

Received: 25.11.2025
Revised: 24.04.2026
Accepted: 05.06.2026
DOI: 10.17804/2410-9908.2026.3.035-048

NUMERICAL MODELING AND PARAMETRIC ANALYSIS OF COUETTE FLOW IN FLUIDS WITH COUPLE STRESSES

K. V. Gubareva^{1, a, *} and E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}

¹Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru
Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia
Tel.: +7 (846) 332-4226

A systematic parametric analysis of the generalized Couette flow within a micropolar fluid model with couple stresses is presented. The study is based on exact analytical solutions implemented in the Matlab R2023b environment, and it covers a wide range of dimensionless parameters, namely the couple viscosity coefficient $s \in [0.03; 5.0]$, the Reynolds number $Re \in [30; 250]$, and the Taylor number $Ta \in [10; 250]$. Point-wise and integral deviation metrics are used to compare the classical and micropolar flows. A dimensionless characteristic defined as the ratio of the average velocity to the maximum velocity gradient is introduced. The results allow us to assess quantitatively the applicability limits for the Newtonian model and to reveal flow regimes where microstructural effects become determinant. The obtained correlations are of practical importance for modeling complex fluids in microfluidic and biomedical systems.

Keywords: Couette flow, micropolar fluid, couple stresses, parametric analysis, similarity numbers, nonlinear velocity profiles, velocity gradients, shear stress, mathematical modeling

References

1. Coles, D. Transition in circular Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, 21 (3), 385–425. DOI: 10.1017/S0022112065000241.
2. Pop, I., Groșan, T., Revnic, C., and Roșca, A.V. Unsteady flow and heat transfer of nanofluids, hybrid nanofluids, micropolar fluids and porous media: a review. *Thermal Science and Engineering Progress*, 2023, 46, 102248. DOI: 10.1016/j.tsep.2023.102248.
3. Kocić, M., Stamenković, Ž., Petrović, J., and Bogdanović-Jovanović, J. MHD micropolar fluid flow in porous media. *Advances in Mechanical Engineering*, 2023, 15 (6), 16878132231178436. DOI: 10.1177/16878132231178436.
4. Eringen, A.C. Theory of micropolar fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966, 16 (1), 1–18. DOI: 10.1512/iumj.1967.16.16001.
5. Eringen, A.C. *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*, Springer, New York, NY, 1999, 325 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0555-5.

6. Łukaszewicz, G. *Micropolar Fluids. Theory and Applications, Series Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhäuser, Boston, MA, 1999, 253 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0641-5.
7. Stokes, V.K. *Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 212 p.
8. Ariman, T., Turk, M.A., and Sylvester, N.D. Microcontinuum fluid mechanics – a review. *International Journal of Engineering Science*, 1973, 11 (8), 905–930. DOI: 10.1016/0020-7225(73)90038-4.
9. Jalili, B., Azar, A.A., Jalili, P., and Ganji, D.D. Analytical approach for micropolar fluid flow in a channel with porous walls. *Alexandria Engineering Journal*, 2023, 79, 196–226. DOI: 10.1016/j.aej.2023.08.015.
10. Siddiqui, A.A. and Turkyilmazoglu, M. Film flow of nano-micropolar fluid with dissipation effect. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2024, 140 (3), 2487–2512. DOI: 10.32604/cmes.2024.050525.
11. Ahmed, M.M., Eldesoky, I.M., Nasr, A.G., Abumandour, R.M., and Abdelsalam, S.I. The profound effect of heat transfer on magnetic peristaltic flow of a couple stress fluid in an inclined annular tube. *Modern Physics Letters B*, 2024, 38 (25), 2450233. DOI: 10.1142/s0217984924502336.
12. Zhang, M., Jiang, X., and Arefi, M. Dynamic formulation of a sandwich microshell considering modified couple stress and thickness-stretching. *The European Physical Journal Plus*, 2023, 138 (3), 227. DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-03753-4.
13. Dhange, M., Devi, C.U., Jamshed, W., Eid, M.R., Ramesh, K., Shamshuddin, M.D., and Batool, K. Studying the effect of various types of chemical reactions on hydrodynamic properties of dispersion and peristaltic flow of couple-stress fluid: comprehensive examination. *Journal of Molecular Liquids*, 2024, 409, 125542. DOI: 10.1016/j.molliq.2024.125542.
14. Maurya, P.K., Deo, S., and Maurya, D.K. Couple stress fluid flow enclosing a solid sphere in a porous medium: effect of magnetic field. *Physics of Fluids*, 2023, 35 (7), 072006. DOI: 10.1063/5.0155532.
15. Siddheshwar, P.G. and Sri Krishna, C.V. Linear and non-linear analyses of convection in a micropolar fluid occupying a porous medium. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38 (10), 1561–1579. DOI: 10.1016/S0020-7462(02)00120-8.
16. Giora, R.S.R. Unsteady mixed convection in micropolar boundary layer flow on a vertical plate. *Fluid Dynamics Research*, 1995, 15, 237–250. DOI: 10.1016/0169-5983(95)94957-U.
17. Nadeem, S., Haq, R.U., and Khan, Z.H. Numerical study of MHD boundary layer flow of a Maxwell fluid past a stretching sheet in the presence of nanoparticles. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 2014, 45 (1), 121–126. DOI: 10.1016/j.jtice.2013.04.006.
18. Takhar, H.S., Bhargava, R., Agrawal, R.S., and Balaji, A.V.S. Finite element solution of micropolar fluid flow and heat transfer between two porous discs. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38 (17), 1907–1922. DOI: 10.1016/S0020-7225(00)00019-7.
19. Srinivasacharya, D., Mishra, M., and Rao, A.R. Peristaltic pumping of a micropolar fluid in a tube. *Acta Mechanica*, 2003, 161 (3), 165–178. DOI: 10.1007/s00707-002-0993-y.
20. Prakash, J. and Tripathi, D. Melting heat transfer in electroosmotic augmented stagnation point flow of a micropolar fluid over stretching porous sheet. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2026, 87 (1). DOI: 10.1080/10407782.2025.2521423.
21. Murashkin, E.V. and Radayev, Yu.N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2014, 18 (4), 85–97. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1331.
22. Bykova, S. and Ivanova, E. A micropolar continuum and equations of electrodynamics of moving media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2025, 37 (4), 67. DOI: 10.1007/s00161-025-01398-5.

