of the rod length-to-diameter ratio within 0.9–5.0 with a step of 0.1. The frequency values are represented as seven-digit numbers with six digits after the decimal point. The evaluation of methodological errors in the calculation of resonant frequencies by comparison with the known results obtained by the Rayleigh–Ritz method reveals their fairly high agreement. The proposed procedure is used to calculate the instrumental errors in the determination of the dynamic characteristics of the material with respect to the experimental data found in the available literature.

Keywords: cylindrical rods, dimensionless resonant frequencies, Poisson’s ratio, shear wave velocity

Acknowledgment

I am grateful to R. S. Skalozubs for his assistance in the search and delivery of the necessary literature, to A. S. Skalozubs for the computer support of the preparation and formatting of the manuscript and to M. A. Skalozubs for compiling the program and performing calculations using a personal computer.

References

1. Meleshko, V.V., Yakimenko, N.S., and Ulitko, A.F. Resonance method for determining the elastic constants of finite isotropic cylinders. *Akustichnyy Visnyk*, 2008, 11 (3), 65–75. (In Russian).
2. Pochhammer, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1876, 1876 (81), 324–336. DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Chree, C. Longitudinal vibrations of a corcablar bar. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1886, 21, 287–298.
4. Chree, C. On longitudinal vibrations. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1889, 23, 317–342.

5. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981, 284 p. (In Russian).
6. Hutchinson, J.R. Axisymmetric vibration of a free finite-length rod. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, 51 (1), 233–240.
7. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length. *Soviet Physics. Acoustics*, 1978, 24 (6), 861–866.
8. Hutchinson, J.R. Vibrations of solid cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47 (4), 901–907. DOI: 10.1115/1.3153811.
9. Chernyshev, K.V. and Shegai, V.V. Natural vibrations of solid cylinders of finite length. *Akusticheskij Zhurnal*, 1977, 23, 4, 627–631. (In Russian).
10. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution. *Wave Motion*, 2003, 37, 191–206. DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
11. Puckett, A.D. and Peterson, M.L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides. *Ultrasonics*, 2005, 43 (3), 197–207. DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
12. Leissa, A.W. and So, J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, 98, 2122–2135. DOI: 10.1121/1.414331.
13. Leissa, A.W. and So, J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, 98, 2136–2141. DOI: 10.1121/1.414403.
14. Nieves, F.J., Bayón, A., and Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder. *J. Sound Vib.*, 2008, 311 (1–2), 588–596. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
15. Nieves, F.J., Gascón, F., and Bayón, A. An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 313 (3–5), 617–630, DOI: 10.1016/j.jsv.2007.11.041.
16. Nieves, F., Gascón, F., and Bayon, A. Precise and direct determination of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter. *Review of Scientific Instruments*, 2000, 71 (6), 2433–2439. DOI: 10.1063/1.1150632.
17. Stupin, V.A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2000, 36, 896–899. DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Shibayama, K. Piezoceramic transducers as short rods. In: Y. Kikuchi, ed., *Ultrasonic Transducers*, Tokyo, Corona Publishing Company, 1969, ch. 9, 406 p.
19. Gadzhibekov, T.A. and Ilyashenko, A.V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio. *Mechanics of Solids*, 2021, 56, 702–714. DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov, V.V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range. *Acoustical Physics*, 2022, 68 (3), 206–214. DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Popov, A.L. and Sadovsky, S.A. On the correspondence of theoretical models of longitudinal vibrations of a rod with experimental data. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2021, 8 (2), 270–281. DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
22. Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1920, 624 p.
23. Zemanek, J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. *J. Acoust Soc. Amer.*, 1972, 51, 265–283.
24. Mokryakov, V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves. *Procedia Structural Integrity*, 2019, 23, 143–148. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.01.077.
25. Babich, V.M. and Kiselev A.P. *Uprugie volny. Vysokochastotnaya teoriya* [Elastic waves. High-frequency-theory]. BKhV-Peterburg Publ., S.-Petersburg, 2014, 320 p. (In Russian).

26. Landau, L.D. and Lifshits, E.M. *Teoreticheskaya fizika. Teoriya Uprugosti* [Theoretical Physics, Elasticity Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987, vol. 7, 248 p. (In Russian).
27. Available at: <https://www.calculate.co.nz/bessel-functions-calculator.php>
28. Ganopolskiy, V.V., Kasatkin, B.A., Legusha, F.F., Prudko, N.I., and Pugachev, S.I. *Pyezokeramicheskie preobrazovateli* [The Piezoceramic Transducers: The Handbook]. Sudostroenie Publ., Leningrad, 1984, 256 p. (In Russian).
29. Nieves, F.J.; Gascón, F., and Bayón, A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 115, 2928–2936. DOI: 10.1121/1.1739485.

Подана в журнал: 23.04.2025

УДК 534:539.3:51-72

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.4.022-040

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

С. Л. Скалозуб

ул. Герхарт-Гауптман-Ринг, 77, г. Франкфурт-на-Майне, 60439, Германия

Электронная почта: sem.sk@gmx.de

Адрес для переписки: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland

Тел.: +49 (69) 2694 9997

Аналитически рассмотрены резонансные продольно-поперечные осесимметричные колебания цилиндрических стержней из изотропных материалов в соответствии с теорией Похгаммера – Кри и предложенной гипотезой об отсутствии на торцах стержня при резонансе сдвиговых напряжений вследствие отражения стоячих сдвиговых поверхностных волн, затухающих по мере удаления от поверхности торца. Представлены в удобном для расчетов виде соотношения, связывающие безразмерные резонансные частоты с геометрическими размерами стержней и динамическими характеристиками материала (коэффициентом Пуассона и скоростью сдвиговых волн). По разработанным алгоритмам и программам выполнения расчетов посредством персонального компьютера и/или настольного калькулятора вычислены и сведены в таблицы значения безразмерных резонансных частот первой и второй форм колебаний при разных фиксированных значениях коэффициента Пуассона в пределах 0,20–0,45 с шагом 0,05 и дискретных значениях отношений длины стержня к диаметру в пределах 0,9–5,0 с шагом 0,1. Значения частот представлены в виде семизначных чисел с шестью цифрами после запятой. Оценка методических погрешностей расчета резонансных частот путем сравнения с известными результатами, полученными методом Рэлея – Ритца, выявила их достаточно высокую сходимость. По предложенной методике рассчитаны инструментальные погрешности определения динамических характеристик материала применительно к экспериментальным данным, приведенным в доступных литературных источниках.

Ключевые слова: цилиндрические стержни, безразмерные резонансные частоты, коэффициент Пуассона, скорость сдвиговых волн

1. Введение

Осесимметричные колебания цилиндрических стержней, отличающихся от дисков тем, что отношение длины L к диаметру D превышает 0,853145, рассматривались во многих работах, краткий обзор которых приведен в работе [1]. Основой теоретических исследований в этой области послужила теория Похгаммера – Кри [2–4]. Поскольку при использовании этой теории не удавалось выполнить все условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на торцевых и цилиндрических поверхностях свободного резонирующего стержня [5], в ряде работ были предложены приближенные методы расчета резонансных частот стержней: метод суперпозиции [6–8], метод однородных решений [9–11], метод Рэлея – Ритца [12–14]. Реализация этих методов требовала решения весьма сложных и громоздких систем алгебраических уравнений посредством компьютера и была связана с довольно большими затратами машинного времени компьютеров второй половины двадцатого и начала двадцать первого веков [1]. Все же благодаря усилиям многих исследователей были рассчитаны и сведены в таблицы или приведены в виде графиков значения безразмерных резо-

