

Received: 30.11.2023
Revised: 11.04.2024
Accepted: 24.05.2024
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.017-028

CALCULATING RESONANT FREQUENCIES OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL DISKS

S. L. Skalozub

77 Gerhart Hauptmann Ring, Frankfurt on the Main, 60439, Germany

 sem.sk@gmx.de

Address for correspondence: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland
Tel.: +49 (69) 7704 3346

Resonant axisymmetric oscillations of cylindrical disks made of isotropic materials are analytically considered in accordance with the Kog theory. Relationships of dimensionless resonant frequencies to the geometrical dimensions of the disks and the dynamic characteristics of the material (Poisson's ratio and shear wave velocity) are presented in a form convenient for calculations. Digital values of resonant frequencies are calculated and summarized in tables at different Poisson's ratios ranging between 0.20 and 0.45, with a step of 0.05, for a number of discrete thickness-to-diameter ratios ranging from 0 to 0.853145 and from 0 to 0.30 when oscillations of the first and second modes are excited, respectively. The estimation of method errors in resonant frequency calculations based on the comparison with the known results obtained by the Rayleigh–Ritz method has proved their high repeatability. Instrumental errors in determining the dynamic characteristics of the material are calculated in relation to experimental results obtained in a number of well-known studies.

Keywords: cylindrical disks, resonant oscillations, dynamic Poisson's ratio, shear wave velocity

Acknowledgment

I am grateful to R. S. Skalozub for his assistance in the search and delivery of the necessary literature and A. S. Skalozub for the computer support of the preparation and formatting of the manuscript.

References

1. Meleshko, V.V., Yakimenko, N.S., and Ulitko, A.F. Resonance method for determining the elastic constants of finite isotropic cylinders. *Akustichniy Visnyk*, 2008, 11 (3), 65–75. (In Russian).
2. Pochhammer, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1876, 81 (4), 324–336. (In German). DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Cree, C. Longitudinal vibrations of a circular bar. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1886, 21, 287–298.
4. Cree, C. On longitudinal vibrations. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1889, 23, 317–342.
5. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981, 282 p. (In Russian).
6. Hutchinson, J.R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, 51 (1B), 233–240. DOI: 10.1121/1.1912835.
7. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. High-frequency axisymmetric vibrations of circular disks. *Soviet Applied Mechanics*, 1976, 12, 1251–1258. DOI: 10.1007/BF00882700.

8. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length. *Soviet Physics. Acoustics*, 1978, 24 (6), 861–866.
9. Hutchinson, J.R. Vibrations of solid cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47 (4), 901–907. DOI: 10.1115/1.3153811.
10. Chernyshev, K.V. and Shegai, V.V. Natural vibrations of solid cylinders of finite length. *Akusticheskij Zhurnal*, 1977, 23, 4, 627–631. (In Russian).
11. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution. *Wave Motion*, 2003, 37, 191–206. DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
12. Puckett, A.D. and Peterson, M.L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides. *Ultrasonics*, 2005, 43 (3), 197–207. DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
13. Leissa, A.W. and So, J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, 98, 2122–2135. DOI: 10.1121/1.414331.
14. Leissa, A.W. and So, J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, 98, 2136–2141. DOI: 10.1121/1.414403.
15. Nieves, F.J., Bayón, A., and Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder. *J. Sound Vib.*, 2008, 311 (1–2), 588–596. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
16. Koga, I. Longitudinal vibrations of short circular cylinders. *J. Inst. Electr. Eng. Japan.*, 1930, 50 (508), 1209–1224.
17. Stupin, V.A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2000, 36, 896–899. DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Popov, A.L. and Sadovsky, S.A. On the correspondence of theoretical models of longitudinal vibrations of a rod with experimental data. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2021, 8 (2), 270–281. DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
19. Gadzhibekov, T.A. and Ilyashenko, A.V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio. *Mechanics of Solids*, 2021, 56, 702–714. DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov, V.V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range. *Acoustical Physics*, 2022, 68 (3), 206–214. DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Shibayama, K. Piezoceramic transducers as short rods. In: Y. Kikuchi, ed., *Ultrasonic transducers*, ch. 9, Corona Publishing Company, Tokyo, 1969, 406 p.
22. Ganopolskiy, V.V., Kasatkin, B.A., Legusha, F.F., Prudko, N.I., and Pugachev, S.I. *Pyezokeramicheskie preobrazovateli* [The Piezoceramic Transducers: The Handbook]. Sudostroenie Publ., Leningrad, 1984, 256 p. (In Russian).
23. Gaidukov, Yu.P., Danilova, N.P., and Sapozhnikov O. Vibration modes of an isotropic disk with a weak dependence on the disk thickness. *Acoustical Physics*, 1999, 45 (2), 163–171.
24. Available at: <https://calculate.co.nz/bessel-function-calculator.php>.
25. Nieves, F.J., Gascón, F., and Bayón, A. A multiple frequency in the two lowest axisymmetric vibration modes of a short cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 251 (4), 741–749. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3862.
26. Nieves, F.J.; Gascón, F., and Bayón, A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 115, 2928–2936. DOI: 10.1121/1.1739485.
27. McMahon, G.W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36 (1), 85–92. DOI: 10.1121/1.1918918.