23. Pattnaik, P.K., Jena, S., Dei, A., and Sahu, G. Impact of chemical reaction on micropolar fluid past a stretching sheet. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, 18 (1), 207–223. DOI: 10.17654/HM018010207.
24. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. The inhomogeneous Couette flow of a micropolar fluid. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2025, 21 (3), 345–358. DOI:10.20537/nd250601.
25. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to the Navier-Stokes equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 3, 41–63. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-3/2024-3_438.html
26. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Polynomial exact solutions for describing unidirectional flows of micropolar incompressible media. *Procedia Structural Integrity*, 2024, 65, 39–43. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.007.
27. Baranovskii, E.S., Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., and Yudin, A.V. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing three-dimensional flows of micropolar liquids. *Symmetry*, 2024, 16 (12), 1669. DOI: 10.3390/sym16121669.
28. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution for nonuniform unidirectional Nusselt flow taking into account couple stresses. *Procedia Structural Integrity*, 2024, 65, 44–47. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.008.
29. Baranovskii, E.S., Prosviryakov, E.Yu., and Ershkov, S.V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2025, 84, 104294. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
30. Burmasheva, N., Ershkov, S., Prosviryakov, E., and Leshchenko, D. Inhomogeneous gradient Poiseuille flows of a vertically swirled fluid. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2024, 10 (1), 1–12. DOI: 10.22055/jacm.2023.43959.4150.
31. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier-Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
32. Burmasheva, N. and Prosviryakov, E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2 (2), 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.

Подана в журнал: 25.11.2025
УДК 532.516, 532.135, 519.6
DOI: 10.17804/2410-9908.2026.3.035-048

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ЖИДКОСТЯХ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвирыков^{2, 3, б}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе проведен систематический параметрический анализ обобщенного течения Куэтта в рамках микрополярной модели жидкости с моментными напряжениями. Исследование основано на точных аналитических решениях, реализованных в среде Matlab R2023b, и охватывает широкий диапазон безразмерных параметров: коэффициента моментной вязкости $s \in [0,03; 5,0]$, числа Рейнольдса $Re \in [30; 250]$ и числа Тейлора $Ta \in [10; 250]$. Сравнение классического и микрополярного течений выполнено с использованием поточечных и интегральной метрик отклонения. Введена безразмерная характеристика, определяемая как отношение средней скорости к максимальному градиенту. Результаты позволяют количественно оценить границы применимости ньютоновской модели и выявить режимы, в которых микроструктурные эффекты становятся определяющими. Полученные зависимости имеют прикладное значение для моделирования сложных жидкостей в микрофлюидных и биомедицинских системах.

Ключевые слова: течение Куэтта, микрополярная жидкость, моментные напряжения, параметрический анализ, числа подобия, нелинейные профили скорости, градиенты скорости, касательные напряжения, математическое моделирование

1. Введение

Течение между двумя параллельными пластинами, известное как течение Куэтта, с момента своего экспериментального установления Морисом Куэттом в 1890 году остается одной из фундаментальных модельных задач механики сплошных сред [1]. Его значение обусловлено уникальным сочетанием физической простоты и математической строгости: в рамках модели Навье – Стокса оно допускает точное аналитическое решение, что делает его незаменимым инструментом для верификации численных схем, калибровки экспериментальных установок и изучения устойчивости течений.

Классическая постановка предполагает, что жидкость является ньютоновской, несжимаемой и не обладает внутренней структурой. Однако с развитием нанотехнологий,

микрофлюидики и биомеханики все чаще возникает необходимость в описании течений сред, для которых эти допущения оказываются неприменимы [2].

Бурное развитие микро- и нанотехнологий в последние два десятилетия выявило ограниченность классических гидродинамических моделей при описании течений в каналах субмикронных размеров. Эффекты капиллярности, поверхностного натяжения, а также влияние микроструктуры жидкости становятся доминирующими при характерных размерах менее 100 микрон. В этих условиях классическая модель Навье – Стокса требует существенной модификации.

Особую актуальность приобретает изучение течений сложных сред, к которым относятся полимерные расплавы и растворы, коллоидные суспензии и наножидкости, жидкие кристаллы, кровь и другие биологические жидкости, микроэмульсии и мицеллярные растворы [3]. Для таких сред характерно наличие внутренней структуры, способной к самостоятельному движению и деформации, что требует введения дополнительных степеней свободы в математических моделях.

Для описания сред с внутренней микроструктурой были разработаны обобщенные теории континуума, в частности микрополярная теория Эрингена [4]. В отличие от классической гидродинамики, микрополярная модель вводит дополнительные степени свободы: локальное микровращение и связанные с ним моментные напряжения [5–7]. Это позволяет учитывать такие эффекты, как анизотропия вязкости, дополнительная диссипация энергии и несимметричность тензора напряжений. Развитие теории микрополярных сред отражено в фундаментальных монографиях [5–7] и обзорах [8, 9].

В отечественной школе механики сплошных сред часто проводят различие между «микрополярной жидкостью» (модель Эрингена [4]) и «жидкостью с моментными напряжениями» (модель Стокса [7]). В рамках настоящего исследования под «жидкостью с моментными напряжениями» понимается микрополярная среда Эрингена. Такой выбор терминологии обусловлен тем, что ключевым физическим механизмом, определяющим гидродинамику течения в рассматриваемом масштабе, является именно наличие антисимметричной части тензора напряжений. Подобный подход встречается в международной практике при описании сред с внутренней микроструктурой в задачах микрофлюидики.

Физическая интерпретация параметра моментной вязкости s заключается в отношении характерной длины моментных эффектов (обусловленных размерами микрочастиц или молекулярными ассоциатами) к макроскопическому масштабу течения. Малые значения s соответствуют случаю, когда микроструктурные эффекты пренебрежимо малы; большие значения s указывают на существенное влияние моментных напряжений на общую динамику течения.

В последнее десятилетие интерес к микрополярным моделям возрос в связи с задачами микрофлюидики, систем охлаждения микроэлектроники, биомеханики кровообращения, технологических процессов с участием неньютоновских жидкостей, нефтедобычи и транспортировки сложных флюидов [10–12]. Значительный вклад в изучение течений с химическими реакциями и магнитными эффектами внесли исследования, подобные работам [13, 14].