нансных частот для отдельных конкретных значений коэффициента Пуассона ν и разных отношений L/D [6, 12, 15], а также для отдельных конкретных значений L/D и разных значений ν [16]. Несмотря на то что быстродействие и объем оперативной памяти современных компьютеров, включая персональные, значительно превышают соответствующие характеристики компьютеров отмеченного выше промежутка времени, в доступной литературе к настоящему времени удалось найти единственную работу [17], посвященную разработке методики оперативного и достаточно точного расчета резонансных частот стержней при различных значениях ν и L/D . В этой работе приведены результаты численных расчетов значений дисперсионного множителя первой формы колебаний стержня в зависимости от отношений L/D в пределах 0,9–1,5 с шагом 0,1, в пределах 1,5–3,0 с шагом 0,5 и в пределах 3,0–10,0 с шагом 1,0 при значениях ν , равных 0,20; 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,45. Автором было использовано дисперсионное уравнение первой формы колебаний длинного стержня ($L/D \gg 1$), выведенное в [18] с пренебрежением относительно небольших касательных напряжений на торцах стержня. Согласно работе [18] расчеты дисперсионных множителей производились путем сопряжения кривых зависимостей модифицированной безразмерной частоты от отношения L/D для диска и стержня в точке $L/D = 0,85$. Результаты расчетов сведены в таблицу, использование которой неудобно, поскольку требуются пересчеты значений дисперсионных множителей в значения безразмерных резонансных частот. Недавние известные работы [19, 20] посвящены теоретическому анализу напряжений в цилиндрическом стержне при продольно-поперечных волнах Похгаммера – Кри. При выводе основных соотношений в исследовании [19] исходные уравнения для составляющих векторного поля представлены в виде, пригодном для описания колебаний бесконечно длинных стержней, для которых возможно удовлетворение условий отсутствия напряжений только на цилиндрической поверхности. В работе [20] рассмотрены напряжения в стержне в асимптотических случаях длинноволнового ($L/D \gg 1$) и коротковолнового ($L/D \ll 1$) приближений. В работе [21] проанализированы две теоретические модели для описания первой и высших форм продольных колебаний длинного тонкого стержня с поправкой на поперечное смещение (поправка Рэлея) и поправкой на поперечное смещение и сдвиг (теория Бишопа). Приведено описание эксперимента, заключающегося в возбуждении в стержне и измерении его собственных частот первой и 29 высших форм осесимметричных и антисимметричных колебаний. Измеренные частоты используются для вычислений значений динамического модуля упругости E и динамического коэффициента Пуассона ν . Анализ полученных результатов позволил прийти к выводу, что теоретическая модель с учетом поправки Рэлея позволяет получить лучшее соответствие теоретических и экспериментальных данных. Используемая в работе [21] измерительно-регистрирующая аппаратура позволяет измерять и регистрировать частоты собственных колебаний стержня с достаточно высокой разрешающей способностью, но оценка методических и инструментальных погрешностей определения искомым динамических характеристик в этой работе отсутствует. Цели настоящей работы заключались в привлечении дополнительной гипотезы к теории Похгаммера – Кри, обеспечивающей выполнение всех условий отсутствия нормальных и касательных напряжений на цилиндрической и торцевых поверхностях стержня при осесимметричных резонансных (или собственных) продольно-поперечных колебаниях, в разработке методики расчета безразмерных резонансных частот первой и второй форм колебаний, позволяющей использовать обертоновый способ определения динамических характеристик материала (скорости волн сдвига c_2 и коэффициента Пуассона ν), в оценке методических погрешностей расчета резонансных частот путем сопоставления с данными, полученными известными приближенными методами, в оценке инструментальных погрешностей определения динамических характеристик материала на основе использования рассчитанных резонансных частот и экспериментальных результатов, опубликованных в доступных литературных источниках.

2. Основные соотношения

Выражения для амплитуд поперечного U_r и продольного U_z смещения при продольно-поперечных осесимметричных колебаниях первой формы, по аналогии с [22], могут быть записаны в следующем виде (в работе [22] на стр. 303, или стр. 294 в английском оригинале, представлены формулы для U_r и U_z применительно к антисимметричным колебаниям):

$$U_r = U [h A J_1(hr) - \gamma C J_1(kr)] \cos(\gamma z), \quad (1)$$

$$U_z = U [\gamma A J_0(hr) + k C J_0(kr)] \sin(\gamma z), \quad (2)$$

где

U – нормирующий коэффициент, имеющий размерность квадрата длины [20];

r – радиальная координата;

z – продольная координата;

A, C – безразмерные постоянные;

J_0, J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно;

γ – круговое волновое число,

$$\gamma = \omega/c; \quad (3)$$

ω – круговая частота;

c – фазовая скорость.

Формулы для определения h, k, Ω, α заимствованы из работы [23]:

$$(ha) = \sqrt{\alpha^2 \Omega^2 - (\gamma a)^2}, \quad (4)$$

$$(ka) = \sqrt{\Omega^2 - (\gamma a)^2}, \quad (5)$$

где

Ω – безразмерная резонансная частота,

$$\Omega = \omega a/c_2; \quad (6)$$

a – радиус стержня;

c_2 – скорость волн сдвига,

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}; \quad (7)$$

μ – модуль сдвига;

ρ – плотность материала стержня,

$$\alpha^2 = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu). \quad (8)$$

При резонансе первой формы колебаний $z = l, (\gamma l) = \pi/2, l = L/2, \cos(\gamma l) = 0, \sin(\gamma l) = 1, U_r = 0$. Зависимости для амплитуд радиальной ε_{rr} и продольной ε_{zz} деформаций получаются путем дифференцирования выражений (1) и (2) соответственно:

$$\varepsilon_{rr} = \partial U_r / \partial r = U \left\{ A \frac{h}{r} [J_1(hr) - (hr) J_0(hr)] + C \frac{\gamma}{r} [-J_1(kr) + (kr) J_0(kr)] \right\} \cos(\gamma z), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{zz} = \partial U_z / \partial z = U [\gamma^2 A J_0(hr) + k\gamma C J_0(kr)] \cos(\gamma z). \quad (10)$$

Амплитуда деформации сдвига ε_{rz} определяется известным выражением

$$\varepsilon_{rz} = \left[\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right]. \quad (11)$$

Подставив выражения (1), (2) в (11) и произведя дифференцирование, получим

$$\varepsilon_{rz} = U [-\gamma h A J_1(hr) + \gamma^2 C J_1(kr) - \gamma h A J_1(hr) - k^2 C J_1(kr)] \sin(\gamma z), \quad (12)$$

или

$$\varepsilon_{rz} = U [-2\gamma h A J_1(hr) + (\gamma^2 - k^2) C J_1(kr)] \sin(\gamma z). \quad (13)$$

Из условия отсутствия деформаций сдвига на цилиндрической поверхности стержня отношение A/C может быть представлено в следующем виде [24]:

$$\frac{A}{C} = \frac{(\gamma^2 - k^2) J_1(ka)}{2\gamma h J_1(ha)}. \quad (14)$$

После подстановки (14) в (13) находим

$$\varepsilon_{rz} = C U (\gamma^2 - k^2) \left[-\frac{J_1(hr) J_1(ka)}{J_1(ha)} + J_1(kr) \right] \sin(\gamma z). \quad (15)$$

На торце стержня $(\gamma z) = (\gamma l) = \pi/2$, $\sin(\gamma z) = 1$. Напряжение сдвига определяется известной формулой

$$\sigma_{rz} = \mu \varepsilon_{rz}. \quad (16)$$

Анализируя формулы (15), (16), приходим к выводу, что на торце стержня образуется стоячая волна сдвиговых напряжений, так как $\sigma_{rz} = 0$ при $r = 0$, $r = a$ и $\sigma_{rz} \neq 0$ при $0 < r < a$. Поскольку при продольном резонансе стержня на его торцах отсутствуют радиальные смещения (1), эта волна является чисто сдвиговой (SV-волной [25]). Известно, что при отражении нормальных волн от свободной безграничной поверхности упругой среды образуются поверхностные бегущие волны (волны Рэлея [26]). По аналогии с бегущими волнами Рэлея можно предположить, что при отражении стоячих сдвиговых волн от свободной поверхности торца стержня возникают обратные сдвиговые стоячие волны. Эти волны противоположны по знаку прямым волнам и затухают по мере удаления от свободной поверхности. Так как амплитуды прямой и обратной волн на поверхности равны по величине и обратны по знаку, происходит их компенсация, и поверхность оказывается свободной от сдвиговых напряжений. Однако такое логическое обоснование носит гипотетический характер и нуждается в подтверждении путем сравнения экспериментальных результатов определения резонансных

частот колебаний стержней с данными расчетов предлагаемым и известными способами, приведенными в доступных литературных источниках.