Подана в журнал: 30.11.2023

УДК 534–1, 539–3

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.017-028

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДИСКОВ

С. Л. Скалозуб

ул. Герхарт-Гауптман-Ринг, 77, г. Франкфурт-на-Майне, 60439, Германия

 sem.sk@gmx.de

Адрес для переписки: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland
Тел.: +49 (69) 7704 3346

Аналитически рассмотрены резонансные осесимметричные колебания цилиндрических дисков из изотропных материалов в соответствии с теорией Кога. Представлены в удобном для расчетов виде соотношения, связывающие безразмерные резонансные частоты с геометрическими размерами дисков и динамическими характеристиками материала (коэффициентом Пуассона и скоростью сдвиговых волн). Вычислены и сведены в таблицы цифровые значения безразмерных резонансных частот при разных коэффициентах Пуассона в пределах 0,20–0,45 с шагом 0,05 для ряда дискретных отношений толщины к диаметру дисков в пределах от 0 до 0,853145 и от 0 до 0,30 при возбуждении колебаний первой и второй форм соответственно. Оценка методических погрешностей расчетов резонансных частот на основе сравнения с известными результатами, полученными методом Рэлея – Ритца, доказала их высокую сходимость. Рассчитаны инструментальные погрешности определения динамических характеристик материала применительно к экспериментальным результатам, полученным в ряде известных работ.

Ключевые слова: цилиндрические диски, резонансные колебания, динамический коэффициент Пуассона, скорость сдвиговых волн

1. Введение

Исследованию резонансных колебаний цилиндрических дисков и стержней посвящена обширная литература, краткий обзор которой содержится в работе [1]. Началом теоретических работ в этой области послужили статьи Похгаммера [2] и Кри [3, 4]. В общем случае использование теории Похгаммера – Кри для расчета резонансных частот продольно-поперечных колебаний цилиндрических дисков и стержней вызывает значительные математические трудности, поскольку не удается выполнить условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на торцевых и цилиндрической поверхностях [5]. Благодаря значительным усилиям многих исследователей было предложено несколько приближенных методов расчета упомянутых частот [1] (метод суперпозиции [6–9], метод однородных решений [10–12], метод Рэлея – Ритца [13–15]). Реализация этих методов связана с решением весьма сложных и громоздких систем алгебраических уравнений посредством компьютера с большими затратами машинного времени. Сравнительно несложный способ аналитического расчета резонансных частот первой формы осесимметричных колебаний цилиндрических дисков из изотропных материалов был предложен Кога в работе [16], опубликованной в 1930 году. Однако долгое время этот способ не использовался с этой целью, и только в 2000 году на основе принятых в работе [16] упрощающих предположений В. А. Ступиным были рассчитаны и сведены в таблицы значения дисперсионного коэффициента первой формы осесимметричных резонансных колебаний цилиндрических дисков в зависимости от коэффициента Пуассона ν в пределах $0,20 \geq \nu \geq 0,45$ с шагом 0,05 и от отношения толщины диска к

диаметру L/D в пределах $0,05 \leq L/D \leq 0,85$ с шагом 0,05 [17]. Эти таблицы весьма неудобны в практических расчетах, так как требуются пересчеты значений дисперсионных коэффициентов в значения безразмерных частот. Следует отметить, что в ряде недавних известных работ [18–20], посвященных теоретическим аспектам применения волн Похгаммера – Кри и сравнению полученных теоретических и экспериментальных результатов, вопросы расчета резонансных частот продольно-поперечных колебаний цилиндрических дисков не рассматривались. Цели настоящей работы заключались в уточненном расчете по теории Кога безразмерных резонансных частот первой формы осесимметричных колебаний цилиндрических дисков в указанных выше интервалах изменений ν и L/D , в расчете безразмерных резонансных частот второй формы колебаний дисков в интервале изменения $0 \leq L/D \leq 0,30$, в оценке погрешностей расчета частот путем сопоставления с данными, полученными по методу Рэлея – Ритца, а также в оценке погрешностей определения динамических характеристик материала на основе использования рассчитанных резонансных частот и экспериментальных результатов, приведенных в известных литературных источниках.

2. Основные соотношения

Расчет безразмерных резонансных частот Ω осесимметричных колебаний цилиндрических дисков по теории Кога производился с использованием соотношений, заимствованных из работ [16] и [21]. Поскольку в работе [16] отсутствует ряд промежуточных зависимостей, важных при выводе окончательных формул для расчета Ω , в настоящей работе восполнен этот недостаток. Кроме того, ряд формул представлен в виде, более удобном для проведения вычислений.