Несмотря на теоретическую проработанность микрополярной гидродинамики, систематические параметрические исследования обобщенного течения Куэтта с учетом всех трех ключевых безразмерных параметров – s , Re и Ta – остаются недостаточно представленными. Авторы работ [15–23] и др., как правило, фиксируют два из трех параметров или ограничиваются узкими диапазонами их изменения. В ряде современных исследований [24–32] были получены точные решения для различных течений микрополярных жидкостей, однако систематический параметрический анализ обобщенного течения Куэтта с учетом трех параметров не проводился. Комплексный анализ взаимного влияния этих чисел на профили скорости, их градиенты и трехмерную структуру течения практически отсутствует.

Цель настоящей работы – провести масштабный параметрический анализ обобщенного течения Куэтта на основе точных решений, охватывающий как классический, так и

моментный случай. Для достижения этой цели сформулированы следующие задачи: реализация математической модели в вычислительной среде Matlab; параметрическое исследование в расширенных диапазонах безразмерных чисел; построение и анализ профилей скорости и микровращения, включая полную трехмерную структуру поля; количественная оценка отклонений с применением нескольких независимых метрик; введение и исследование новой интегральной характеристики, отражающей эффективность гидродинамического переноса.

2. Постановка задачи

Рассматривается стационарное плоское несжимаемое течение микрополярной жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии h друг от друга. Нижняя пластина неподвижна, верхняя движется с постоянной скоростью U_0 . Вводится декартова система координат: ось x направлена вдоль движения верхней пластины, ось z – перпендикулярно пластинам ($z = 0$ и $z = h$ на нижней и верхней стенках соответственно), ось y – в поперечном направлении.

Принимаются следующие основные предположения: течение полностью развито и стационарно; жидкость несжимаема, изотропна и не зависит от температуры; объемные силы и микроинерционные эффекты второго порядка пренебрежимо малы. Такая постановка соответствует классической схеме обобщенного течения Куэтта в рамках микрополярной теории Эрингена.

В безразмерных переменных, введенных с использованием характерных масштабов длины h , скорости U_0 и времени h/U_0 , система уравнений для микрополярной жидкости сводится к двум связанным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка для безразмерной продольной скорости $U(Z)$ и безразмерного микровращения $u(Z)$, где $Z = z/h \in [0, 1]$:

$$\frac{d^2 U}{dZ^2} - \frac{1}{s^2} (U - u) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} - \frac{1}{s^2} (u - U) = -\frac{Ta}{2 Re}. \quad (2)$$

Безразмерный параметр

$$s = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu h^2}}$$

характеризует относительную интенсивность моментной вязкости: γ – коэффициент гироскопической (моментной) вязкости, μ – классическая динамическая вязкость. Число Рейнольдса $Re = \rho U_0 h / \mu$ отражает соотношение инерционных и вязких сил. Число Тейлора $Ta = j \Omega^2 h^2 / \nu^2$ задает масштаб вращательной (микроинерционной) активности, где j – плотность микромомента инерции, Ω – характерная угловая скорость, $\nu = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость.

Граничные условия на пластинах принимаются в виде

$$U(0) = 0, U(1) = \cos \varphi, u(0) = 0, u(1) = \frac{Ta}{2 Re}. \quad (3)$$

В настоящей работе полагается $\cos \varphi = 1$, что соответствует безразмерной скорости верхней стенки, равной единице. В предельном случае $s \rightarrow 0$ система (1)–(2) вырождается в классическую модель Навье – Стокса, и решение принимает вид линейных профилей:

$$U(Z) = Z, u(Z) = Z \cdot \frac{Ta}{2 Re}. \quad (4)$$

При конечных значениях s система допускает точное аналитическое решение, выраженное через гиперболические функции. Для продольной скорости получаем

$$U(Z) = \frac{Z \sinh(\frac{1}{s}) - s [\sinh(\frac{1}{s}) \sinh(\frac{Z}{s}) - (\cosh(\frac{1}{s}) - 1)(\cosh(\frac{Z}{s}) - 1)]}{\sinh(\frac{1}{s}) - 2s(\cosh(\frac{1}{s}) - 1)}. \quad (5)$$

Решение для микровращения имеет ту же функциональную структуру и отличается лишь масштабным коэффициентом:

$$u(Z) = \frac{Ta}{2 Re} \cdot U(Z). \quad (6)$$

Для описания трехмерной структуры течения вводится полная безразмерная продольная скорость:

$$V_x(Y, Z) = U(Z) + u(Z) \cdot Y, \quad (7)$$

где $Y = y/h \in [-2; 2]$ – безразмерная поперечная координата. Данное представление позволяет учитывать совместное влияние сдвиговой и вращательной компонент течения, что особенно важно при анализе градиентов и напряжений в объеме.

Касательные напряжения на стенках определяются в безразмерной форме:

$$\tau_w = \frac{dU}{dZ} |_{Z=0,1}. \quad (8)$$

Параметрическое исследование проводится в следующих диапазонах безразмерных чисел: $s \in [0,03; 5,0]$ (логарифмическая шкала), $Re \in [30; 250]$, $Ta \in [10; 250]$, $Y \in [-2,5; 2,5]$.

Такой выбор обеспечивает охват как предельных (ньютоновских) режимов, так и зон с выраженной микроструктурной активностью, что позволяет выявить количественные критерии применимости классической модели и границы существенности моментных эффектов.

3. Материалы и методы

Расчеты выполнены в среде Matlab R2023b. Аналитические выражения (5)–(6) реализованы в виде пользовательской функции. Вычисление гиперболических функций ($\sinh$, $\cosh$) выполнено с использованием встроенных высокоточных функций Matlab. Численное дифференцирование проведено методом центральных конечных разностей второго порядка (функция `gradient`), интегрирование – методом трапеций (`trapz`).

Продольная координата $Z \in [0,1]$ дискретизирована на 300 равномерных точек, поперечная $Y \in [-2,5; 2,5]$ – на 50–150 точек, в зависимости от типа анализа. Параметрическое пространство покрыто адаптивными сетками: логарифмической по s (20–50 точек), равномерной по Re и Ta (25–30 точек), что обеспечивает достаточную разрешающую способность в зонах резкого изменения решений. Достоверность результатов подтверждена выполнением граничных условий с точностью $\leq 10^{-6}$, корректным предельным переходом $s \rightarrow 0$ к классическому решению (4), физической согласованностью профилей (отсутствие разрывов, осцилляций, нефизичных экстремумов).