Для расчета резонансных частот Ω при осесимметричных колебаниях цилиндрического стержня необходимо решить дисперсионное уравнение [23]

$$[\Omega^2 - 2(\gamma a)^2]^2 J_0(ha) J_1(ka) + 4(\gamma a)^2 (ha)(ka) J_1(ha) J_0(ka) - 2\Omega^2 (ha) J_1(ha) J_1(ka) = 0. \quad (17)$$

С учетом выражений (4)–(6) можно прийти к заключению, что Ω является функцией ν и (γa) . Для заданного значения ν безразмерная частота Ω зависит только от (γa) . При резонансе колебаний нормальное напряжение на торце стержня $\sigma_{zz} = 0$ и продольная деформация $\varepsilon_{zz} = 0$, поскольку согласно [23] $\sigma_{zz} \sim \cos(\gamma l)$ и $\varepsilon_{zz} \sim \cos(\gamma l)$, а

$$\cos(\gamma l) = \cos(\pi/2) = 0. \quad (18)$$

Из условия

$$(\gamma l) = \pi/2, \quad (19)$$

умножая левую и правую части выражения (19) на a , получаем формулу для расчета (γa) :

$$(\gamma a) = \left(\frac{1}{2}\pi\right) \frac{a}{l} = \left(\frac{1}{2}\pi\right) \frac{1}{L/D}. \quad (20)$$

Нетрудно показать, что при резонансе осесимметричных колебаний второй формы для расчета (γa) следует использовать такую формулу:

$$(\gamma a) = \left(\frac{3}{2}\pi\right) \frac{1}{L/D}. \quad (21)$$

Методика проведения расчетов

С целью упрощения алгоритма расчетов резонансных частот Ω дисперсионное уравнение (17) преобразовано к виду

$$\left(1 - 2\frac{(\gamma a)^2}{\Omega^2}\right)^2 - \frac{2\xi}{\Omega^2} = -4\frac{(\gamma a)^2}{\Omega^4} \xi \eta, \quad (22)$$

где

$$\xi = \frac{(ha) J_1(ha)}{J_0(ha)}, \quad (23)$$

$$\eta = \frac{(ka) J_0(ka)}{J_1(ka)}. \quad (24)$$

Расчет резонансных частот первой формы колебаний стержня в нулевом приближении Ω_{10} производился с использованием соотношения

$$\Omega_{10} = \pi \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} K_1^{np} \frac{1}{L/D}, \quad (253)$$

где K_1^{np} – дисперсионный множитель, зависящий от ν и $\frac{D}{L}$. Значения K_1^{np} приведены в таблице, представленной в работе [17]. При выполнении расчетов Ω_{10} было установлено, что $(\gamma a) > \alpha \Omega_{10}$ для всех значений (γa) , α и $\Omega_{10} \approx \Omega$. Поэтому параметр (ha) в выражении (4) – мнимая величина,

$$(ha) = j (h^* a), \quad (264)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $(h^* a)$ – вещественный параметр,

$$(h^* a) = \sqrt{(\gamma a)^2 - (\alpha \Omega)^2}. \quad (27)$$

Подставив выражение (26) в (23), получим

$$\xi = \frac{j(h^* a)j I_1(h^* a)}{I_0(h^* a)} = - \frac{(h^* a) I_1(h^* a)}{I_0(h^* a)}, \quad (28)$$

где $I_0(h^* a)$, $I_1(h^* a)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно.

Алгоритм расчета Ω_1 первой формы осесимметричных колебаний цилиндрического стержня поясняется примером для исходных данных $\frac{L}{D} = 0,9$; $\nu = 0,20$ ($\alpha^2 = 3/8$). Из таблицы в работе [17] находим, что при указанных исходных данных $K_1^{np} = 0,92857$. Подставив значения величин $\frac{L}{D}$, ν , K_1^{np} в соотношение (25), вычисляем $\Omega_{01} = 2,51071627$ (вычисления выполнялись посредством калькулятора модели Sigma АК222, дисплей которого отображает 10 цифр). По формулам (20), (4), (5) рассчитываем $(\gamma a) = 1,745329252$, $(ha) = j 0,82600734$, $(ka) = 1,804860657$. Используя калькулятор функций Бесселя [27], находим $J_0(ka) = 0,337159666$, $J_1(ka) = 0,581594341$, $I_0(ha) = 1,177985033$, $I_1(ha) = j 0,449242813$.

По формулам (23), (24) рассчитываем $\xi = -0,315010675$, $\eta = 1,046306976$. Затем находим значения функций F_{01} и F_{02} , равных соответственно левой и правой частям уравнения (22): $F_{01} = 0,10106885$; $F_{02} = 0,101066813$. Вычисляем разность $\Delta F_0 = (F_{01} - F_{02}) = 0,000002037$. Так как $\Delta F_0 > 0$, задаемся значением резонансной частоты в первом приближении $\Omega_{11} < \Omega_{01}$. Положим $\Omega_{11} = \Omega_{01} / 1,000005 = 2,510703716$. Используя это значение Ω_{11} , по приведенному выше алгоритму находим $\Delta F_1 = 0,000001779$. Для определения резонансной частоты Ω_{21} во втором приближении используем формулу линейной интерполяции (экстраполяции)

$$\Omega_{21} = (\Omega_{11} - \frac{\Delta F_1}{\Delta F_0} \Omega_{01}) / (1 - \frac{\Delta F_1}{\Delta F_0}). \quad (295)$$

При противоположных по знаку разностях ΔF_0 , ΔF_1 формула (29) является формулой линейной интерполяции, $\Omega_{21} = 2,510709569$. Исходя из этого значения резонансной частоты, производим расчет разности ΔF_2 : $\Delta F_2 = -0,000000001$. Итак, искомая частота $\Omega_1 = \Omega_{21} = 2,510709569 \approx 2,510710$.

Выше было отмечено, что в таблице работы [17] приведены значения дисперсионного множителя K_1^{np} для разных значений коэффициента Пуассона ν в зависимости от отношения L/D с переменным шагом. Расчет Ω_{01} в нулевом приближении при $L/D > 1,5$ с шагом 0,1 производился путем линейной экстраполяции двух предыдущих найденных значений Ω_1 . Например, при $L/D = 1,4$ ($\nu = 0,20$) $\Omega_{1(1,4)} = 1,708203$, при $L/D = 1,5$ ($\nu = 0,20$) $\Omega_{1(1,5)} = 1,599$.

$$\Omega_{01(1,6)} = 2 \Omega_{1(1,5)} - \Omega_{1(1,4)}. \quad (30)$$

$\Omega_{01(1,6)} = 1,489797$. Для этого значения резонансной частоты по описанной выше методике вычисляем разность $\Delta F_{0(1,6)} = -0,008886435$. Так как $\Delta F_{0(1,6)} < 0$, задаемся значением резонансной частоты в первом приближении $\Omega_{11(1,6)} > \Omega_{01(1,6)}$. Положим $\Omega_{11(1,6)} = 1,008$, $\Omega_{01(1,6)} = 1,501715376$ и определим разность $\Delta F_{1(1,6)} = -0,000464932$.

