

Received: 19.01.2026

Revised: 31.03.2026

Accepted: 24.04.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.2.056-072

STUDYING THE EFFECT OF WEAK CONVECTION ON THE COUETTE–POISEUILLE FLOW OF A POWER-LAW FLUID IN A PLANAR CHANNEL BY THE PERTURBATION METHOD

K. V. Gubareva^{1, a, *}, E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}, and A. V. Eremin^{1, c}

¹Samara State Technical University,



244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia



²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,



34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^c  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

The paper studies the influence of weak convective effects on the steady flow of a non-Newtonian fluid in a planar channel with a moving upper wall and a longitudinal pressure gradient. The fluid is described by the Ostwald–de-Waele power-law model. To analyze the slow development of the profile along the channel, an asymptotic perturbation method is used, based on a small parameter equal to the ratio of the channel height to the characteristic longitudinal scale. A first-order analytical solution is obtained, including a correction to the primary velocity profile and the shear stress distribution. The flow features for pseudoplastic, Newtonian, and dilatant fluids are analyzed. It is shown that convection disrupts the linearity of the stress field, causes longitudinal evolution of the velocity profile, and modifies the conditions for the onset of reverse flow. The results are important for accurate modeling of processes in devices with combined action of the pressure gradient and wall motion.

Keywords: power-law fluid, Couette–Poiseuille flow, convection, perturbation method, analytical solution, shear stress, non-Newtonian fluid

References

1. Middleman, S. *Fundamentals of Polymer Processing*, McGraw-Hill, 1977, 525 p.
2. Wilson, S.D.R. The drag-out problem in film coating theory. *Journal of Engineering Mathematics*, 1982, 16, 209–221. DOI: 10.1007/BF00042717.
3. Aristov, S.N. and Skulskiy, O.I. Viscoelastic effects of blood flow in nondeformable. *Russian Journal of Biomechanics*, 1999, 3 (4), 24–33.
4. Bird, R.B., Armstrong, R.C., and Hassager, O. *Dynamics of Polymeric Liquids*, vol. 1: Fluid Mechanics, 2nd ed., Wiley, 1987, 672 p.
5. Tanner, R.I. *Engineering Rheology*, 2nd ed., OUP Oxford, 2000, 586 p.
6. Schowalter, W.R. *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1978, 300 p.
7. Skulsky, O.I. and Aristov, S.N. *Mekhanika anomalno vyazkikh zhidkostey* [The Anomalous-Viscous Fluid Dynamics]. RKhD Publ., Moscow, Izhevsk, 2004, 154 p. (In Russian).

8. Chhabra, R.P. and Richardson, J.F. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*, 1st ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1999, 436 p.
9. Vinogradov, G.V. and Malkin, A.Y. *Rheology of Polymers: Viscoelasticity and Flow of Polymers*, Springer, 1980, 468 p.
10. Nádai, A. *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, 4th ed., McGraw-Hill, 1931, 349 p.
11. Truesdell, C. and Noll, W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, 3rd ed., Springer, 2004, 602 p.
12. Denier, J.P. and Dabrowski, P.P. On the boundary-layer equations for power-law fluids. In: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2004, 460, 3143–3158. DOI: 10.1098/rspa.2004.1349.
13. Málek, J., Rajagopal, K.R., and Růžička, M. Existence and regularity of solutions and the stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1995, 05 (06), 789–812. DOI: 10.1142/S0218202595000449.
14. Frigaard, I.A. and Ryan, D.P. Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, 123 (1), 67–83. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.06.011.
15. Chang, H.-C. and Demekhin, E.A. *Studies in Interface Science*, vol. 14: *Complex Wave Dynamics on Thin Films*, Elsevier, 2002.
16. Kalliadasis, S., Ruyer-Quil, C., Scheid, B., and Velarde, M.G. *Falling Liquid Films, series Applied Mathematical Sciences*, Springer, London, 2012. DOI: 10.1007/978-1-84882-367-9.
17. Yih, C.-S. *Dynamics of Nonhomogeneous Fluids*, Macmillan, 1965, 306 p.
18. Hartnett, J.P. and Kostic, M. Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, 28 (6), 1147–1155. DOI: 10.1016/0017-9310(85)90122-X.
19. Whiteman, J.R., ed. *The Mathematics of Finite Elements and Applications: Mafelap 1984*, Academic Press, 1985, 650 p.
20. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu, Burmasheva, N.V, and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Poole, R.J. The Deborah and Weissenberg numbers. In: *The British Society of Rheology, Rheology Bulletin*, 2012, 53 (2), 32–39.
22. Rajagopal, K.R. On boundary conditions for fluids of the differential type. In: Sequeira, A., ed., *Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems*, Springer, Boston, MA, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4899-1415-6_22.
23. Rao, I.J. and Rajagopal, K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel. *Acta Mechanica*, 1999, 135, 113–126. DOI: 10.1007/BF01305747.
24. Gubareva, K.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 6, 23–38. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-6/2025-6_528.html
25. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. Inhomogeneous Couette-Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
26. Aristov, S.N. and Skulskii, O.I. Exact solution of the problem on a six- constant Jeffreys model of fluid in a plane channel. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, 43, 817–822. DOI: 10.1023/A:1020752101539.