Сравнение микрополярного и классического течений выполнено с использованием трех метрик:

- 1) абсолютного отклонения $\Delta U = U_{\text{микро}} - U_{\text{класс}}$;
- 2) относительного отклонения $\delta U = \Delta U / U_{\text{класс}}$ (с коррекцией в $Z = 0$);

3) интегрального отклонения $\varepsilon = \int_0^1 |\Delta U| dZ / \int_0^1 U_{\text{класс}} dZ$.

Для оценки эффективности переноса введена безразмерная характеристика

$$Q = \frac{\langle V_x \rangle}{\max_z |dV_x/dZ|},$$

где $\langle V_x \rangle$ – среднее значение полной скорости при фиксированном $Y = 1$. Эта величина позволила идентифицировать режимы, оптимальные по сочетанию интенсивности течения и низких сдвиговых нагрузок.

4. Результаты и обсуждение

Проведенное параметрическое исследование позволило количественно охарактеризовать влияние микроструктурных эффектов на гидродинамику обобщенного течения Куэтта.

Влияние чисел подобия на интегральные характеристики течения проиллюстрировано на рис. 1.

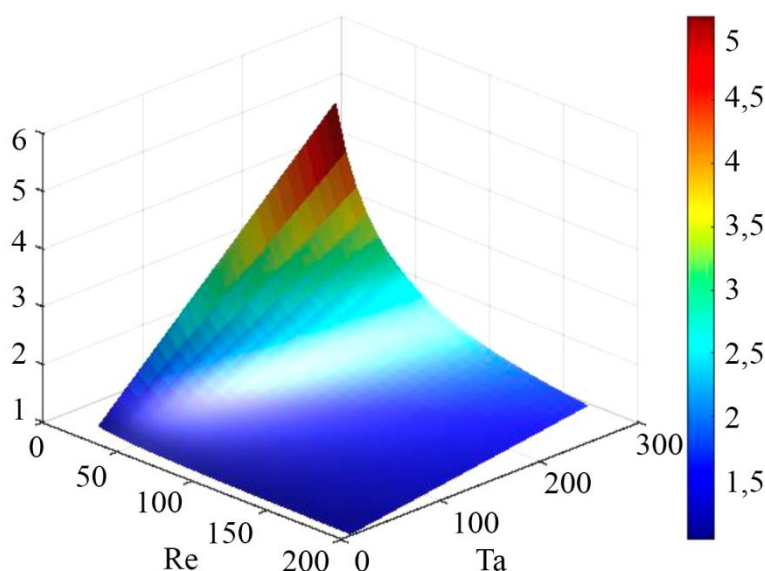


Рис. 1. 3D-поверхность максимальной скорости V_{max} в зависимости от Re и Ta при фиксированном $s = 0,3$

Максимальная скорость монотонно возрастает с ростом как Re, так и Ta, причем зависимость от Ta более чувствительна. При $s = 0,3$ микроструктурные эффекты уже существенны, и их усиление через Ta оказывает большее влияние на динамику, чем инерция макротечения.

Пространственная структура профилей и их градиентов представлена на рис. 2.

При $s < 0,1$ профиль скорости близок к линейному; при $s > 0,5$ формируется плато в центре канала, а градиенты у стенок резко снижаются. Параметр s управляет переходом от сдвигового к почти жесткому движению в центральной зоне.

Наличие точек перегиба подтверждается рис. 3.

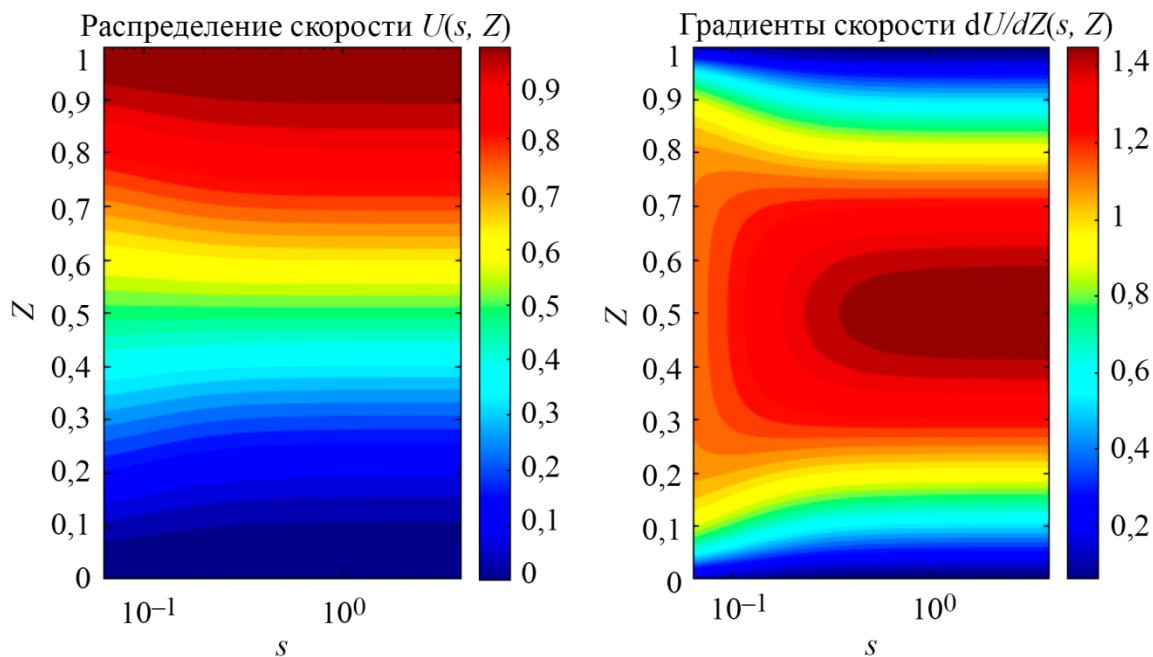


Рис. 2. Распределение скорости U и ее градиента dU/dZ в зависимости от параметра s