Используя формулу линейной экстраполяции (29) ($\Delta F_{0(1,6)} < 0$, $\Delta F_{1(1,6)} < 0$), определяем значение резонансной частоты во втором приближении $\Omega_{21(1,6)} = 1,502373362$, а затем разность $\Delta F_{2(1,6)} = -0,000006990$. Рассчитываем значение резонансной частоты в третьем приближении $\Omega_{31(1,6)}$ по формуле линейной экстраполяции

$$\Omega_{31(1,6)} = (\Omega_{21(1,6)} - \frac{\Delta F_{2(1,6)}}{\Delta F_{1(1,6)}} \Omega_{11(1,6)}) / (1 - \frac{\Delta F_{2(1,6)}}{\Delta F_{1(1,6)}}). \quad (31)$$

$\Omega_{31(1,6)} = 1,502383404$. Определяем разность $\Delta F_{3(1,6)}$, соответствующую этому значению частоты: $\Delta F_{3(1,6)} = -0,000000006$. Искомая частота $\Omega_{1(1,6)} = \Omega_{31(1,6)} = 1,502383404 \approx 1,502383$.

На основе приведенного алгоритма расчетов резонансных частот колебаний первой формы при значениях отношений $L/D \geq 1,6$ с шагом 0,1 составлена программа по системе Matlab. Вычисления выполнялись посредством персонального компьютера Lenovo.

Для определения резонансных частот второй формы колебаний предварительно в ручном режиме (с использованием калькулятора) рассчитывали частоты для двух отношений $L/D = 0,9$ и $L/D = 1,0$ при фиксированных значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0,20; 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,45$. Методика расчетов поясняется следующим примером.

При $L/D = 0,90$ и $\nu = 0,20$ резонансная частота второй формы в нулевом приближении $\Omega_{02(0,9)}$ находится по зависимости

$$\Omega_{02(0,9)} = 2 \Omega_{1(0,9)}, \quad (32)$$

где $\Omega_{1(0,9)}$ – резонансная частота первой формы при $L/D = 0,9$ и $\nu = 0,20$ ($\alpha^2 = 3/8$).

$\Omega_{02(0,9)} = 2 \cdot 2,510710 = 5,021420$. По формулам (21), (4), (5) вычисляем $(\gamma a) = 1,5\pi / 0,9 = 5,235987756$, $(ha) = j 4,237932364$; $(ka) = j 1,483546078$. Используя калькулятор функций Бесселя, находим $I_0(ha) = 13,89423442$; $I_1(ha) = j 12,116962489$; $I_0(ka) = 1,6307047$; $I_1(ka) = j 0,965441362$. По зависимостям (23), (24) определяем значения параметров ξ и η : $\xi = -3,695840133$; $\eta = 2,505823406$. Затем вычисляем F_{10} (левая часть формулы (22)) и F_{20} (правая часть формулы (22)): $F_{10} = 1,67277365$; $F_{20} = 1,597403687$. Разность $\Delta F_0 = 0,075369963$. Так как $\Delta F_0 > 0$, резонансная частота в первом приближении $\Omega_{12(0,9)}$ должна быть выбрана в соответствии с неравенством $\Omega_{12(0,9)} < \Omega_{02(0,9)}$. Положим

$$\Omega_{12(0,9)} = \Omega_{02(0,9)} / 1,005. \quad (33)$$

$\Omega_{12(0,9)} = 4,996437811$. Затем по приведенному выше алгоритму определяем разность $\Delta F_1 = 0,059428579$. Значение резонансной частоты $\Omega_{22(0,9)} = 4,903305629$ во втором приближении находим, используя формулу линейной экстраполяции (30). Вычисляем разность ΔF_2 , соответствующую частоте $\Omega_{22(0,9)}$. $\Delta F_2 = -0,000305057$. Так как $\Delta F_1 > 0$, а $\Delta F_2 < 0$, резонансную частоту $\Omega_{32(0,9)}$ в третьем приближении рассчитываем по формуле линейной экстраполяции (30) (индексы 1,6 в формуле (30) следует заменить на 0,9). $\Omega_{32(0,9)} = 4,9034781251$. Определяем значение разности ΔF_3 , соответствующей частоте $\Omega_{32(0,9)}$: $\Delta F_3 = 0,000001798$.

Поскольку $\Delta F_2 < 0$, $\Delta F_3 > 0$, резонансную частоту в четвертом приближении $\Omega_{42(0,9)}$ определяем по формуле линейной интерполяции

$$\Omega_{42(0,9)} = (\Omega_{32(0,9)} - \frac{\Delta F_3}{\Delta F_2} \Omega_{22(0,9)}) / (1 - \frac{\Delta F_3}{\Delta F_2}). \quad (34)$$

$\Omega_{42(0,9)} = 4,903778464$. Находим соответствующую этому значению частоты разность $\Delta F_4 = 0,000000001$. Итак, искомое значение частоты $\Omega_{2(0,9)} = \Omega_{42(0,9)} = 4,903778464 \approx 4,903778$.

Произведя подобные расчеты применительно к значению отношения $L/D = 1,0$, получим $\Omega_{2(1,0)} = 4,488721616 \approx 4,488722$.

Резонансную частоту второй формы в нулевом приближении $\Omega_{02(1,1)}$ при $L/D = 1,1$ находим по зависимости (30), в которой индексы 01(1,6), 1(1,5), 1(1,4) заменены на 02(1,1), 02(1,0), 02(09) соответственно. $\Omega_{02(1,1)} = 2 \cdot 4,488722 - 4,903778 = 4,073666$. Для этого значения частоты по изложенной выше методике рассчитываем разность $\Delta F_{0(1,1)} = -0,058989458$. Поскольку $\Delta F_{0(1,1)} < 0$, значение частоты в первом приближении $\Omega_{12(1,1)}$ должно удовлетворять неравенству $\Omega_{12(1,1)} > \Omega_{02(1,1)}$. Положим $\Omega_{12(1,1)} = 1,0005 \cdot \Omega_{02(1,1)} \approx 4,075703$. Вычисляем соответствующую разность $\Delta F_{1(1,1)} = -0,057638357$. Для определения частоты второй формы колебаний во втором приближении $\Omega_{22(1,1)}$ используем обобщенную формулу линейной интерполяции (экстраполяции) при $n = 2$ (n – номер приближения, $n = 2, 3, 4, 5, \dots$):

$$\Omega_{n2} = (\Omega_{(n-1)2} - \frac{\Delta F_{(n-1)2}}{\Delta F_{(n-2)2}} \Omega_{(n-2)2}) / (1 - \frac{\Delta F_{(n-1)2}}{\Delta F_{(n-2)2}}). \quad (356)$$

$$\Omega_{22(1,1)} = (4,075703 - \frac{0,057638357}{0,058989458} 4,073666) / (1 - \frac{0,057638357}{0,058989458}) = 4,162602185.$$

Вычислив разность $\Delta F_{2(1,1)} = -0,001671487$, получим исходные данные для определения частоты в третьем приближении $\Omega_{32(1,1)} = 4,165197486$. Приводим данные последующих расчетов: $\Delta F_{3(1,1)} = 0,000740225$; $\Omega_{42(1,1)} = 4,164400913$; $\Delta F_{4(1,1)} = 0,00022937$; $\Omega_{52(1,1)} = 4,164043258$; $\Delta F_{5(1,1)} = -0,000000046$; $\Omega_{62(1,1)} = 4,16404333$; $\Delta F_{6(1,1)} = 0$. Итак, значение искомой частоты $\Omega_{2(1,1)} = \Omega_{62(1,1)} = 4,16404333 \approx 4,164043$.