27. Baranovskii, E.S. Prosviryakov, E.Yu., and Ershkov, S.V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2025, 84, 104294. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
28. Mekheimer, Kh.S. and El Kot, M.A. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24, 637–644. DOI: 10.1007/s10409-008-0185-7.
29. Baranovskii, E.S. Analytical solutions to the unsteady Poiseuille flow of a second grade fluid with slip boundary conditions. *Polymers*, 2024, 16 (2), 179. DOI: 10.3390/polym16020179.
30. Massoudi, M. and Phuoc, T.X. Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity. *Acta Mechanica*, 2001, 150, 23–37. DOI: 10.1007/BF01178542.
31. Ershkov, S.V., Baranovskii, E.S., Prosviryakov, E.Yu., and Yudin, A.V. Non-Newtonian rivulet-flows on unsteady heated plane surface. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2025, 170, 104984. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104984.
32. Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing convective flows of multilayer fluids. *Fluid Dynamics*, 2020, 55 (6), 798–809.
33. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15 (9), 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
34. Burmasheva, N.V., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sādhanā*, 2021, 46, 55. DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
35. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, 21 (4), 736–751. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1568.
36. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 66–86. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
37. Sofonea, M. and Matei, A. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009, 230 p.
38. Aristov, S.N. and Keller, I.E. Beltrami stress fields in an elastic body. *Doklady Physics*, 2016, 61 (7), 343–346. DOI: 10.1134/S1028335816070065.
39. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, 37, 17–30. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.17.
40. Prosviryakov, E.Yu., Mikhailov, S.A., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. Exact solutions to the Navier-Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows. *Russian Aeronautics*, 2023, 66, 500–509. DOI: 10.3103/S106879982303011X.

Подана в журнал: 19.01.2026

УДК 532.135

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.2.056-072



ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛАБОЙ КОНВЕКЦИИ НА ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА – ПУАЗЕЙЛЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ



К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвиряков^{2, 3, б}, А. В. Еремин^{1, в}



¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^в  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия

Тел.: +7 (846) 332-42-26

Исследуется влияние слабых конвективных эффектов на стационарное течение неньютоновской жидкости в плоском канале с движущейся верхней стенкой и продольным градиентом давления. Жидкость описывается степенной моделью Оствальда – Вейля. Для анализа медленного развития профиля вдоль канала используется асимптотический метод возмущений по малому параметру, равному отношению высоты канала к характерному продольному масштабу. Получено аналитическое решение в первом порядке, включающее поправку к основному профилю скорости и распределению касательного напряжения. Проанализированы особенности течения для псевдопластичных, ньютоновских и дилатантных жидкостей. Показано, что конвекция нарушает линейность поля напряжений, вызывает продольную эволюцию профиля скорости и модифицирует условия возникновения обратного течения. Результаты важны для корректного моделирования процессов в аппаратах с совмещенным действием градиента давления и движения границ.

Ключевые слова: степенная жидкость, течение Куэтта – Пуазейля, конвекция, метод возмущений, аналитическое решение, касательное напряжение, неньютоновская жидкость.

1. Введение

Течения неньютоновских жидкостей в каналах и зазорах составляют теоретическую основу для множества технологических процессов, от экструзии полимеров до микрофлюидной диагностики [1–3]. В этом контексте степенная модель (модель Оствальда – Вейля) служит одним из фундаментальных инструментов, позволяя описывать псевдопластичное или дилатантное поведение сред, таких как концентрированные суспензии, растворы полимеров и биологические жидкости в определенных режимах [4–6]. Привлекательность этой модели обусловлена ее способностью улавливать нелинейную зависимость вязкости от скорости сдвига при сохранении относительной простоты математической формулировки [7, 8].

Одной из базовых конфигураций, имеющей широкое прикладное значение в расчетах подшипников, экструдеров и систем нанесения покрытий, является комбинированное течение Куэтта – Пуазейля [9–11]. Полное аналитическое решение для этого течения в ползущем режиме (при пренебрежении инерцией) хорошо известно для степенной жидкости и демонстрирует нетривиальные эффекты, включая возникновение зон обратного течения при определенных соотношениях параметров для дилатантных сред [12–14]. Однако предположение о полностью развитом течении без инерции часто является идеализацией. В реальных условиях, особенно на входных участках или в каналах переменного сечения, конвективный перенос импульса может оказывать существенное влияние на формирование профиля скорости и распределение напряжений [15–17]. Учет этих эффектов необходим для повышения точности инженерных расчетов, например, при определении гидродинамического сопротивления или теплообмена [18, 19].

Постановка задачи с учетом инерции для нелинейных реологических законов, как правило, требует применения численных методов решения уравнений Навье – Стокса или уравнений пограничного слоя [20, 21]. В этой связи значительный интерес представляют асимптотические методы, позволяющие получить аналитические выражения для малых поправок, обусловленных инерцией. К ним относится метод возмущений по малому параметру, связанному с медленным изменением течения вдоль канала, который успешно применялся для анализа различных классов задач конвекции и течений в каналах [22–25]. В литературе также широко представлены исследования, посвященные построению точных и приближенных решений для течений неньютоновских, микрополярных и бинарных жидкостей в различных приближениях [26–35], что подтверждает актуальность разработки аналитических подходов.