Уравнение частот [21] (обозначение Ω в [21] заменено в настоящей работе на Ψ) имеет вид

$$\frac{\operatorname{tg}(n\Psi)}{\operatorname{th}\Psi} = \frac{4n(s+1)(s+2+n^2)}{(s+2-sn^2)^2}, \quad (1)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta-1/(s+2)}}, \quad (2)$$

$$s = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad (3)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{s+1}{s+2+n^2}} (ga) \frac{L}{D}. \quad (4)$$

В выражении (4) g – фазовая постоянная для радиального направления [21]; a – радиус диска.

Параметр (ga) является корнем уравнения

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(ga)J_1(ga)}{J_0(ga)}}, \quad (5)$$

где $J_0(ga)$, $J_1(ga)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков;

$$\Omega = \pi Df / c_2, \quad (6)$$

где f – резонансная частота. Параметр η связан с параметром (ga) в соответствии с зависимостью

$$\eta = \frac{(ga)}{2} \frac{J_0(ga)}{J_1(ga)}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует, что при известных значениях (ga) и η частота Ω может быть определена по формуле

$$\Omega = \frac{(ga)}{\sqrt{\eta}}. \quad (8)$$

2.1. Методика проведения расчетов

Для расчета безразмерной резонансной частоты Ω_{10} первой формы осесимметричных колебаний бесконечно тонкого цилиндрического диска в нулевом приближении использовались данные табл. 3.3 из работы [22]. В этой таблице приведены цифровые значения параметра $(ga)_{10}$ в зависимости от ν в пределах 0,24–0,40 с шагом 0,01. Значения $(ga)_{10}$ при $\nu = 0,20$ и при $\nu = 0,45$ рассчитывались методом линейной экстраполяции: при $\nu = 0,20$ $(ga)_{10} = 1,9844$; при $\nu = 0,45$ $(ga)_{10} = 2,1449$.

Для описания осесимметричных колебаний бесконечно тонкого изотропного цилиндрического диска в работе [23] выведена точная формула, из которой следует, что параметр η зависит от ν в соответствии с выражением

$$\eta = (1 - \nu) / 2. \quad (9)$$

Например, подставляя значение $\nu = 0,20$ в выражение (8), вычисляем $\eta = 0,4$. При известном значении $(ga)_{10}$ значение η_{10} в нулевом приближении рассчитываем, используя уравнение (7). Посредством калькулятора функций Бесселя [24] находим числовые значения функций $J_0(ga)_{10}$ и $J_1(ga)_{10}$. При этом значения функций выбираем с 9 цифрами после запятой. При $(ga)_{10} = 1,9844$ $J_0(ga)_{10} = 0,232895278$, $J_1(ga)_{10} = 0,577681801$, $\eta_{10} = 0,40001034$ (все необходимые вычисления выполнялись посредством калькулятора модели Sigma AK222, дисплей которого отображает 10 цифр). Поскольку $\eta_{10} > \eta$, значение $(ga)_{11}$ в первом приближении выбираем, учитывая неравенство $(ga)_{11} > (ga)_{10}$. При $(ga)_{11} = 1,98441$ $J_0(ga)_{11} = 0,232889501$, $J_1(ga)_{11} = 0,577681218$ и $\eta_{11} = 0,400002839$.

С целью ускорения подбора параметра (ga) , соответствующего наиболее точному удовлетворению уравнения (9), используем метод интерполяции (или экстраполяции) в 0 выражения

$$(\eta - 0,4) = F [(ga)_{m+1} - (ga)_m] \rightarrow 0, \quad (10)$$

где m – номер приближения. При $(m + 1) = 4$ $(ga)_{14} = 1,984413766$, $\eta_{14} = 0,400000012$. Искомое значение безразмерной частоты Ω_1 находим, используя выражение (8): $\Omega_1 = \frac{1,984413766}{\sqrt{0,4}} = 3,13763366 \cong 3,137634$.

Для расчета резонансной частоты Ω_1 второй формы осесимметричных колебаний диска нулевой толщины при заданном значении ν , например $\nu = 0,20$, вначале вычисляем значение параметра $(ga)_{20}$ в нулевом приближении по формуле

$$(ga)_{20} = \frac{f_{20}}{f_{10}} \Omega_1 \sqrt{\eta}, \quad (11)$$

где $\frac{f_{20}}{f_{10}}$ – приближенное значение отношения резонансных частот второй и первой форм колебаний для $\nu = 0,20$ по данным табл. 3.5, представленной в работе [22]. Вычисление Ω_2 производим по описанному выше алгоритму для расчета $\Omega_1 \cdot \Omega_2 = 8,490959814 \approx 8,490960$.