На основе приведенного выше алгоритма составлена программа расчетов частот второй формы колебаний по системе Matlab. Для выполнения расчетов использовали персональный компьютер Lenovo.

Приводим результаты расчетов резонансной частоты второй формы при $L/D = 1,1$ на компьютере: $\Delta F_n \approx 7 \cdot 10^{-12}$; $\Omega_{n2} \approx 4,164043354$. Сравнивая это значение со значением, полученным в ручном режиме, находим $(\Omega_{2n} - \Omega_{2(1,1)}) = 0,000000024$.

Поскольку в настоящей работе принято округлять результаты расчетов частот с использованием 6 цифр после запятой, полученное расхождение не влияет на окончательный результат.

3. Результаты расчетов и их обсуждение

Значения безразмерных резонансных частот первой Ω_1 и второй Ω_2 форм колебаний стержня, рассчитанных по изложенной выше методике, сведены в табл. 1 и 2. Значения $\Omega_1 = 2,603827$ (табл. 1) и $\Omega_2 = 2,603827$ (табл. 2), а также соответствующие им значения $(\frac{L}{D})_1 = 0,853145$ и $(\frac{L}{D})_2 = 2,559434$, приведенные в работе [1], определены с абсолютными погрешностями $\Delta \Omega \leq \pm 10^{-6}$ и $\Delta(L/D) \leq \pm 10^{-6}$ по точным формулам теории мод Кри – Лэмба. Эти моды характеризуются отсутствием сдвиговых напряжений во всем объеме цилиндрического стержня.

Таблица 1

Значения резонансной частоты Ω_1 первой формы осесимметричных колебаний стержня для разных значений L/D и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,853145	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827
0,9	2,510710	2,511709	2,512389	2,512882	2,513257	2,513552
1,0	2,315038	2,321693	2,326501	2,330126	2,332955	2,335226
1,1	2,134344	2,146768	2,156296	2,163789	2,169818	2,174769
1,2	1,973553	1,990074	2,003366	2,014210	2,023187	2,030721
1,3	1,832236	1,851299	1,867203	1,880570	1,891905	1,901609
1,4	1,708203	1,728699	1,746274	1,761399	1,774485	1,785784
1,5	1,599000	1,620194	1,638753	1,655029	1,669346	1,681991
1,6	1,502383	1,523803	1,542866	1,559841	1,574977	1,588509
1,7	1,416441	1,437782	1,457024	1,474369	1,490011	1,504140
1,8	1,339579	1,360650	1,379850	1,397329	1,413244	1,427746
1,9	1,270481	1,291162	1,310170	1,327620	1,343635	1,358340
2,0	1,208056	1,228278	1,246996	1,264301	1,280292	1,295067
2,1	1,151404	1,171126	1,189491	1,206572	1,222446	1,237197
2,2	1,099772	1,118977	1,136950	1,153751	1,169445	1,184099
2,3	1,052531	1,071213	1,088772	1,105259	1,120797	1,135231
2,4	1,009150	1,027313	1,044449	1,060600	1,075809	1,090125
2,5	0,969179	0,986833	1,003544	1,019346	1,034277	1,048377
2,6	0,932234	0,949394	0,965683	0,981131	0,995770	1,009638
2,7	0,897988	0,914669	0,930543	0,945637	0,959978	0,973598
2,8	0,866156	0,882376	0,897846	0,912588	0,926630	0,939995
2,9	0,836494	0,852271	0,867347	0,881745	0,895485	0,908593
3,0	0,808789	0,824140	0,838836	0,852895	0,866340	0,879188
3,1	0,782853	0,797796	0,812125	0,825855	0,839006	0,851598
3,2	0,758573	0,773076	0,787050	0,800461	0,813326	0,825663
3,3	0,735656	0,749835	0,763468	0,776569	0,789155	0,801241
3,4	0,714122	0,727944	0,741249	0,754050	0,776364	0,778204
3,5	0,693811	0,707291	0,720280	0,732792	0,744840	0,756440
3,6	0,674620	0,687772	0,700458	0,712690	0,724482	0,735847
3,7	0,656459	0,669298	0,681692	0,693655	0,705198	0,716335
3,8	0,639249	0,651787	0,663901	0,675604	0,686906	0,697821
3,9	0,622916	0,635167	0,647012	0,658463	0,669532	0,680231
4,0	0,607396	0,619370	0,630956	0,642166	0,653010	0,663499
4,1	0,592628	0,604338	0,615676	0,626652	0,637278	0,647563
4,2	0,578561	0,590016	0,601115	0,611866	0,622281	0,632370
4,3	0,565144	0,576356	0,587224	0,597759	0,607970	0,617868
4,4	0,552335	0,563313	0,573959	0,584284	0,594299	0,604011
4,5	0,540094	0,550846	0,561278	0,571402	0,581225	0,590758
4,6	0,528381	0,538917	0,549144	0,559073	0,568712	0,578071
4,7	0,517166	0,527493	0,537522	0,547262	0,556724	0,565914
4,8	0,506416	0,516542	0,526380	0,535939	0,545228	0,554255
4,9	0,496104	0,506036	0,515690	0,525073	0,534195	0,543064
5,0	0,486202	0,495949	0,505424	0,514657	0,523598	0,532313

Таблица 2

Значения резонансной частоты Ω_2 второй формы осесимметричных колебаний стержня для разных значений L/D и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,9	4,903778	4,976292	5,043288	5,104919	5,161471	5,213328
1,0	4,488722	4,577238	4,619987	4,677196	4,729233	4,776557
1,1	4,164043	4,228880	4,267605	4,340567	4,388210	4,431117
1,2	3,906675	3,967887	4,022589	4,071262	4,114520	4,153024
1,3	3,700281	3,757734	3,808256	3,852521	3,891130	3,925383
1,4	3,532907	3,586320	3,632406	3,672078	3,706289	3,735940
1,5	3,395558	3,444536	3,485879	3,520770	3,550347	3,575611
1,6	3,281290	3,325367	3,361651	3,391618	3,416564	3,437560
1,7	3,184616	3,223297	3,254257	3,279241	3,299660	3,316594
1,8	3,101093	3,133919	3,159397	3,179472	3,195581	3,208755
1,9	3,027041	3,053675	3,073686	3,089084	3,101228	3,111034
2,0	2,959356	2,979694	2,994482	3,005610	3,014251	3,021152
2,1	2,895421	2,909702	2,919738	2,927203	2,932898	2,937407
2,2	2,833091	2,841983	2,848091	2,852528	2,855896	2,858545
2,3	2,770763	2,775351	2,778444	2,780666	2,782342	2,783654
2,4	2,707450	2,709119	2,710232	2,711029	2,711628	2,712095
2,5	2,642810	2,643027	2,643172	2,643275	2,643353	2,643414
2,559434	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827
2,6	2,577043	2,577136	2,577198	2,577243	2,577277	2,577303
2,7	2,510710	2,511709	2,512389	2,512882	2,513257	2,513552
2,8	2,444505	2,447096	2,448892	2,450210	2,451219	2,452019
2,9	2,379097	2,383654	2,386877	2,389274	2,391125	2,392602
3,0	2,315038	2,321693	2,326501	2,330126	2,332954	2,335226
3,1	2,252732	2,261455	2,267890	2,272812	2,276692	2,279830
3,2	2,192448	2,203111	2,211136	2,217362	2,222321	2,226362
3,3	1,134344	2,146768	2,156296	2,163789	2,169818	2,174769
3,4	2,078492	2,092478	2,103392	2,112088	2,119154	2,125000
3,5	2,024906	2,040254	2,052424	2,062240	2,070292	2,077002
3,6	1,973553	1,990074	2,003366	2,014210	2,023186	2,030721
3,7	1,924376	1,941896	1,956179	1,967957	1,977790	1,986100
3,8	1,877299	1,895660	1,910811	1,923429	1,934048	1,943082
3,9	1,832236	1,851299	1,867202	1,880570	1,891905	1,901609
4,0	1,789094	1,808737	1,825289	1,839320	1,851303	1,861623
4,1	1,747780	1,767897	1,785002	1,799617	1,812183	1,823065
4,2	1,708203	1,728699	1,746273	1,761399	1,774485	1,785878
4,3	1,670271	1,691067	1,709034	1,724602	1,738151	1,750007
4,4	1,633898	1,654923	1,673216	1,689166	1,703123	1,715396
4,5	1,599000	1,620194	1,638753	1,655029	1,669346	1,681991
4,6	1,565497	1,586809	1,605581	1,622133	1,636764	1,649741
4,7	1,533315	1,554700	1,573639	1,590422	1,605324	1,618597
4,8	1,502383	1,523803	1,542867	1,559841	1,574977	1,588509
4,9	1,472635	1,494055	1,513209	1,530338	1,545673	1,559433
5,0	1,444007	1,465400	1,484612	1,501863	1,517367	1,531324