Несмотря на обширный массив работ по ползущим течениям степенной жидкости, влияние слабых конвективных эффектов на структуру комбинированного течения Куэтта – Пуазейля, в частности на эволюцию профиля скорости вдоль канала и модификацию критических условий возникновения обратного течения, изучено недостаточно полно. Существующие аналитические исследования часто ограничиваются случаем ньютоновской жидкости либо рассматривают течение под действием лишь одного движущего фактора [36, 37].

Целью настоящей работы является аналитическое исследование слабоконвективного комбинированного течения степенной жидкости в плоском канале методом возмущений по малому параметру продольного изменения. Для этого ставится задача о течении с постоянным градиентом давления и движущейся верхней стенкой, в котором конвективные члены рассматриваются как малое возмущение. Путем разложения поля скорости в асимптотический ряд получены явные выражения для основного профиля и поправки первого порядка. В работе детально анализируется зависимость решения от индекса течения, исследуется вызванное конвекцией перераспределение касательных напряжений и анализируется смещение границы режима возникновения обратного течения. Полученные результаты дополняют существующие точные решения для ползущих течений [38–40] и могут служить основой для верификации численных алгоритмов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости степенного закона между двумя бесконечными параллельными пластинами. Нижняя пластина ($y = 0$) неподвижна, верхняя ($y = h$) движется с постоянной скоростью $U_0 > 0$ вдоль оси x . Течение возбуждается градиентом давления $G = -dp/dx \geq 0$.

В данной работе исследуется модельная задача, в которой предполагается, что градиент давления G можно аппроксимировать константой на характерной длине L , соответствующей масштабу медленного развития профиля скорости (например, длине входного участка). Такое допущение, в рамках которого продольный градиент давления не перестраивается

под влиянием конвекции, позволяет получить замкнутое аналитическое решение для поправки первого порядка. В рамках этого приближения учитывается влияние слабой инерции (конвективных членов) на структуру течения, которое в нулевом приближении ($Re_g = 0$) совпадает с классическим полностью развитым решением. Учитываем конвективные члены в уравнении движения, соответствующие переносу импульса частицами жидкости. Поле скорости принимаем двумерным:

$$\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y), 0).$$

Для описания медленного изменения профиля вдоль канала введем малый параметр $\epsilon = h/L \ll 1$, где L – характерный продольный масштаб изменения течения, например длина входного участка, на котором происходит формирование профиля. Представление (4) физически интерпретируется как разложение в ряд Тейлора по продольной координате вблизи некоторого начального сечения, и оно справедливо на расстояниях x , где $\epsilon x \ll 1$. В рамках приближения пограничного слоя, справедливого при $\epsilon \ll 1$, уравнения движения и неразрывности принимают вид

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости.

Реологическое поведение описывается моделью Оствальда – Вейля :

$$\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}, K > 0, n > 0. \quad (3)$$

Будем искать решение в виде разложения по малому параметру ϵ . Представим продольную скорость следующим образом:

$$u(x, y) = U_0 [f(\eta) + \epsilon x g(\eta)], \eta = \frac{y}{h}, \quad (4)$$

где $f(\eta)$ описывает основной профиль скорости, соответствующий решению без учета инерции, а $g(\eta)$ – поправка, учитывающая медленное изменение профиля вдоль канала под действием конвективных эффектов.

Подставляя выражение (4) в уравнение неразрывности (2) и интегрируя по y , находим поперечную компоненту скорости:

$$v(x, y) = -\frac{U_0 \epsilon h}{2} [\eta g'(\eta) - g(\eta)]. \quad (5)$$

Граничные условия прилипания на стенках канала задаются следующим образом. На нижней стенке ($y = 0$):

$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0, g(0) = 0;$$

на верхней стенке ($y = h$):

$$u(x, h) = U_0 \Rightarrow f(1) = 1, g(1) = 0.$$

Условия непроницаемости стенок требуют $v(x, 0) = 0$ и $v(x, h) = 0$. Подстановка $\eta = 0$ в выражение (5) дает $v(x, 0) = (U_0\epsilon h/2)g(0)$, что автоматически выполняется благодаря уже установленному условию $g(0) = 0$. При $\eta = 1$ получаем $v(x, h) = -(U_0\epsilon h/2)g'(1)$, откуда следует дополнительное условие

$$g'(1) = 0. \quad (6)$$

Введем безразмерные параметры, характеризующие соотношение движущих сил и относительную важность инерционных эффектов:

$$\Pi = \frac{Gh^{n+1}}{KU_0^n}, \text{Re}_g = \frac{\rho U_0^{2-n} h^n}{K}. \quad (7)$$

Комбинированный параметр $\text{Re}_g \epsilon = \text{Re}_g \cdot (h/L)$ определяет относительную величину конвективных членов по сравнению с вязкими силами и служит малым параметром задачи в первом порядке теории возмущений.