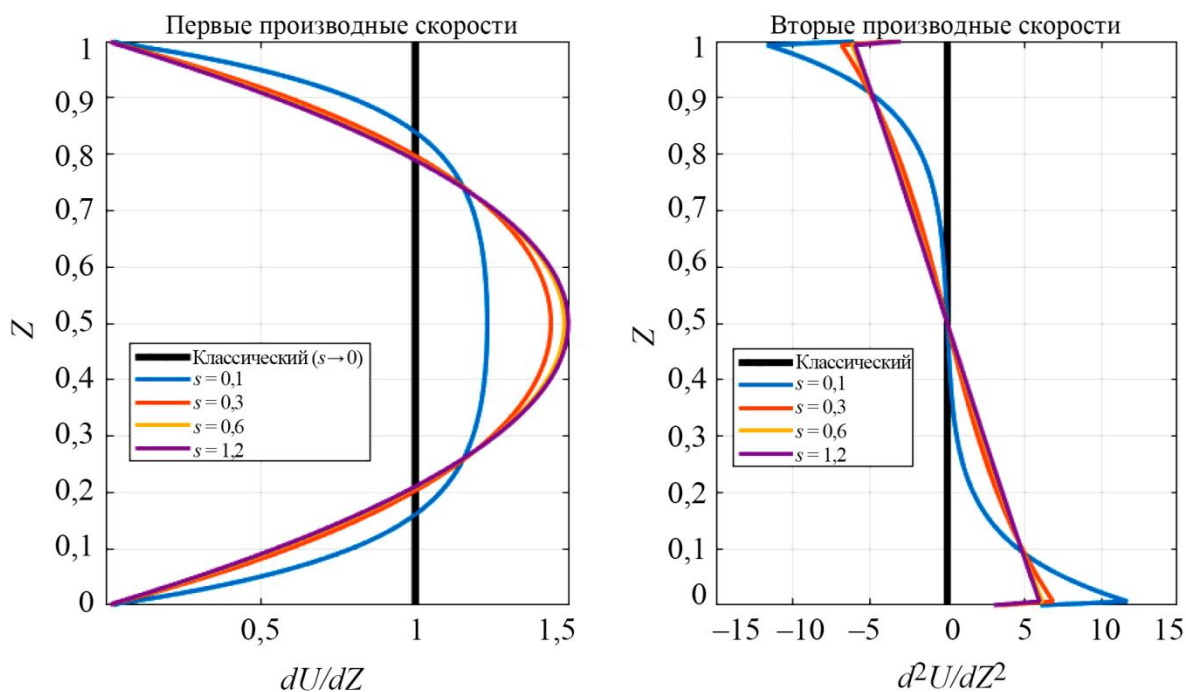


Рис. 3. Первые и вторые производные скорости для различных s по сравнению с классическим решением

При $s \geq 0,3$ вторая производная меняет знак, что указывает на немонотонность кривизны. Микрополярное течение при $s \geq 0,3$ качественно отличается от линейного: формируется зона с уменьшающимся градиентом скорости у верхней стенки.

Трехмерная структура поля скорости демонстрируется на рис. 4.

При малом s изолинии линейны по Z , а при большом s изогнуты с выравниванием в центре. Декомпозиция (7) адекватно описывает трансформацию поля: линейность по Y сохраняется, а нелинейность по Z усиливается с ростом s .

Количественная оценка отклонений от классического решения приведена на рис. 5.