3.1. Оценка точности расчета резонансных частот

При определении безразмерных резонансных частот с использованием таблиц их значений при разных дискретных величинах ν и L/D возникают методические погрешности, источниками которых являются неточности расчета частот, а также математические операции интерполяции. Поскольку частоты рассчитывались с использованием 9 цифр после запятой, а итоговые значения частот округлялись до значений с 6 цифрами, можно полагать, что абсолютная погрешность приведенных в таблицах частот $\Delta\Omega \leq \pm 5 \cdot 10^{-7}$.

Для оценки методических погрешностей расчета частот произведено их сравнение с результатами, полученными методом Рэлея – Ритца [14]. В табл. 4 этой работы приведены данные расчетов частот осесимметричных колебаний первой формы $\Omega_{1R} = 0,783195$ и второй формы $\Omega_{2R} = 2,209040$ при $\nu = 0,286$ и $L/D = 3,2$. Для таких значений ν и L/D по приведенной выше методике в ручном режиме рассчитаны соответствующие частоты $\Omega_1 = 0,783195099 \approx 0,783195$ и $\Omega_2 = 2,209099332 \approx 2,209099$. Расхождения составили $\frac{\Omega_{1R}}{\Omega_1} = 1,0$; $\frac{\Omega_{2R}}{\Omega_2} \approx 0,999973$ ($-0,0027\%$). Таким образом, значения частот первой формы с точностью 6 цифр после запятой совпадают. С целью оценки методических погрешностей, возникающих из-за линейной интерполяции, были рассчитаны частота первой формы колебаний Ω_{1N} при $\nu = 0,286$ с использованием значений $\Omega_{1(0,25)}$ при $\nu = 0,25$ и $\Omega_{1(0,30)}$ при $\nu = 0,30$ для $L/D = 3,2$ (табл. 1), а также частота второй формы колебаний Ω_{2N} при таких же значениях ν и L/D (табл. 2). Расхождения составили $\frac{\Omega_{1N}}{\Omega_1} \approx \frac{0,783137}{0,783195} \approx 0,999926$ ($-0,0074\%$) и $\frac{\Omega_{2N}}{\Omega_2} \approx \frac{2,208889}{2,209099} \approx 0,999905$ ($-0,0095\%$). Выполненные вычисления позволяют прийти к выводу о том, что в случае определения ν по отношению частот $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\Omega_{2N}}{\Omega_{1N}} \frac{0,999926}{0,999905} \approx 1,000018$ ($0,0018\%$) происходит существенная компенсация методических погрешностей из-за линейной интерполяции.

В табл. 7 работы [14] приведены, в частности, результаты расчетов методом Рэлея – Ритца резонансных частот первой Ω_{1R} и второй Ω_{2R} форм осесимметричных колебаний стержня для $\nu = 0,30$ при $L/D = 1,0$: $\Omega_{1R} = 2,32630222 \approx 2,326302$; $\Omega_{2R} = 4,89603087 \approx 4,896031$ (в упомянутой таблице частота Ω_2 обозначена Ω_4 и приведены значения частот промежуточных форм Ω_2 и Ω_3 , не рассматриваемых в данном исследовании). По табл. 1 $\Omega_{1(0,30;1,0)} = 2,326501$; по табл. 2 $\Omega_{2(0,30;1,0)} = 4,619987$. Расхождения составляют $\frac{\Omega_{1R}}{\Omega_1} = 0,999914$ ($-0,00855\%$) и $\frac{\Omega_{2R}}{\Omega_2} \approx 1,06$ (6%). Однако значение Ω_{2R} не согласуется с результатами эксперимента, приведенного на рис. 1 работы [16], и поэтому подлежит более тщательной экспериментальной проверке. Поскольку для образцов материала в виде цилиндрических стержней рассчитаны значения безразмерных резонансных частот первой и второй форм осесимметричных колебаний (табл. 1, 2), имеется возможность определения характеристик c_2 и ν на одном образце известным обертоном способом [28]. Этот способ более удобен при выполнении экспериментов и обладает повышенной точностью. Для повышения оперативности обработки экспериментальных данных целесообразно использовать кроме табл. 1 и 2 таблицу отношений резонансных частот $\frac{f_2}{f_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ для разных значений L/D и ν (табл. 3). Расчет характеристик c_2 и ν выполняют следующим образом. Вначале вычисляют отношение L_e/D_e по измеренным значениям длины и диаметра образца. Затем, используя метод линейной интерполяции, по табл. 3 рассчитывают при этом отношении величины f_2/f_1 для всех значений ν , приведенных в таблице. Далее, линейно интерполируя и используя экспериментальное значение f_{2e}/f_{1e} , определяют искомое значение ν_e .

Таблица 3

Отношения резонансных частот $\frac{f_2}{f_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ второй и первой форм колебаний стержня
в зависимости от значений L/D и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,9	1,953144	1,981237	2,007367	2,031500	2,053698	2,074088
1,0	1,938941	1,971509	1,985809	2,007272	2,027143	2,045437
1,1	1,950971	1,969882	1,979137	2,005998	2,022386	2,037512
1,2	1,979514	1,993839	2,007915	2,021270	2,033682	2,045098
1,3	2,019544	2,029782	2,039551	2,048592	2,056726	2,064243
1,4	2,068201	2,074577	2,080089	2,084751	2,088656	2,092045
1,5	2,123551	2,126002	2,127153	2,127316	2,126789	2,125820
1,6	2,184057	2,182281	2,178835	2,174336	2,169279	2,164017
1,7	2,248322	2,241854	2,233496	2,224166	2,214520	2,204977
1,8	2,314976	2,303251	2,289667	2,275392	2,261167	2,247427
1,9	2,382594	2,365060	2,346021	2,326783	2,308088	2,290320
2,0	2,449684	2,425912	2,401356	2,337290	2,354346	2,332815
2,1	2,514687	2,484534	2,467056	2,426049	2,399204	2,374244
2,2	2,576071	2,539805	2,454611	2,472395	2,442095	2,414110
2,3	2,632476	2,590849	2,505027	2,515850	2,482622	2,452060
2,4	2,682901	2,637092	2,594892	2,556128	2,520548	2,487875
2,5	2,726854	2,678292	2,633838	2,593109	2,555750	2,521434
2,6	2,764374	2,714506	2,668783	2,626808	2,588225	2,552700
2,7	2,795928	2,746030	2,699917	2,657343	2,618036	2,581714
2,8	2,822246	2,773303	2,727519	2,684903	2,645305	2,608545
2,9	2,844129	2,796026	2,751928	2,709711	2,670201	2,633304
3,0	2,862351	2,817110	2,773487	2,732020	2,692885	2,656117
3,1	2,877593	2,834628	2,792538	2,752071	2,713559	2,677120
3,2	2,890417	2,849799	2,809397	2,770106	2,732386	2,696454
3,3	2,901280	2,862987	2,824344	2,786345	2,749546	2,714251
3,4	2,910556	2,874504	2,837632	2,800992	2,765206	2,730646
3,5	2,918527	2,884603	2,849481	2,814223	2,779512	2,745759
3,6	2,925429	2,893508	2,860080	2,826208	2,792597	2,759785
3,7	2,931449	2,901392	2,869594	2,837083	2,804588	2,772585
3,8	2,936726	2,908404	2,868156	2,846977	2,815593	2,784499
3,9	2,941385	2,914665	2,885885	2,856000	2,825713	2,795534
4,0	2,945515	2,920285	2,892894	2,864244	2,835030	2,805766
4,1	2,949202	2,925345	2,899161	2,871796	2,843630	2,815270
4,2	2,952503	2,929919	2,905056	2,878733	2,851582	2,824103
4,3	2,955479	2,934067	2,910361	2,885112	2,858942	2,832332
4,4	2,958165	2,937839	2,915219	2,891002	2,865768	2,840008
4,5	2,960596	2,941283	2,919682	2,896435	2,872117	2,847174
4,6	2,962818	2,944440	2,923789	2,901469	2,878019	2,853873
4,7	2,964841	2,947338	2,927581	2,906144	2,883518	2,860147
4,8	2,966697	2,950008	2,931090	2,910482	2,888658	2,866026
4,9	2,968400	2,952468	2,934338	2,914524	2,893462	2,871546
5,0	2,969973	2,954739	2,937360	2,918296	2,897962	2,876736