3. Аналитическое решение

Функция $f(\eta)$, описывающая основной профиль скорости, удовлетворяет уравнению, полученному из баланса градиента давления и вязких напряжений:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{df}{d\eta} \right) = \Pi. \quad (8)$$

Интегрируя один раз, получаем линейное распределение касательного напряжения:

$$\left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{df}{d\eta} = \Pi\eta + C, \quad (9)$$

где C – постоянная интегрирования, имеющая смысл безразмерного касательного напряжения на нижней стенке.

Анализ знака правой части уравнения (9) позволяет выделить два физически реализуемых режима течения.

В монотонном режиме ($C \geq 0$) напряжение положительно во всем сечении канала, и профиль скорости монотонно возрастает от нуля до единицы. Интегрируя уравнение (9) с учетом условия $f(0) = 0$, получаем

$$f(\eta) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\Pi} [(\Pi\eta + C)^{(n+1)/n} - C^{(n+1)/n}]. \quad (10)$$

Константа C определяется из граничного условия $f(1) = 1$, что приводит к нелинейному алгебраическому уравнению

$$\left(\Pi + C \right)^{(n+1)/n} - C^{(n+1)/n} = \frac{n+1}{n} \Pi. \quad (11)$$

В немонотонном режиме ($-\Pi < C < 0$) существует точка $\eta_0 \in (0,1)$, где касательное напряжение обращается в нуль. Вводя положительную величину $D = -C > 0$, находим положение этой точки: $\eta_0 = D/\Pi$. Профиль скорости имеет минимум в точке η_0 , а вблизи неподвижной стенки возникает зона обратного течения. Решение представляется в виде кусочно-аналитической функции:

$$f(\eta) = \begin{cases} -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\Pi} [D^{(n+1)/n} - (D - \Pi\eta)^{(n+1)/n}], & 0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\Pi} [(\Pi\eta - D)^{(n+1)/n} - D^{(n+1)/n}], & \eta_0 \leq \eta \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

где величина D определяется из условия $f(1) = 1$:

$$(\Pi - D)^{(n+1)/n} - D^{(n+1)/n} = \frac{n+1}{n} \Pi. \quad (13)$$

Переход между режимами в ползущем течении происходит при критическом значении параметра Π , соответствующем обнулению напряжения на нижней стенке ($C = 0$). Подстановка $C = 0$ в уравнение (11) дает

$$\Pi_c(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n. \quad (14)$$

При $\Pi \leq \Pi_c(n)$ реализуется монотонный режим, при $\Pi > \Pi_c(n)$ – немонотонный. Важно отметить, что для псевдопластичных жидкостей ($n < 1$) уравнение (11) имеет решение с $C > 0$ при любом $\Pi > 0$, что означает отсутствие обратного течения в рамках данной постановки. Для дилатантных жидкостей ($n > 1$) решение с $C \geq 0$ существует только при $\Pi \leq \Pi_c(n)$, что приводит к качественно новому поведению – возникновению зоны обратного потока.

Подставляя разложение (4) в уравнение движения (1) и сохраняя члены первого порядка по малому параметру ϵ , получаем линеаризованное уравнение для поправки $g(\eta)$. При линеаризации реологического закона (3) необходимо учесть производную степенной функции, что приводит к появлению коэффициента n . В результате получаем

$$\frac{d}{d\eta} \left(n \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{dg}{d\eta} \right) = \text{Re}_g f(\eta) \frac{df}{d\eta}.$$

Интегрируя это уравнение один раз по η , находим

$$n \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{dg}{d\eta} = \text{Re}_g \int_0^\eta f(\xi) \frac{df}{d\xi} d\xi + C_1, \quad (15)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий.

Заметим, что интеграл в правой части представляет собой кинетическую энергию единицы массы и может быть вычислен явно:

$$\int_0^\eta f(\xi) \frac{df}{d\xi} d\xi = \frac{1}{2} f^2(\eta).$$

Следовательно, уравнение (15) преобразуется к виду

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{1}{n} \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{1-n} \left(\frac{\text{Re}_g}{2} f^2(\eta) + C_1 \right). \quad (16)$$

Интегрируя это выражение с учетом условия $g(0) = 0$, находим

$$g(\eta) = \frac{1}{n} \int_0^\eta \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{1-n} \left(\frac{\text{Re}_g}{2} f^2(\zeta) + C_1 \right) d\zeta. \quad (17)$$

Постоянная C_1 определяется из условия непроницаемости верхней стенки. Подстановка $\eta = 1$ в уравнение (16) с учетом требования $g'(1) = 0$, следующего из условия (6), дает

$$\frac{Re_g}{2} f^2(1) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Re_g}{2},$$

поскольку $f(1) = 1$. Непосредственная проверка показывает, что подстановка этого значения C_1 в формулу (17) приводит к выполнению условия $g(1) = 0$, что подтверждает совместность граничных условий и корректность разложения.