Для расчетов Ω_1 при $\frac{L}{D} \neq 0$ нулевые приближения Ω_{10} определяли по формуле

$$\Omega_{10} = \pi \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} K_1^{np} \frac{D}{L}, \quad (12)$$

где K_1^{np} – дисперсионный множитель, зависящий от ν и $\frac{D}{L}$. Значения K_1^{np} приведены в таблице, представленной в работе [17]. Например, при $\nu = 0,20$ $\frac{L}{D} = 0,05$, $K_1^{np} = 0,06446$ и $\Omega_{10} \approx 3,13772$. Значение параметра $(ga)_0$ в нулевом приближении определяем, используя формулу (5): $\Omega(1,984) = 3,136395$, $\Omega(1,985) = 3,140288$. Применив линейную интерполяцию, будем иметь $\Omega_{10}(1,98434) \approx 3,13772$. Значениям $(ga)_{10} \approx 1,98434$ и Ω_{10} соответствует значение $\eta_{10} = 0,400055359$, рассчитанное по формуле (8). Учитывая, что при $\nu = 0,20$ $s = 2 / 3$, по формуле (2) рассчитываем $n_{10}^2 = 23,94476331$ и $n_{10} = 4,893338667$, а затем по зависимости (4) находим $\Psi_{10} = 0,02489979$. Определяем значение функции F_{110} по левой части формулы (1):

$$F_{110} = \frac{\text{tg}(n_{10}\Psi_{10})}{\text{th}\Psi_{10}}, \quad (13)$$

$F_{110} = 4,918571765$. Находим значение функции F_{210} по правой части формулы (1): $F_{210} = 4,910288071$. Далее вычисляем разность $\Delta F_{10} = (F_{110} - F_{210}) = 0,08283694$. Задаемся значением параметра $(ga)_{11}$ в первом приближении, исходя из неравенства $(ga)_{111} < (ga)_{10}$; $(ga)_{111} = 1,98433 < 1,98434$. Используя калькулятор функций Бесселя [24], находим $J_{0(11)}(1,98433) = 0,232935715$, $J_{1(11)}(1,98433) = 0,577685875$. По аналогии с приведенными выше расчетами вычисляем последовательно $\eta_{111} = 0,40006286$, $n_{111}^2 = 23,93729766$, $n_{111} = 4,892575769$, $\Psi_{111} = 0,924833337$, $F_{111} = 4,917804198$, $F_{211} = 4,911821659$. Значение параметра $(ga)_{112}$ во втором приближении определяем по формуле линейной экстраполяции

$$(ga)_{112} = (ga)_{111} - \frac{\Delta F_{11}}{\Delta F_{10} - \Delta F_{11}} [(ga)_{110} - (ga)_{111}], \quad (14)$$

$(ga)_{112} = 1,984304002$. Затем находим значения $J_{0(12)} = 0,2329507$, $J_{1(12)} = 0,577687387$, $F_{112} = 4,915809769$, $F_{212} = 4,915811152$, $\Delta F_{12} = -0,000001383$. Значения (ga) в следующем приближении подбирают по описанному выше алгоритму поиска частоты Ω_1 для диска нулевой толщины, отличающемуся тем, что минимизируют приращения функции ΔF . При расчете Ω_2 в случае $\frac{L}{D} \neq 0$ значение параметра $(ga)_{20}$ в нулевом приближении выбиралось равным значению $(ga)_{20}$ при том же ν , но строкой выше для меньшего отношения $\frac{L}{D}$.

3. Результаты расчетов и их обсуждение

Значения безразмерных резонансных частот Ω_1 и Ω_2 , рассчитанных по изложенной выше методике для разных величин $\frac{L}{D}$ и ν , сведены в табл. 1 и 2. Значения $\Omega_1 = 2,603827$ (табл. 1) и $\Omega_2 = 7,539799$ (табл. 2), а также соответствующие им значения $(\frac{L}{D})_1 = 0,853145$ и $(\frac{L}{D})_2 = 0,294629$, приведенные в работе [1], определены с абсолютными погрешностями $\Delta\Omega \leq \pm 10^{-6}$ и $\Delta(L/D) \leq \pm 10^{-6}$ по точным формулам теории мод Кри – Лэмба. Эти моды характеризуются отсутствием сдвиговых напряжений во всем объеме цилиндрического диска.

Таблица 1

Значения резонансной частоты Ω_1 первой формы осесимметричных колебаний диска для разных значений $\frac{L}{D}$ и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	3,137639	3,294189	3,463189	3,647696	3,850851	4,076950
0,05	3,137137	3,293107	3,461597	3,645066	3,846616	4,070235
0,10	3,135625	3,290302	3,456757	3,637082	3,833816	4,050063
0,15	3,133025	3,285487	3,448470	3,623477	3,812175	4,016369
0,20	3,129210	3,278436	3,436386	3,603791	3,781244	3,969088
0,25	3,123982	3,268802	3,419986	3,577370	3,740436	3,908226
0,294629	3,118727	3,257448	3,400843	3,547013	3,694609	3,841954
0,30	3,117044	3,256082	3,398539	3,543360	3,689094	3,833978
0,35	3,107967	3,239565	3,371080	3,500738	3,626614	3,746884
0,40	3,096121	3,218268	3,336382	3,448408	3,552642	3,648004
0,45	3,080587	3,190857	3,292994	3,385385	3,467334	3,539048
0,50	3,060016	3,155603	3,239395	3,311116	3,371616	3,422390
0,55	3,032463	3,110444	3,174348	3,225874	3,287308	3,300865
0,60	2,995272	3,053344	3,097461	3,131044	3,157004	3,177484
0,65	2,945320	2,983081	3,009737	3,029116	3,043689	3,055014
0,70	2,880109	2,900243	2,913690	2,923199	2,930256	2,935710
0,75	2,799709	2,807640	2,812805	2,816428	2,819115	2,821197
0,80	2,707785	2,709503	2,710627	2,711421	2,712015	2,712479
0,85	2,610041	2,610046	2,610049	2,610051	2,610053	2,610054
0,853145	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827