Определение характеристики c_2 производят в следующей последовательности. Рассчитывают безразмерные частоты Ω_{11} и Ω_{12} или Ω_{21} и Ω_{22} для L_e/D_e и двух табличных значений ν_1 и ν_2 , наиболее близких к ν_e и выбранных в соответствии с неравенствами $\nu_1 < \nu_e < \nu_2$. Методом линейной интерполяции находят значение Ω_{1e} или Ω_{2e} и рассчитывают c_{2e} по формуле

$$c_{2e} = \frac{\pi f_{1e} D_e}{\Omega_1} \quad (36)$$

или

$$c_{2e} = \frac{\pi f_{2e} D_e}{\Omega_2}. \quad (37)$$

3.2. Оценка погрешностей определения характеристик c_2 и ν

Оценка инструментальных погрешностей определения характеристик c_2 и ν была выполнена с использованием экспериментальных результатов, приведенных в работах [14, 29]. Для цилиндрического образца из нержавеющей стали марки Din 1.4301 диаметром $D_e = 49,9$ мм и длиной $L_e = 159,9$ мм измерены, в частности, резонансные частоты первой $f_{1e} = 15550$ Гц и второй $f_{2e} = 43780$ Гц форм продольно-поперечных осесимметричных колебаний (табл. 6 работы [14] и табл. 1 работы [29]). Пользуясь табл. 3, методом линейной интерполяции производим расчет отношений частот $\frac{f_{2(0,25)}}{f_{1(0,25)}}$ при $\nu = 0,25$ и $\frac{f_{2(0,30)}}{f_{1(0,30)}}$ при $\nu = 0,30$ для значения $\frac{L_e}{D_e} = \frac{159,9 \text{ мм}}{49,9 \text{ мм}} \approx 3,204409$: $\frac{f_{2(0,25)}}{f_{1(0,25)}} = 2,850380459$; $\frac{f_{2(0,30)}}{f_{1(0,30)}} = 2,810056013$. Используя эти значения резонансных частот и отношение частот $\frac{f_{2e}}{f_{1e}} = \frac{43780 \text{ Гц}}{15550 \text{ Гц}} = 2,815434$ и применив метод линейной интерполяции, вычисляем значение $\nu = 0,293332 \approx 0,293$. Для оценки инструментальной составляющей погрешностей определения ν , вызванной неточностью измерений резонансных частот в процессе экспериментальных исследований, найдем вначале значение абсолютной средней квадратичной погрешности определения отношения $\frac{f_{2e}}{f_{1e}}$ по формуле

$$\Delta\left(\frac{f_{2e}}{f_{1e}}\right) = \frac{\Delta f}{f_{1e}} \sqrt{1 + \frac{f_{1e}^2}{f_{2e}^2}}, \quad (38)$$

где $\Delta f = \pm 25$ Гц; $\Delta\left(\frac{f_{2e}}{f_{1e}}\right) \approx \pm 0,001706$. Далее находим $\frac{f_{2e+}}{f_{1e+}} = 1,001706 \frac{f_{2e}}{f_{1e}} = 1,001706 \cdot 2,815434 = 2,82023713$; $\frac{f_{2e-}}{f_{1e-}} = (1 - 0,001706) \cdot 2,815434 = 2,81063087$ и, линейно интерполируя, вычисляем ν_+ и ν_- :

$$\nu_+ = 0,30 - \frac{2,82023713 - 2,810056013}{2,850380459 - 2,810056013} \cdot 0,05 = 0,287376 \approx 0,287;$$

$$\nu_- = 0,30 - \frac{2,81063087 - 2,810056013}{2,850380459 - 2,810056013} \cdot 0,05 = 0,299287 \approx 0,299. \text{ Среднее значение } \nu \approx 0,293. \text{ Итак, } \nu \approx 0,293 \pm 0,006, \text{ или } \nu \approx 0,293 \pm 2 \%. \text{$$

Как отмечено в подразделе 3.1, скорость сдвиговых волн c_2 может быть рассчитана по формуле (36) или (37). С целью уменьшения составляющей погрешности определения резонансной частоты, вызванной неточностью расчета ν , целесообразно выбрать частоту той формы колебаний, при которой наблюдается меньшая чувствительность к изменению ν при L_e/D_e . Согласно табл. 1, при $\frac{L_e}{D_e} = 3,2$ отношение безразмерных частот $\frac{\Omega_{1(0,45)}}{\Omega_{1(0,25)}} = \frac{0,825663}{0,758523} \approx 1,0885$

(значки (0,45) и (0,25) в индексах частот соответствуют $\nu = 0,45$ и $\nu = 0,25$). При $\frac{L_e}{D_e} = 3,2$, в соответствии с табл. 2, отношение частот $\frac{\Omega_{2(0,45)}}{\Omega_{2(0,25)}} = \frac{2,226362}{2,192448} \approx 1,0155$ (1,55 %).

Для определения c_2 выбираем формулу (37), так как в этом случае зависимость Ω от изменения ν ниже (в 1,072 раза), чем при использовании формулы (36). При этом также снижается относительная инструментальная погрешность $\frac{\Delta f}{f_{2e}}$ вследствие того, что $f_{2e} > f_{1e}$.

Расчет c_2 производим в следующей последовательности:

1. Находим в табл. 2 значения $\Omega_{2(3,2;0,25)} = 2,203111$ и $\Omega_{2(3,3;0,25)} = 2,146768$ при $\nu = 0,25$; $\frac{L_e}{D_e} = 3,2$ и $\frac{L_e}{D_e} = 3,3$ соответственно.
2. Используя метод линейной интерполяции, вычисляем $\Omega_{2(3,204409;0,25)} = 2,203111 - \frac{3,3 - 3,204409}{0,1} (2,203111 - 2,146768) = 2,144169$.
3. Находим в табл. 2 значения $\Omega_{2(3,2;0,30)} = 2,211136$ и $\Omega_{2(3,3;0,30)} = 2,156296$.
4. По аналогии с п. 2 вычисляем $\Omega_{2(3,204409;0,30)} = 2,211136 - \frac{3,3 - 3,204409}{0,1} (2,211136 - 2,156296) = 2,158814$.
5. Рассчитываем Ω_2 при $\frac{L_e}{D_e} = 3,204409$ и $\nu = 0,293$: $\Omega_{2(3,204409;0,293)} = 2,144169 + \frac{0,293 - 0,25}{0,05} (2,158814 - 2,144169) = 2,156764$.
6. По формуле (36) находим $c_2 = \frac{\pi \cdot 43780 \cdot 0,0499}{2,156764} \approx 3182,1$ (м/с).