Полное касательное напряжение с учетом конвективных эффектов определяется реологическим соотношением (3). Используя разложение (4) для скорости, запишем безразмерное напряжение в следующем виде:

$$\tilde{\tau} = \left| \frac{df}{d\eta} + \epsilon x \frac{dg}{d\eta} \right|^{n-1} \left(\frac{df}{d\eta} + \epsilon x \frac{dg}{d\eta} \right). \quad (18)$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора по малому параметру ϵ и сохраняя члены первого порядка, получаем

$$\tilde{\tau} = \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{df}{d\eta} + \epsilon x \cdot n \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{dg}{d\eta} + O(\epsilon^2). \quad (19)$$

Первое слагаемое совпадает с напряжением в нулевом приближении и, согласно уравнению (9), определяется следующим образом:

$$\tilde{\tau}_0(\eta) = \Pi\eta + C. \quad (20)$$

Второе слагаемое представляет собой поправку, обусловленную конвекцией. Используя уравнение (15) и значение $C_1 = -Re_g/2$, эту поправку можно записать в компактной форме

$$\tilde{\tau}_1(\eta) = n \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{dg}{d\eta} = \frac{Re_g}{2} (f^2(\eta) - 1). \quad (21)$$

Таким образом, полное безразмерное касательное напряжение с учетом конвективных эффектов принимает вид

$$\tilde{\tau}(x, \eta) = \Pi\eta + C + \epsilon x \cdot \frac{Re_g}{2} (f^2(\eta) - 1) + O(\epsilon^2). \quad (22)$$

Это выражение показывает, что конвекция нарушает линейность распределения напряжения по сечению канала, внося квадратичную зависимость от основного профиля скорости и делая напряжение функцией продольной координаты x .

Конвективные эффекты, хотя и малы, приводят к принципиальным изменениям в структуре течения. Во-первых, профиль скорости приобретает слабую линейную зависимость от продольной координаты x , что соответствует медленному развитию течения вдоль канала. Поправка $g(\eta)$ изменяет форму профиля, причем ее амплитуда пропорциональна комбинированному параметру $Re_g\epsilon$.

Во-вторых, распределение касательного напряжения перестает быть строго линейным. Поправка, пропорциональная $Re_g\epsilon$, вносит нелинейные искажения, зависящие от квадрата основного профиля скорости. Это означает, что напряжение на стенках также становится функцией продольной координаты, что важно для расчета сил трения в реальных устройствах. В частности, из выражения (22) следует, что напряжение на верхней стенке ($\eta = 1$)

определяется так: $\tilde{\tau}(x, 1) = \Pi + C$ и не зависит от конвекции в первом порядке, а на нижней стенке ($\eta = 0$) – так: $\tilde{\tau}(x, 0) = C - \epsilon x(\text{Re}_g/2)$.

В-третьих, учет конвекции модифицирует условие перехода между монотонным и немонотонным режимами. Поскольку поправка к профилю скорости зависит от x , критическое значение параметра Π также становится функцией продольной координаты. Для анализа устойчивости режима в фиксированном сечении x необходимо рассматривать локальное значение Π , что требует отдельного исследования.

Рассмотрим частные случаи.

1. Ньютоновская жидкость ($n = 1$). В этом случае реологический закон линеен, и уравнение (8) интегрируется элементарно. Основной профиль скорости представляет собой классический параболически-линейный профиль Куэтта – Пуазейля:

$$f(\eta) = \frac{\Pi}{2}\eta(1 - \eta) + \eta.$$

Уравнение для поправки $g(\eta)$ принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2g}{d\eta^2} = \text{Re}_g f(\eta) f'(\eta).$$

Интегрируя дважды с учетом граничных условий $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ и $g'(1) = 0$, получаем аналитическое выражение

$$g(\eta) = \frac{\text{Re}_g}{24} [\eta^2(2\eta^2 - \Pi\eta + \Pi - 4) + (4 - \Pi)\eta],$$

что подтверждает корректность общего подхода.

2. Сильно дилатантная жидкость ($n \gg 1$). При больших значениях индекса течения основной профиль $f(\eta)$ стремится к ступенчатой функции с почти плоской центральной частью и резким изменением вблизи стенок. Эффективная вязкость в таких областях велика, что подавляет инерционные эффекты. Соответственно, поправка $g(\eta)$ оказывается малой, и влияние конвекции на структуру течения ослабевает с ростом n .

3. Псевдопластичная жидкость ($n < 1$). Для жидкостей с индексом течения меньше единицы в нулевом приближении обратное течение отсутствует при любых значениях Π . Однако учет конвекции может привести к появлению немонотонности в профиле скорости при определенных соотношениях между Re_g , ϵ и Π , что указывает на более сложную динамику по сравнению с дилатантным случаем.

Полученное аналитическое решение позволяет исследовать влияние слабой конвекции на комбинированное течение степенной жидкости в плоском канале. Метод разложения по малому параметру $\epsilon = h/L$ дает явные выражения для поправок первого порядка к профилю скорости и распределению касательного напряжения. Конвекция приводит к появлению слабой продольной зависимости течения и поправкам, зависящим нелинейно от основного профиля, но линейным по малому параметру $\text{Re}_g\epsilon$, что важно для понимания физики течений при умеренных числах Рейнольдса и медленном развитии профиля вдоль канала.

4. Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены безразмерные профили скорости для четырех типов жидкостей при фиксированном параметре соотношения сил $\Pi = 3$. Для псевдопластичной жидкости ($n = 0,5$) наблюдается монотонный профиль, близкий к линейному, с выраженным спрямлением в центральной части канала. Конвективная поправка незначительно искажает профиль,

увеличивая скорость в ядре потока. Ньютоновская жидкость ($n = 1$) демонстрирует классический параболически-линейный профиль, где влияние конвекции проявляется наиболее симметрично. Дилатантные жидкости ($n = 2$ и $n = 3$) находятся в немонотонном режиме: вблизи нижней стенки формируется зона обратного течения. Конвективная поправка для этих жидкостей имеет сложную форму, приводя к увеличению модуля скорости обратного течения и небольшому росту скорости у движущейся стенки, причем для более сильно дилатантной жидкости ($n = 3$) влияние конвекции ослабевает.

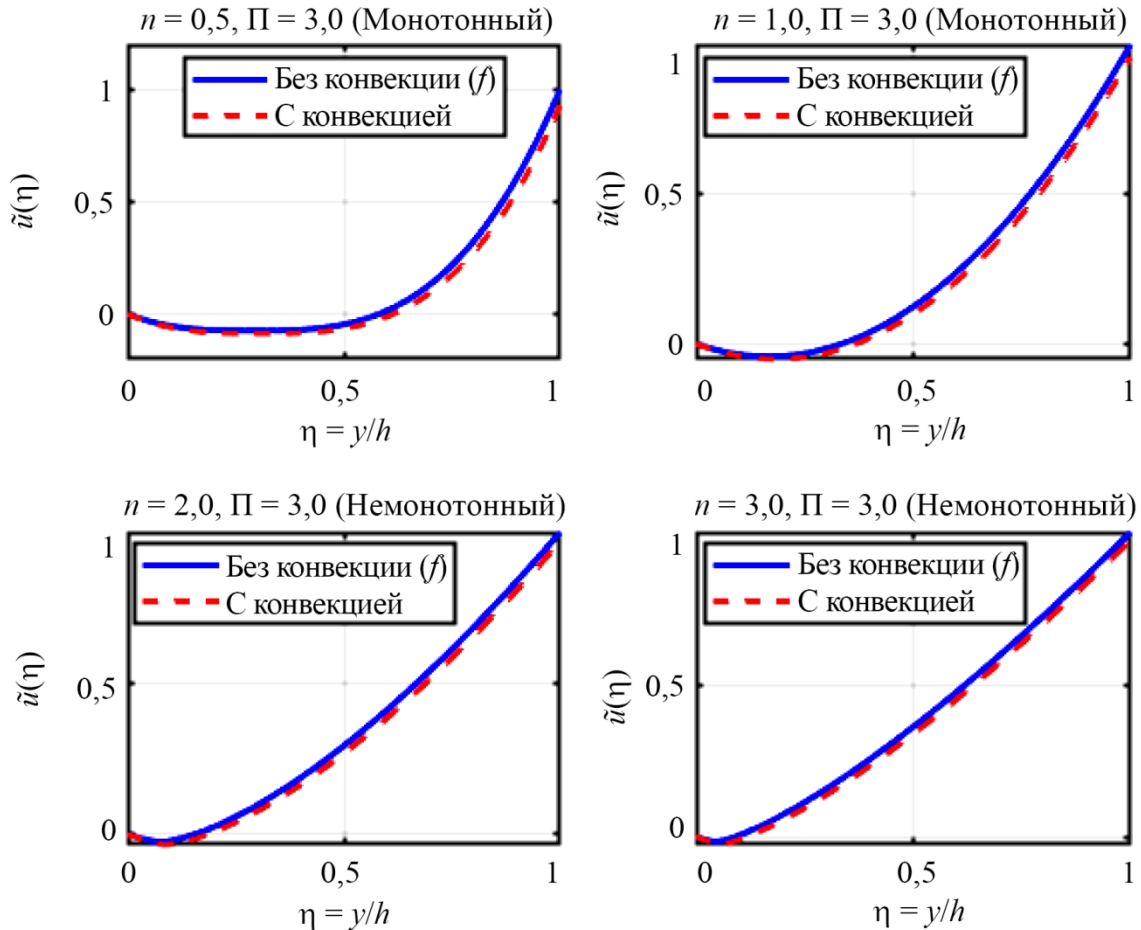


Рис. 1. Профили скорости $\tilde{u}(\eta)$ для различных n при $\Pi = 3$: сплошные линии – без конвекции, пунктирные – с конвекцией ($\epsilon x Re_g = 0,1$)

Рисунок 2 иллюстрирует эволюцию профиля скорости дилатантной жидкости ($n = 2$) с продольной координатой x . При росте параметра $\epsilon x Re_g$ от 0 до 0,3 наблюдается явное развитие профиля: зона обратного течения расширяется, а ее минимальная скорость увеличивается по модулю. Одновременно происходит рост скорости в верхней части канала. Это указывает на перераспределение энергии конвективным переносом импульса от области с высокой скоростью к зоне возвратного течения, что усиливает немонотонность профиля.