Таблица 2

Значения резонансной частоты Ω_2 второй формы осесимметричных колебаний диска для разных значений $\frac{L}{D}$ и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	8,490959	8,785132	9,109689	9,470346	9,874454	10,331651
0,05	8,484021	8,772390	9,087903	9,434742	9,817907	10,243375
0,10	8,460571	8,729628	9,015659	9,318816	9,638667	9,974030
0,15	8,409973	8,639286	8,867931	9,092475	9,309565	9,516359
0,20	8,300057	8,454717	8,589566	8,705187	8,803509	8,887058
0,25	8,031998	8,077202	8,109213	8,132806	8,150852	8,165114
0,294629	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799
0,30	7,467986	7,468427	7,468739	7,468965	7,469138	7,469274

3.1. Оценка точности расчета резонансных частот

Источниками методических погрешностей при определении безразмерных резонансных частот с использованием таблиц их значений при разных дискретных величинах ν и $\frac{L}{D}$ являются неточности значений частот и математические операции линейной интерполяции или экстраполяции. Поскольку резонансные частоты рассчитывались с использованием 9 цифр после запятой, а итоговые значения частот округлялись до значений с 6 цифрами, можно полагать, что абсолютная погрешность приведенных в таблицах значений частот $\Delta \Omega \leq \pm 10^{-6}$. Однако следует отметить, что при выводе уравнений в теории Кога [16] использованы два следующих упрощающих предположения. Во-первых, не учитывались касательные напряжения на цилиндрической поверхности диска. Во-вторых, приравнялось к нулю интегральное значение нормальных напряжений на этой поверхности. Эти обстоятельства могли также повлиять на точность расчета. Для оценки методических погрешностей расчета частот, значения которых приведены в табл. 1 и 2, произведено их сравнение с результатами, полученными методом Рэлея – Ритца [15]. В табл. 4 работы [15] приведены результаты расчета резонансных частот первой формы Ω_{1R} и второй формы Ω_{2R} осесимметричных колебаний при $\nu = 0,286$ и $\frac{L}{D} = 0,30$ методом Рэлея – Ритца: $\Omega_{1R} = 3,358324$, $\Omega_{2R} = 7,468073$. Для этих значений ν и $\frac{L}{D}$ были рассчитаны соответствующие частоты Ω_1 и Ω_2 по теории Кога с использованием табл. 1 и 2: $\Omega_1 = 3,358360$, $\Omega_2 = 7,468652$. Расхождение $\frac{\Omega_{1R}}{\Omega_1} = \frac{3,358324}{3,358360} \approx 0,999988 = -0,0012 \%$. Расхождение $\frac{\Omega_{2R}}{\Omega_2} = \frac{7,468073}{7,468652} \approx 0,99922 = (-0,078 \%)$. С целью оценки методической погрешности, возникающей из-за линейной интерполяции при использовании значений резонансных частот, приведенных в табл. 1, была рассчитана также резонансная частота Ω_{1N} непосредственно по теории Кога для заданных значений $\nu = 0,286$ и $\frac{L}{D} = 0,30$: $\Omega_{1N} = 3,358651$. Расхождение составило $\frac{\Omega_{1N}}{\Omega_1} = \frac{3,358651}{3,358360} \approx 1,00009$ (0,009 %). Произведена также оценка погрешностей сопряжения зависимостей $\Omega_1 = F_1(L/D)$ и $\Omega_2 = F_2(L/D)$ при ν , равных 0,20; 0,30; 0,45, с точными значениями частот, соответствующих упомянутым выше модам Кри – Лэмба. Для первой формы колебаний при использовании метода линейной экстраполяции расхождения значений частот составили от 0,0025 до $-0,0083 \%$; для второй формы колебаний при использовании метода линейной интерполяции расхождения находились в пределах от $-0,015$ до $0,056 \%$.