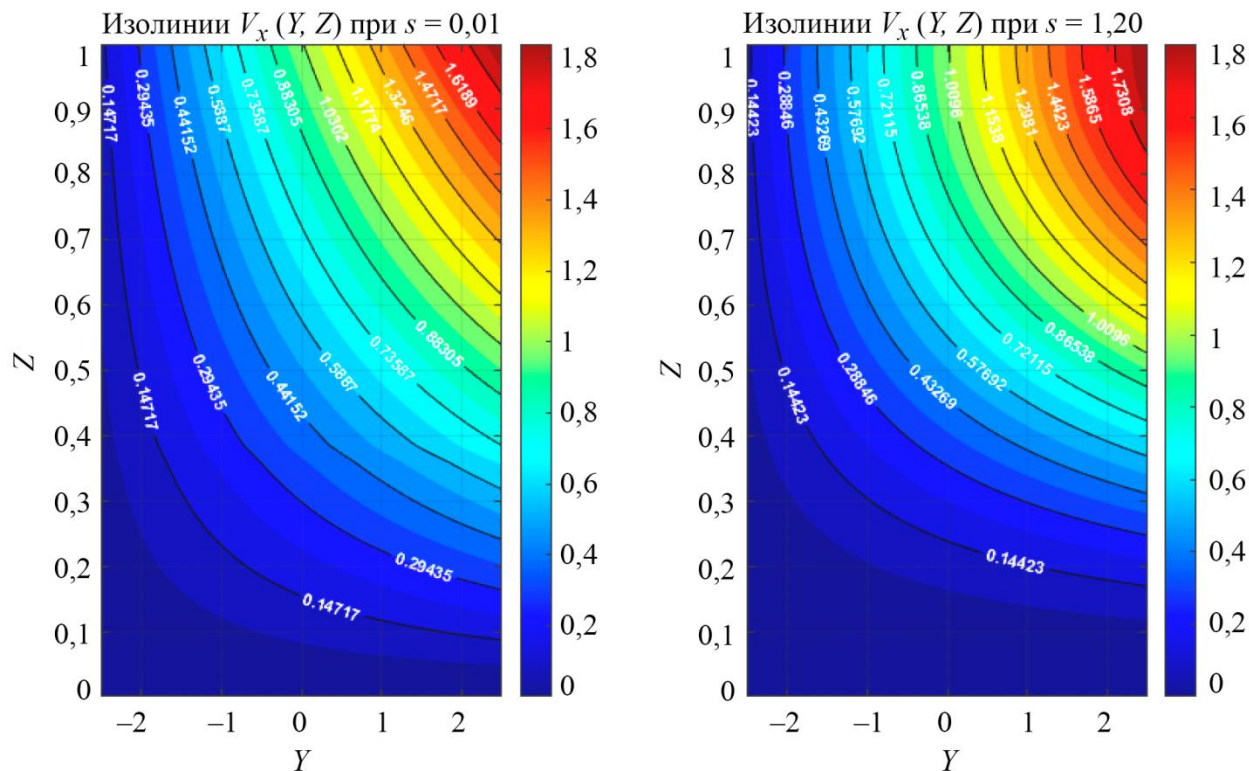


Рис. 4. Изолинии полной скорости $V_x(Y, Z)$ при $s = 0,01$ и $s = 1,2$

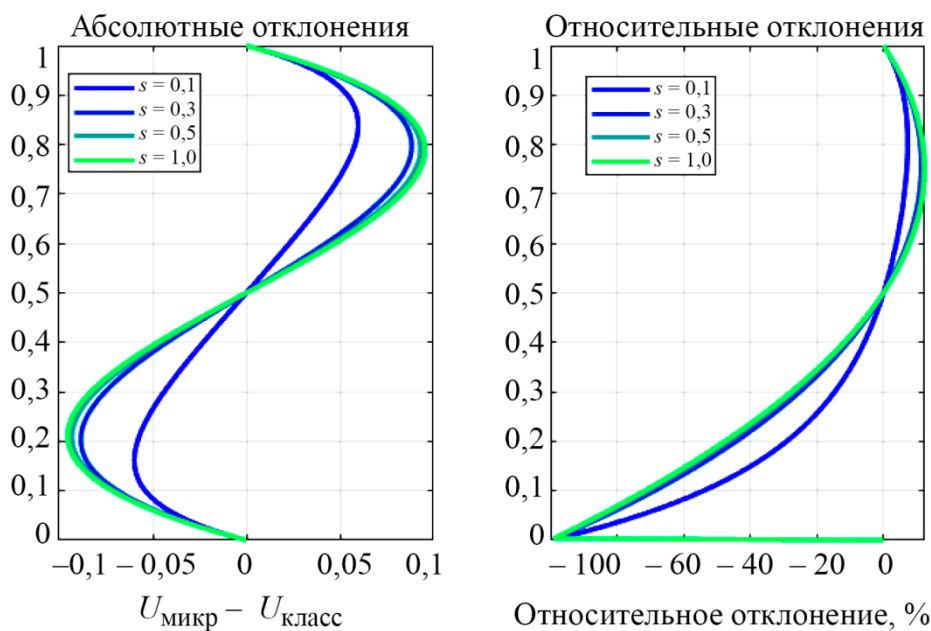


Рис. 5. Абсолютные и относительные отклонения микрополярного профиля от классического при различных s

Относительная погрешность не превышает 5 % при $s < 0,1$, но достигает 35 % при $s = 1,0$. Условие $s < 0,1$ является практическим критерием применимости классической модели Куэтта с погрешностью менее 5 %.

Взаимное влияние параметров подобию показано на рис. 6.

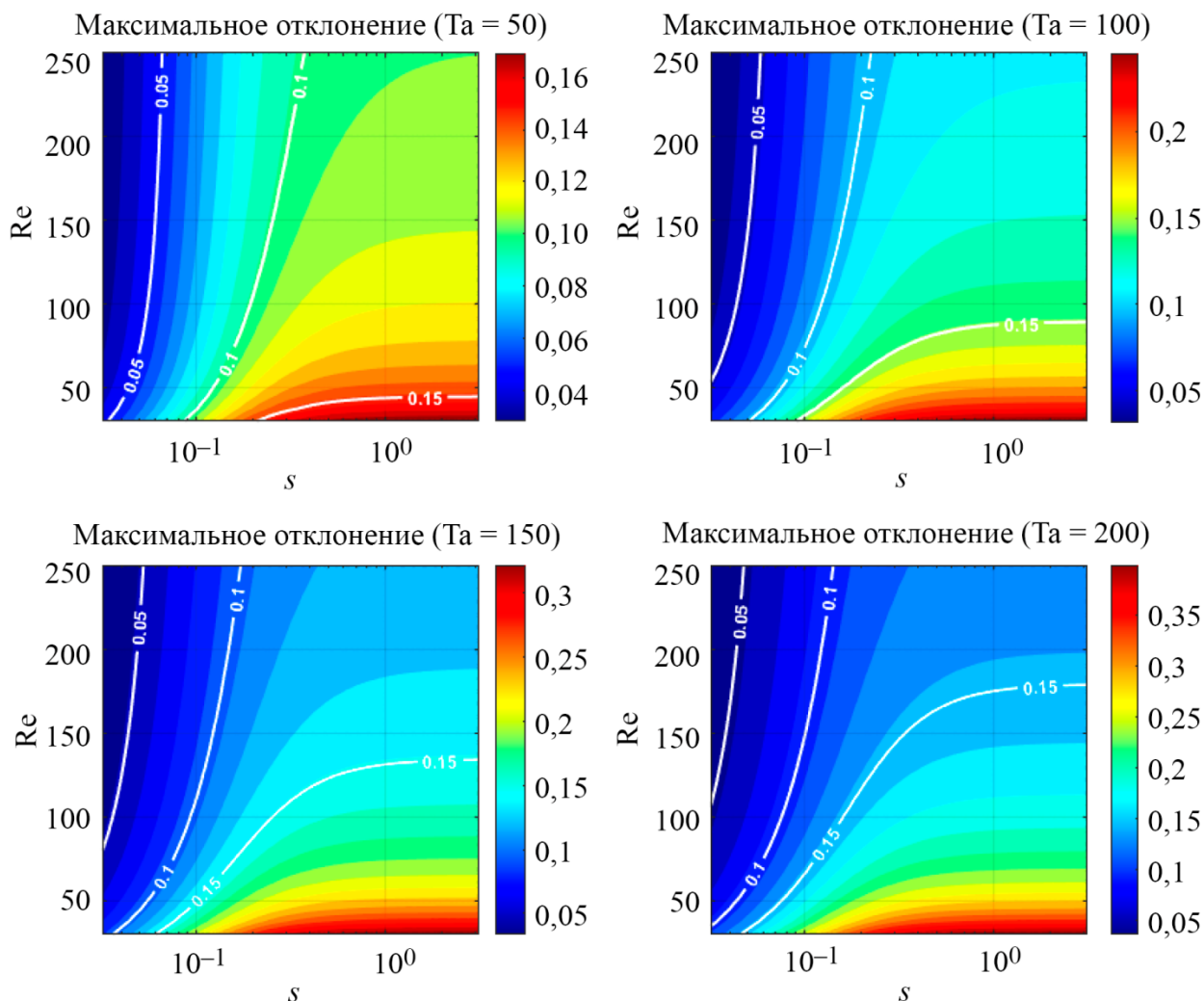


Рис. 6. Контурные карты максимального отклонения между полными скоростями при различных s и Re и фиксированных Ta

Отклонение уменьшается с ростом Re , но усиливается с увеличением s . Число Рейнольдса подавляет микроструктурные эффекты, в то время как параметр s их усиливает.

Оптимальные режимы течения представлены на рис. 7.