Оценку относительной средней квадратичной погрешности определения c_2 производим по формуле, выведенной из формулы (36):

$$\frac{\Delta c_2}{c_2} = \pm \sqrt{\frac{(\Delta f)^2}{(f_{2e})^2} + \frac{(\Delta D_e)^2}{D_e^2} + \frac{(\Delta \Omega_2)^2}{\Omega_2^2}}, \quad (39)$$

где $\Delta f = 25$ Гц; $f_{2e} = 43780$ Гц; $\Delta D_e = 0,00005$ м; $D_e = 0,0499$ м.

Для того чтобы определить приращение $\Delta \Omega_2$, необходимо рассчитать Ω_2 при значениях $\nu_{min} = 0,287$ и $\nu_{max} = 0,299$:

$$\Omega_{2min} = \Omega_{2(3,204409;0,287)} = 2,144169 + \frac{0,287 - 0,25}{0,05} (2,158814 - 2,144169) = 2,155006;$$

$$\Omega_{2max} = \Omega_{2(3,204409;0,299)} = 2,144169 + \frac{0,299 - 0,25}{0,05} (2,158814 - 2,144169) = 2,158521.$$

$$\Delta \Omega_2 = \Omega_{2max} - \Omega_{2min} = 2,158521 - 2,155006 = 0,003515.$$

Подставив числовые значения параметров в формулу (38) и произведя вычисления, получим

$$\frac{\Delta c_2}{c_2} = \pm 10^{-3} \sqrt{0,326 + 1,004012 + 2,655801} \approx \pm 2 \cdot 10^{-3} = \pm 0,2 \text{ \%}.$$

Сравнивая числовые значения составляющих погрешности под квадратным корнем, приходим к выводу, что наибольший вклад в погрешность $\frac{\Delta c_2}{c_2}$ вносит погрешность определения коэффициента Пуассона ν .

4. Заключение

На основе теории Похгаммера – Кри и предложенной гипотезы о возникновении на торцах цилиндрического стержня при продольно-поперечных резонансных колебаниях стоячих поверхностных сдвиговых волн, компенсирующих при отражении от торца нормальные стоячие сдвиговые волны, выведены соотношения для расчета безразмерных резонансных частот, и предложена методика их расчета при фиксированных значениях отношений длины

к диаметру стержня L/D в пределах 0,9–5,0 с шагом 0,1 и коэффициентов Пуассона в пределах 0,25–0,45 с шагом 0,05. Разработан алгоритм расчетов безразмерных резонансных частот стержня первой и второй форм резонансных колебаний, и составлена программа расчетов посредством персонального компьютера по системе Matlab. Результаты расчетов сведены в цифровые таблицы значений частот с 6 значащими цифрами после запятой, а также в таблицу отношений частот второй и первой форм колебаний. Произведенная оценка точности расчета резонансных частот путем сравнения с расчетами методом Рэлея – Ритца показала вполне удовлетворительную сходимость результатов. Выполнен анализ методических погрешностей вычислений. Описана методика расчета динамических характеристик материала (скорости сдвиговых волн c_2 и коэффициента Пуассона ν) с использованием экспериментальных результатов, приведенных в известных работах, и цифровых таблиц, а также произведена оценка инструментальных погрешностей определения c_2 и ν .

Благодарность

Автор выражает благодарность Р. С. Скалозубу за помощь в поиске и доставке необходимой литературы, А. С. Скалозубу за компьютерное сопровождение при подготовке и оформлении рукописи статьи и М. А. Скалозубу за составление программы и выполнение расчетов посредством персонального компьютера.

Литература

1. Мелешко В. В., Якименко Н. С., Улитко А. Ф. Резонансный метод определения упругих постоянных конечных изотропных цилиндров // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11 (3). – С. 65–75.
2. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1876. – Vol. 1876 (81). – P. 324–336. – DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Chree C. Longitudinal vibrations of a corcablar bar // The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1886. – Vol. 21. – P. 287–298.
4. Chree C. On longitudinal vibrations // Quart. J. Math. – 1889. – Vol. 23. – P. 317–342.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.
6. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibration of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – Vol. 51 (1). – P. 233–240.
7. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length // Soviet Physics. Acoustics. – 1978. – Vol. 24, No. 6. – P. 861–866.
8. Hutchinson J. R. Vibrations of solid cylinders // Journal of Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 47 (4). – P. 901–907. – DOI: 10.1515/1.3153811.
9. Чернышев К. В., Шегай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины // Акустический журнал. – 1977. – Т. 23 (4). – С. 627–631.
10. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution // Wave Motion. – 2003. – Vol. 37. – P. 191–206. – DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
11. Puckett A. D., Peterson M. L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides // Ultrasonics. – 2005. – Vol. 43 (3). – P. 197–207. – DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
12. Leissa A. W., So J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beam from one-dimensional and three-dimensional analysis // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98. – P. 2122–2135. – DOI: 10.1121/1.414331.

13. Leissa A. W., So J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1995. – Vol. 98. – P. 2136–2141. – DOI: 10.1121/1.414403.
14. Nieves F. J., Bayón A., Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder // *J. Sound Vib.* – 2008. – Vol. 311 (1–2). – P. 588–596. – DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
15. Nieves F. J., Gascón F., Bajón A. An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder // *Journal of Sound and Vibration.* – 2008. – Vol. 313 (3–5). – P. 617–630. – DOI: 10.1016/j.jsv.2007.11.041.
16. Nieves F. J., Gascón F., Bayon A. Precise and direct determination of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter // *Review of Scientific Instruments.* – 2000. – Vol. 71 (6). – P. 2433–2439. – DOI: 10.1063/1.1150632.
17. Stupin V. A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions // *Russian Journal of Nondestructive Testing.* – 2000. – Vol. 36. – P. 896–899. – DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Сибаяма К. Пьезокерамические преобразователи в виде коротких стержней // *Ультразвуковые преобразователи / под ред. Е. Кичуци; пер. с англ. - М. : Мир, 1972. – С. 310–352.*
19. Gadzhibekov T. A., Ilyashenko A. V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio // *Mechanics of Solids.* – 2021. – Vol. 56. – P. 702–714. – DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov V. V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range // *Acoustical Physics.* – 2022. – Vol. 68 (3). – P. 206–214. – DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* – 2021. – Т. 8 (2). – С. 270–281. – DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
22. Ляв А. Математическая теория упругости / пер. с англ. – М.-Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
23. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. A mer.* – 1972. – Vol. 51 (1, part 2). – P. 265–283.
24. Mokryakov V. V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Procedia Structural Integrity.* 2019. – Vol. 23. – P. 143–148. – DOI: 10.1016/j.prostr.2020.01.077.
25. Бабич В. М., Киселев А. П. Упругие волны. Высокочастотная теория. – СПб. : БХВ-Петербург, 2014. – 320 с.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Теория упругости: учебное пособие. – 4-е изд. – М. : Наука, 1987. – 248 с. – Т. 7.
27. URL: <https://www.calculate.co.nz/bessel-functions-calculator.php>
28. Пьезокерамические преобразователи. Методы измерения и расчет параметров : справочник / В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша, Н. И. Прудько, С. И. Пугачёв / под ред. С. И. Пугачёва. – Л. : Судостроение, 1984. – 256 с.
29. Nieves F. J.; Gascón F., Bayón A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus // *The Journal of the Acoustical Society of America.* – 2004. – Vol. 115. – P. 2928–2936. – DOI: 10.1121/1.1739485.