4. Методика определения динамических характеристик материала c_2 и ν

Поскольку для образцов материала в виде дисков, для которых выполняется условие $0 \leq \frac{L}{D} \leq 0,30$, рассчитаны значения безразмерных резонансных частот (табл. 1, 2), имеется возможность определения характеристик ν и c_2 на одном образце известным обертоном способом [22]. Этот способ более удобен при проведении экспериментов и обладает повышенной точностью. Для повышения оперативности расчетов целесообразно использовать кроме таблицы 1 таблицу отношений резонансных частот второй и первой форм колебаний f_2/f_1 для разных L/D и ν (табл. 3). При использовании результатов экспериментов с образцами, для которых отношение L/D находится в указанных выше пределах, расчет ν и c_2 выполняются следующим образом. Вначале вычисляют отношение L_e/D_e по измеренным значениям толщины и диаметра образца. Затем, используя метод линейной интерполяции, по таблице 3 рассчитывают для этого отношения величины f_2/f_1 для всех значений ν , приведенных в таблице. Далее, линейно интерполируя и используя экспериментальное значение f_{2e}/f_{1e} , определяют искомое значение ν_e . Расчет c_2 производят на основе данных, приведенных в табл. 1. Применяя линейную интерполяцию, рассчитывают при L_e/D_e значения Ω_1 для всех величин

ν , приведенных в таблице. Далее находят два значения Ω_{11} и Ω_{12} , соответствующие двум табличным значениям ν_1 и ν_2 , наиболее близким к ν_e в интервале $\nu_1 < \nu_e < \nu_2$. Используя найденное ранее значение ν_e и линейно интерполируя, вычисляют частоту Ω_{1e} , а затем искомого значение c_{2e} находят по формуле

$$c_{2e} = \pi D f_{1e} / \Omega_{1e}. \quad (15)$$

Таблица 3

Отношения резонансных частот $\frac{f_2}{f_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ второй и первой форм колебаний диска в зависимости от значений L/D и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	2,706162	2,666988	2,630434	2,596254	2,564226	2,534162
0,05	2,704383	2,663834	2,625350	2,588360	2,552349	2,516654
0,10	2,698209	2,653139	2,608142	2,562168	2,514118	2,462685
0,15	2,684298	2,629530	2,571555	2,509323	2,442061	2,369394
0,20	2,652445	2,578887	2,499593	2,415564	2,328204	2,239068
0,25	2,571077	2,470998	2,371124	2,273404	2,179118	2,089212
0,294629	2,417589	2,314634	2,217038	2,125676	2,040752	1,962491
0,30	2,395849	2,293685	2,197636	2,107876	2,024654	1,948179

В случаях использования образцов с отношениями $\frac{L}{D}$, находящимися в пределах $0,30 < \frac{L}{D} \leq 0,853145$, для определения характеристик ν и c_2 необходимы измерения резонансных частот первой формы колебаний двух образцов. Для уменьшения методических и инструментальных погрешностей определения ν и c_2 желательно, чтобы диаметры образцов были одинаковыми, а отношение $\frac{L_1}{D}$ одного из образцов находилось в пределах $0,85 \leq \frac{L_1}{D} < 0,853145$, а второго образца – в пределах $0,30 < \frac{L_2}{D} \leq 0,70$. Пользуясь табл. 1 и применяя линейную интерполяцию, для первого образца с отношением $\frac{L_1}{D}$ рассчитывают безразмерные резонансные частоты Ω_{11} для всех приведенных значений ν . Аналогично рассчитывают резонансные частоты Ω_{12} для второго образца с отношением $\frac{L_2}{D}$ для всех значений ν . Затем вычисляют отношения $\frac{\Omega_{11}}{\Omega_{12}} = \frac{f_1}{f_2}$. Исходя из отношения измеренных значений f_{1e}, f_{2e} и линейно интерполируя, вычисляют $\frac{\Omega_{11e}}{\Omega_{12e}}$ и ν_e . В значениях Ω_1 для разных величин ν находят Ω_{12} и Ω_{22} , для которых выполняются неравенства $\nu_{11} < \nu_e < \nu_{12}$. Методом линейной интерполяции, используя значение ν_e , вычисляют частоту Ω_{12e} . Скорость c_{2e} сдвиговых волн рассчитывают по формуле (15).

4.1. Оценка погрешностей определения характеристик c_2 и ν

Оценка погрешностей определения c_2 производилась с использованием экспериментальных результатов, приведенных в работах [26, 27].

Для дисков из алюминия диаметром $D = 39$ мм и толщиной $L = 31,2$ мм с известным коэффициентом Пуассона $\nu = 0,33$ измеренная резонансная частота первой формы колебаний $f_{s1} = 69975$ Гц [26]. Из табл. 1 для $\frac{L}{D} = 31,2/39 = 0,80$ при $\nu = 0,30$ $\Omega_{11} = 2,710627$, а при $\nu = 0,35$

$\Omega_{12} = 2,711421$. По формуле линейной интерполяции вычисляем частоту Ω_{13} , соответствующую $\nu = 0,33$: $\Omega_{13} = 2,710627 + \frac{0,3}{0,5}(2,711421 - 2,710627) = 2,711103$. Используя выражение (14), находим $c_{21} = 3162,36$ м/с.