На рис. 3 детально показано влияние конвекции на распределение безразмерного касательного напряжения $\tilde{\tau}$. На графике (рис. 3 а) представлены полные профили напряжения для различных сечений вдоль канала. В отличие от линейного распределения в ползущем течении $\tau_0 = \Pi\eta + C$, конвекция вносит квадратичную поправку $\tau_1 = (\epsilon x Re_g / 2)(f^2(\eta) - 1)$, делая профиль вогнутым. Напряжение на верхней стенке ($\eta = 1$) остается неизменным, а на нижней стенке ($\eta = 0$) линейно убывает с ростом x . График на рис. 3 б демонстрирует относительную поправку к напряжению, которая в зоне обратного течения может достигать -15% и более.

Абсолютная величина поправки (рис. 3 в) максимальна вблизи стенок и меняет знак в точке, где $f^2(\eta) = 1$.

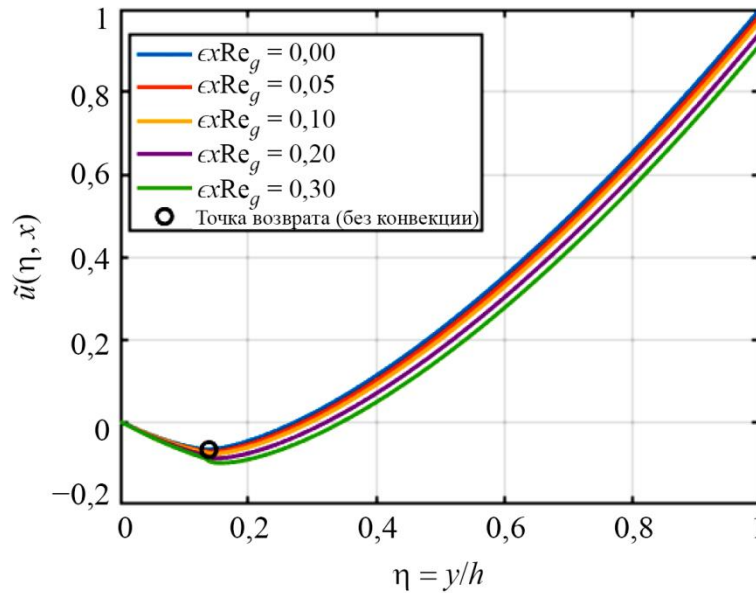


Рис. 2. Эволюция профиля $\tilde{y}(\eta, x)$ вдоль канала для $n = 2$, $\Pi = 4$. Параметр: ϵRe_g

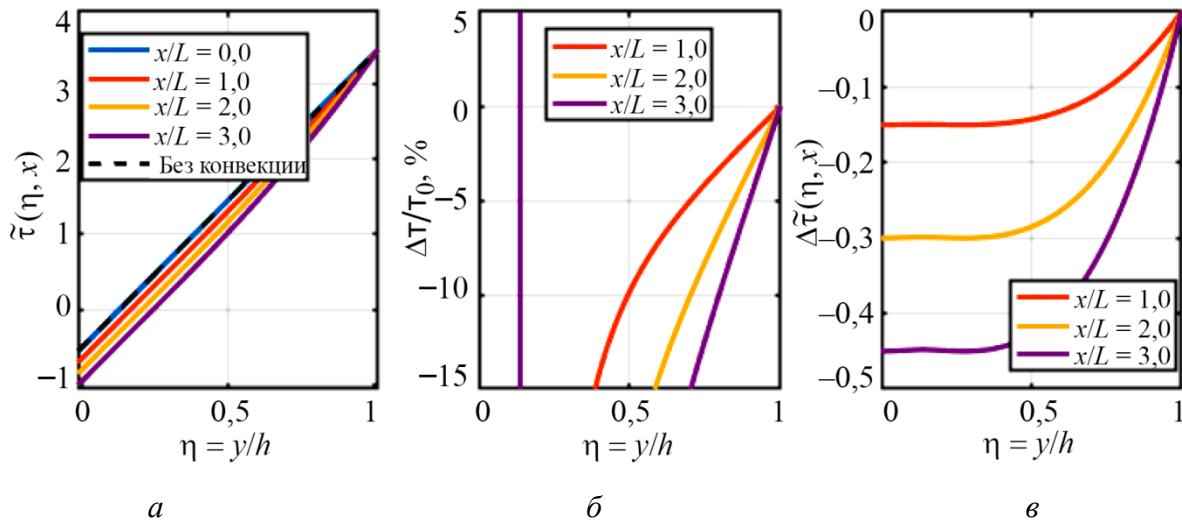


Рис. 3. Касательное напряжение $\tilde{\tau}(\eta, x)$ для $n = 2$, $\Pi = 4$, $\text{Re}_g = 1$, $\epsilon = 0,3$: полное напряжение (а); относительная поправка, % (б); абсолютная поправка (в)

Структура конвективной поправки $g(\eta)$ и ее зависимость от n представлены на рис. 4. График, представленный на рис. 4 а, показывает, что для псевдопластиков ($n = 0,5$) функция $g(\eta)$ положительна почти во всем сечении. Для ньютоновской жидкости ($n = 1$) поправка антисимметрична. Для дилатантных жидкостей ($n = 2,3$) $g(\eta)$ становится знакопеременной: отрицательной вблизи нижней стенки и положительной в верхней части. Интегральная норма $\|g(\eta)\|_{L1}$, представленная на графике (рис. 4 б), имеет минимум в окрестности $n \approx 1$, что означает минимальное влияние слабой конвекции на структуру течения для ньютоновской жидкости.