Оптимальные режимы определяются по максимуму величины Q . Максимальные значения Q достигаются при $s \approx 0,2-0,4$. Зависимость оптимального числа Рейнольдса от числа Тейлора носит немонокотонный характер: Re возрастает с увеличением Ta до $Ta \approx 100$, достигая максимума $Re \approx 212$, после чего убывает; при $Ta = 200$ оптимальное значение снижается до $Re \approx 53$ (рис. 7 z). Это свидетельствует о конкуренции между инерционными и вращательными эффектами: при умеренных Ta усиление микровращения способствует переносу, тогда как при высоких Ta доминирующим становится стабилизирующее влияние моментных напряжений, требующее снижения инерции для поддержания эффективности.

При $s < 0,1$ интегральная погрешность не превышает 3 % независимо от Ta , тогда как при $s > 1$ и $Ta > 150$ она превышает 20 %. Применимость классической модели может быть гарантирована при выполнении хотя бы одного из условий: $s < 0,1$ или $Ta/Re < 1$.

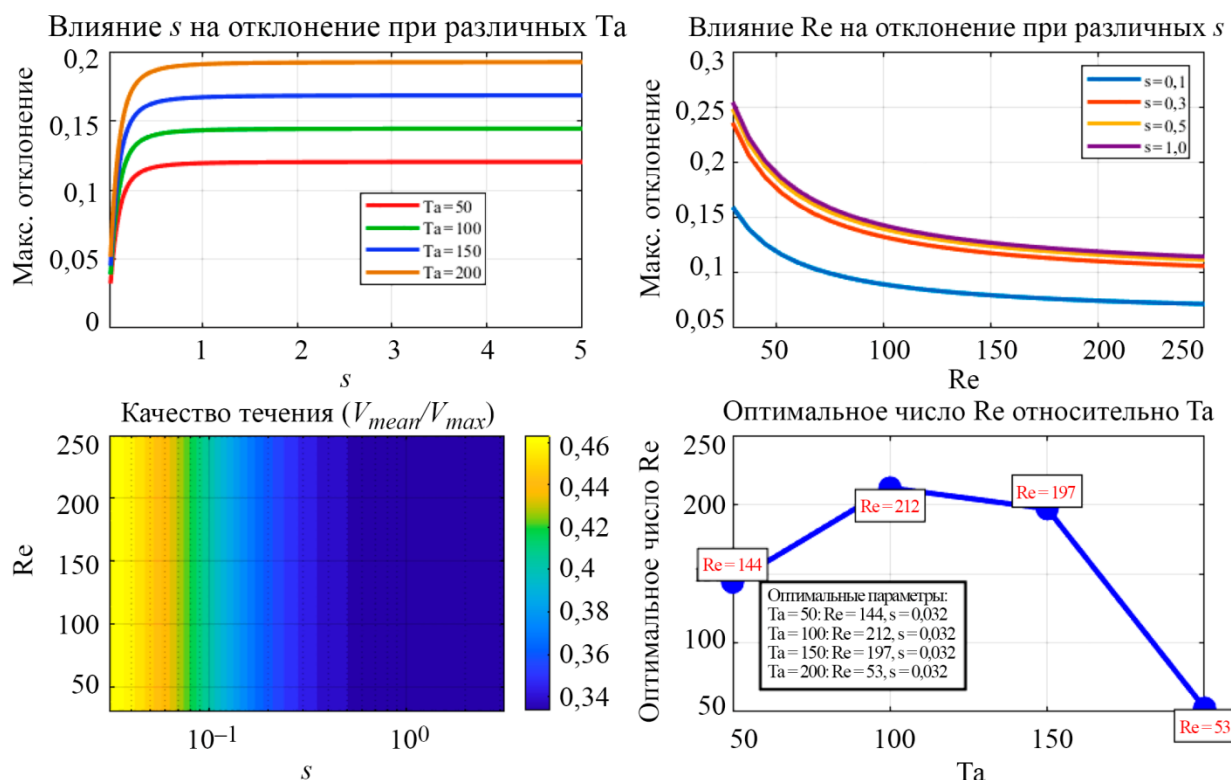


Рис. 7. Анализ эффективности переноса и оптимальных параметров

Таким образом, параметр s определяет переход от классического линейного течения к микрополяльному режиму с насыщенным профилем скорости. При $s < 0,1$ отклонения от ньютоновской модели не превышают 5 %, при $s > 0,3$ наблюдаются немонотонные профили, смещение максимума скорости и перераспределение градиентов. Влияние числа Тейлора усиливает микроструктурные эффекты, а влияние числа Рейнольдса их ослабляет, что подтверждает конкуренцию между вращательной активностью и макроинерцией.

5. Заключение

Проведенное исследование подтвердило, что микрополяльная модель предоставляет существенно более полное описание течения Куэтта по сравнению с классической постановкой. Параметр моментной вязкости s выступает в роли ключевого регулятора, определяющего переход от линейного к насыщенному профилю скорости. Показано, что число Тейлора усиливает микроструктурные эффекты, тогда как рост числа Рейнольдса их подавляет, что отражает физическую конкуренцию между вращательной активностью микрочастиц и макроскопической инерцией.

На основе трех независимых метрик отклонения сформулированы практические критерии применимости ньютоновской модели: $s < 0,1$ или $Ta/Re < 1$. Введенная характеристика позволяет целенаправленно выявлять гидродинамические режимы, оптимальные для конкретных инженерных задач.

Полученные результаты могут быть непосредственно использованы при проектировании микрофлюидных миксеров для полимерных растворов, систем доставки лекарств на основе наножидкостей, а также при интерпретации профилей скорости в экспериментах с биологическими жидкостями, где важно минимизировать сдвиговые напряжения на клетки. Предложенные количественные оценки и критерии применимости моделей создают основу для дальнейших исследований нестационарных и термомеханически связанных течений в рамках микрополяльной теории.