По данным работы [27], для дисков из алюминия с $\nu = 0,33$, диаметром $D = 39$ мм и толщиной $L = 33,27$ мм, измеренная резонансная частота первой формы колебаний $f_{s1} = 67275$ Гц. Из табл. 1 для $\frac{L}{D} = 33,37/39 \approx 0,853077$ при $\nu = 0,30$ $\Omega_{11} = 2,610049$, а при $\nu = 0,35$ $\Omega_{12} = 2,610051$. Поскольку $\Omega_{11} \approx \Omega_{12}$, то $\Omega_{13} \approx 0,5(\Omega_{11} + \Omega_{12}) = 2,610050$. При $\frac{L}{D} = 0,853145$ $\Omega_{CL} = 2,603827$. Значение Ω_e вычисляется по формуле линейной интерполяции: $\Omega_e = 2,610050 - \frac{0,853077-0,85}{0,853145-0,85}(2,610050 - 2,603827) = 2,603962$. Подставив в (15) значения D, f_{s1} и Ω_e , находим $c_{22} = 3165,44$ м/с. Расхождение $\frac{c_{22}}{c_{21}} = 3165,44/3162,36 \approx 1,001$ (0,1 %).

Относительные инструментальные погрешности измерений, согласно данным работы [22], следующие: $\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{0,01 \text{ мм}}{39 \text{ мм}} = \pm 0,0256$ %, $\frac{\Delta f_{s1}}{f_{s1}} = \pm 12,5/69975 = \pm 0,018$ %. Без учета погрешности измерения толщины L образца средняя квадратичная инструментальная погрешность составляет приблизительно $\pm 0,03$ %. Можно полагать, что примерно такая же погрешность соответствует данным работы [23], поскольку диаметры образцов совпадают, а резонансные частоты отличаются незначительно. Погрешность расхождения величин c_{22} и c_{21} будет в этом случае примерно равна $\pm \sqrt{2} \times 0,03$ % = $\pm 0,042$ %. Следовательно, неучет инструментальной погрешности измерения L и методических погрешностей линейной интерполяции увеличивает погрешность расхождения $\frac{c_{22}}{c_{21}}$ на $\pm \sqrt{0,1^2 - 0,042^2}$ % $\approx \pm 0,091$ %. Средняя квадратичная погрешность определения c_2 в одном эксперименте составит $\pm 0,091/\sqrt{2}$ % $\approx \pm 0,064$ %.

Погрешности определения ν оценивались с привлечением экспериментальных данных, приведенных в работе [27]. В цилиндрических дисках и стержнях из алюминия марки 65ST возбуждались и измерялись резонансные частоты, в частности, осесимметричных продольно-поперечных колебаний при разных отношениях L/a в пределах от 0,201 до 3,29. Результаты экспериментов в работе [27] представлены на рис. 3 а в виде графиков для разных мод колебаний. Этот рисунок был увеличен на дисплее компьютера в 3,75 раза. При этом использовалась только часть рисунка до значения $L/a = 2$. Посредством штангенциркуля, обеспечивающего измерения длин с точностью до 0,05 мм, были измерены ординаты точек на кривой первой формы колебаний при $L/a = 1$ ($L/D = 0,5$) и $L/a = 1,70629$ ($L/D = 0,853145$). Значению абсциссы $L/a = 2$ соответствовало 180,5 мм, а значению ординаты Ω_0 в интервале от 1,2 до 2,4 – 217,5 мм. При $L/a = 1$ ($L/D = 0,5$) $\Omega_0 = \frac{152,5 \text{ мм}}{217,5 \text{ мм}} \times 1,2 + 1,2 = 2,041379$; при $L/a = 1,70629$ ($L/D = 0,853145$) $\Omega_{0CL} = \frac{75,8 \text{ мм}}{217,5 \text{ мм}} \times 1,2 + 1,2 = 1,618207$. В исследовании [27] рассматривались модифицированные безразмерные частоты, рассчитываемые по соотношению

$$\Omega_0 = \frac{\pi D f}{c_0}, \quad (16)$$

где c_0 – скорость волн в стержне, длина которого намного больше диаметра.

Чтобы получить значение Ω_1 , определяемое по формуле (6), необходим пересчет по зависимости

$$\Omega_1 = 2,603827 \Omega_0 / \Omega_{0CL}. \quad (17)$$

Таким образом, $\Omega_1 = \frac{2,041379}{1,618207} \times 2,603827 = 3,284745$. Это значение безразмерной частоты при $L/D = 0,5$ находится в табл. 1 между 3,239395 при $\nu = 0,30$ и 3,311116 при $\nu = 0,35$. Искомое значение

ние v_e вычисляем методом линейной интерполяции: $v_e = 0,30 + \frac{3,284745 - 3,239395}{3,311116 - 3,239395} \times 0,05 \approx 0,3316$. Расхождение со значением $v = 0,344$, указанным в работе [24], составляет $0,3316/0,344 \approx 0,964$ (–3,6 %).

В исследовании [27] приведены также данные измерений резонансных частот цилиндрических дисков и стержней из стали. В результате обработки этих данных по описанной выше методике было рассчитано значение коэффициента Пуассона $\nu_1 = 0,3015$, отличающееся от $\nu_0 = 0,293$ для стали на $0,3015/0,293 = 1,029$ (2,9 %).

5. Заключение

В удобном для выполнения расчетов виде представлены основные соотношения теории Кога для расчета безразмерных резонансных частот осесимметричных колебаний цилиндрических дисков из изотропных материалов. Предложена и обоснована числовыми примерами методика расчета безразмерных резонансных частот первой и второй форм колебаний дисков. Рассчитаны и сведены в таблицы цифровые значения этих частот для разных отношений толщин дисков к их диаметрам и разных значений коэффициента Пуассона. Произведена оценка основных методических погрешностей расчета резонансных частот по теории Кога путем их сравнения с известными расчетами методом Рэлея – Ритца. Изложена методика расчета скорости сдвиговых волн и динамического коэффициента Пуассона материала на основе использования измеряемых резонансных частот колебаний дисков. Оценены инструментальные и методические погрешности определения указанных характеристик применительно к экспериментальным результатам, приведенным в ряде известных работ.

Благодарность

Автор выражает благодарность Р. С. Скалозубу за помощь в поиске и доставке необходимой литературы и А. С. Скалозубу за компьютерное сопровождение при подготовке и оформлении рукописи статьи.

Литература

1. Мелешко В. В., Якименко Н. С., Улитко А. Ф. Резонансный метод определения упругих постоянных конечных изотропных цилиндров // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 65–75.
2. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1876. – 81 (4). – S. 324–336. – DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Cree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1886. – Vol. 21. – P. 287–298.
4. Cree C. On longitudinal vibrations // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1889. – Vol. 23. – P. 317–342.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.
6. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – Vol. 51, iss. 1B – P. 233–240. – DOI: 10.1121/1.1912835.
7. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. High-frequency axisymmetric vibrations of circular disks // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12. – P. 1251–1258. – DOI: 10.1007/BF00882700.
8. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length // Soviet Physics. Acoustics. – 1978. – Vol. 24, No. 6. – P. 861–866.
9. Hutchinson J. R. Vibrations of solid cylinders // Journal of Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 47 (4). – P. 901–907. – DOI: 10.1115/1.3153811.
10. Чернышев К. В., Шегай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины // Акустический журнал. – 1977. – Т. 23, № 4. – С. 627–631.

11. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution // *Wave Motion*. – 2003. – Vol. 37. – P. 191–206. – DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
12. Puckett A. D., Peterson M. L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides // *Ultrasonics*. – 2005. – Vol. 43 (3). – P. 197–207. – DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
13. Leissa A. W., So J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beam from one-dimensional and three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1995. – Vol. 98. – P. 2122–2135. – DOI: 10.1121/1.414331.
14. Leissa A. W., So J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1995. – Vol. 98. – P. 2136–2141. – DOI: 10.1121/1.414403.
15. Nieves F. J., Bayón A., Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder // *J. Sound Vib.* – 2008. – Vol. 311 (1–2). – P. 588–596. – DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
16. Koga I. Longitudinal vibrations of short circular cylinders // *J. Inst. Electr. Eng. Japan*. – 1930. – Vol. 50, No. 508. – P. 1209–1224.
17. Stupin V. A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. – 2000. – Vol. 36. – P. 896–899. – DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. – 2021. – Т. 8 (2). – С. 270–281. – DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
19. Gadzhibekov T. A., Pyashenko A. V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio // *Mechanics of Solids*. – 2021. – Vol. 56. – P. 702–714. – DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov V. V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range // *Acoustical Physics*. – 2022. – Vol. 68 (3). – P. 206–214. – DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Сибаяма К. Пьезокерамические преобразователи в виде коротких стержней // *Ультразвуковые преобразователи* / под ред. Е. Кикучи; пер. с англ. – М. : Мир, 1972. – С. 310–352.
22. Пьезокерамические преобразователи. Методы измерения и расчет параметров : справочник / В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша, Н. И. Прудько, С. И. Пугачёв / под ред. С. И. Пугачёва. – Л. : Судостроение, 1984. – 256 с.
23. Gaidukov Yu. P., Danilova N. P., Sapozhnikov O. Vibration modes of an isotropic disk with a weak dependence on the disk thickness // *Acoustical Physics*. – 1999. – Vol. 45 (2). – P. 163–171.
24. URL: <https://calculate.co.nz/bessel-function-calculator.php>.
25. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. A multiple frequency in the two lowest axisymmetric vibration modes of a short cylinder // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 251 (4). – P. 741–749. – DOI: 10.1006/jsvi.2001.3862.
26. Nieves F. J.; Gascón F., Bayón A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2004. – Vol. 115. – P. 2928–2936. – DOI: 10.1121/1.1739485.
27. McMahon G. W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1964. – Vol. 36 (1). – P. 85–92. – DOI: 10.1121/1.1918918.