Литература

1. Coles D. Transition in circular Couette flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1965. – Vol. 21 (3). – P. 385–425. – DOI: 10.1017/S0022112065000241.
2. Unsteady flow and heat transfer of nanofluids, hybrid nanofluids, micropolar fluids and porous media: a review / I. Pop, T. Groşan, C. Revnic, A. V. Roşca // *Thermal Science and Engineering Progress*. – 2023. – Vol. 46. – P. 102248. – DOI: 10.1016/j.tsep.2023.102248.
3. MHD micropolar fluid flow in porous media / M. Kocić, Z. Stamenkovic, J. D. Petrović, J. B. Bogdanovic-Jovanovic // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2023. – Vol. 15 (6). – P. 16878132231178436. – DOI: 10.1177/16878132231178436.
4. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids // *Journal of Mathematics and Mechanics*. – 1966. – Vol. 16 (1). – P. 1–18. – DOI: 10.1512/iumj.1967.16.16001.
5. Eringen A. C. *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. – New York, NY : Springer, 1999. – 325 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0555-5.
6. Łukaszewicz G. *Micropolar Fluids. Theory and Applications, Series Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. – Boston, MA : Birkhäuser, 1999. – 253 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0641-5.
7. Stokes V. K. *Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – 212 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0.
8. Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D. Microcontinuum fluid mechanics – a review // *International Journal of Engineering Science*. – 1973. – Vol. 11 (8). – P. 905–930. – DOI: 10.1016/0020-7225(73)90038-4.
9. Analytical approach for micropolar fluid flow in a channel with porous walls / B. Jalili, A. A. Azar, P. Jalili, D. D. Ganji // *Alexandria Engineering Journal*. – 2023. – Vol. 79. – P. 196–226. – DOI: 10.1016/j.aej.2023.08.015.
10. Siddiqui A. A., Turkyilmazoglu M. Film flow of nano-micropolar fluid with dissipation effect // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2024. – Vol. 140 (3). – P. 2487–2512. – DOI: 10.32604/cmes.2024.050525.
11. The profound effect of heat transfer on magnetic peristaltic flow of a couple stress fluid in an inclined annular tube / M. M. Ahmed, I. M. Eldesoky, Ahmed G. Nasr, Ramzy M. Abumandour, Sara I. Abdelsalam // *Modern Physics Letters B*. – 2024. – Vol. 38 (25). – P. 2450233. – DOI: 10.1142/s0217984924502336.
12. Zhang M., Jiang X., Arefi M. Dynamic formulation of a sandwich microshell considering modified couple stress and thickness-stretching // *The European Physical Journal Plus*. – 2023. – Vol. 138 (3). – P. 227. – DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-03753-4.
13. Studying the effect of various types of chemical reactions on hydrodynamic properties of dispersion and peristaltic flow of couple-stress fluid: comprehensive examination / M. Dhange, C. U. Devi, W. Jamshed, M. R. Eid, K. Ramesh, M. D. Shamshuddin, F. Aslam, K. Batool // *Journal of Molecular Liquids*. – 2024. – Vol. 409. – P. 125542. – DOI: 10.1016/j.molliq.2024.125542.
14. Maurya P. K., Deo S., Maurya D. K. Couple stress fluid flow enclosing a solid sphere in a porous medium: effect of magnetic field // *Physics of Fluids*. – 2023. – Vol. 35 (7). – 072006. – DOI: 10.1063/5.0155532.
15. Siddheshwar P. G., Sri Krishna C. V. Linear and non-linear analyses of convection in a micropolar fluid occupying a porous medium // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2003. – Vol. 38 (10). – P. 1561–1579. – DOI: 10.1016/S0020-7462(02)00120-8.
16. Gorla R. S. R. Unsteady mixed convection in micropolar boundary layer flow on a vertical plate // *Fluid Dynamics Research*. – 1995. – Vol. 15. – P. 237–250. – DOI: 10.1016/0169-5983(95)94957-U.
17. Nadeem S., Haq R. U., Khan Z. H. Numerical study of MHD boundary layer flow of a Maxwell fluid past a stretching sheet in the presence of nanoparticles // *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*. – 2014. – Vol. 45 (1). – P. 121–126. – DOI: 10.1016/j.jtice.2013.04.006.

18. Finite element solution of micropolar fluid flow and heat transfer between two porous discs / H. S. Takhar, R. Bhargava, R. S. Agrawal, A. V. S. Balaji // International journal of engineering science. – 2000. – Vol. 38 (17). – P. 1907–1922. – DOI: 10.1016/S0020-7225(00)00019-7.
19. Srinivasacharya D., Mishra M., Rao A. R. Peristaltic pumping of a micropolar fluid in a tube // Acta Mechanica. – 2003. – Vol. 161 (3). – P. 165–178. – DOI: 10.1007/s00707-002-0993-y.
20. Prakash J., Tripathi D. Melting heat transfer in electroosmotic augmented stagnation point flow of a micropolar fluid over stretching porous sheet // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2026. – Vol. 87 (1). – DOI: 10.1080/10407782.2025.2521423.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О сильных и слабых разрывах связанного термо-механического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – Vol. 18 (4). – P. 85–97. – DOI: 10.14498/vsgtu1331.
22. Bykova S., Ivanova E. A micropolar continuum and equations of electrodynamics of moving media // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2025. – Vol. 37 (4). – P. 67. – DOI: 10.1007/s00161-025-01398-5.
23. Impact of chemical reaction on micropolar fluid past a stretching sheet / P. K. Pattnaik, S. Jena, A. Dei, G. Sahu // JP Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – Vol. 18 (1). – P. 207–223. – DOI: 10.17654/HM018010207.
24. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. The inhomogeneous Couette flow of a micropolar fluid // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2025. – Vol. 21 (3). – P. 345–358. – DOI: 10.20537/nd250601.
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 3. – P. 41–63. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-3/2024-3_438.html
26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Polynomial exact solutions for describing unidirectional flows of micropolar incompressible media // Procedia Structural Integrity. – 2024. – Vol. 65. – P. 39–43. – DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.007.
27. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing three-dimensional flows of micropolar liquids / E. S. Baranovskii, S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, A. V. Yudin // Symmetry. – Vol. 16 (12). – P. 1669. – DOI: 10.3390/sym16121669.
28. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for nonuniform unidirectional Nusselt flow taking into account couple stresses // Procedia Structural Integrity. – 2024. – Vol. 65. – P. 44–47. – DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.008.
29. Baranovskii E. S., Prosviryakov E. Yu., Ershkov S. V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104294. – DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
30. Inhomogeneous gradient Poiseuille flows of a vertically swirled fluid / N. Burmasheva, S. Ershkov, E. Prosviryakov, D. Leshchenko // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2024. – Vol. 10 (1). – P. 1–12. – DOI: 10.22055/jacm.2023.43959.4150.
31. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // Symmetry. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
32. Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. – 2022. – Vol. 2 (2). – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.