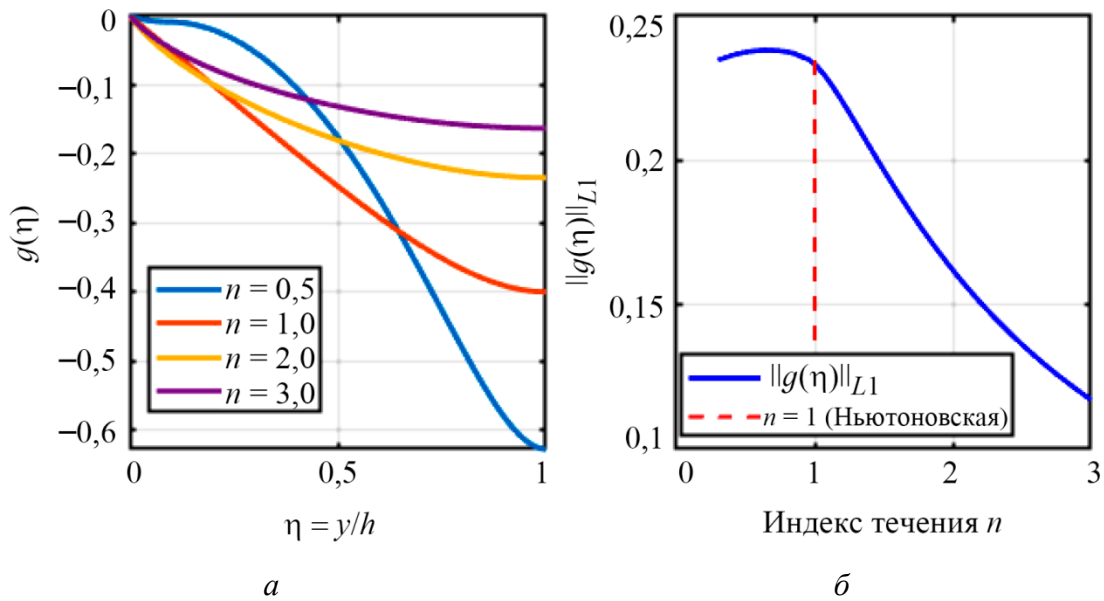


Рис. 4. Конвективная поправка $g(\eta)$: профили для разных n ($\Pi = 2$, $Re_g = 1$) (а); норма $\|g(\eta)\|_{L1}$ от n (б)

На рис. 5 сопоставлены критические условия Π_c для возникновения обратного течения. Кривая $\Pi_c(n) = ((n + 1)/n)^n$ для ползущего течения разделяет области монотонного и немонотонного течения. Качественная оценка показывает, что конвекция смещает критическую границу вверх. Это означает, что для возникновения обратного течения в данном сечении канала при учете инерции требуется больший безразмерный градиент давления Π . Эффект наиболее выражен для умеренно дилатантных жидкостей ($1 < n < 2$).

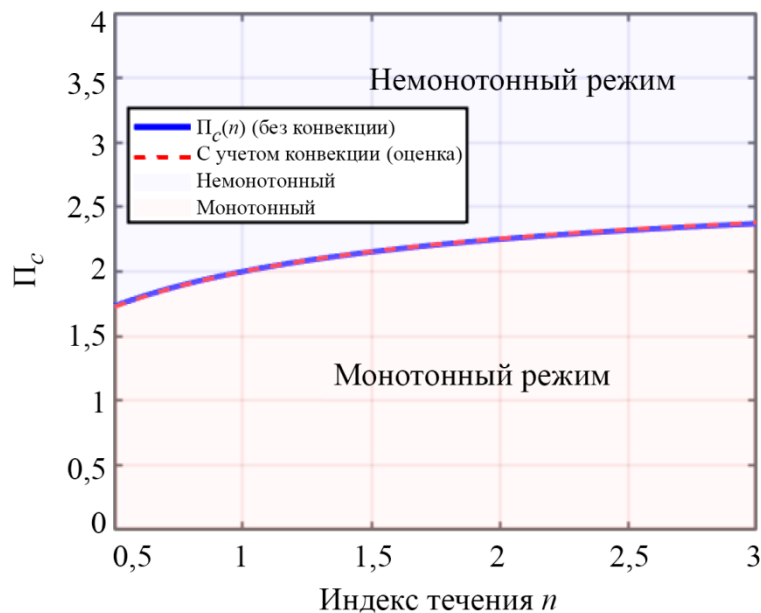


Рис. 5. Критическое условие $\Pi_c(n)$

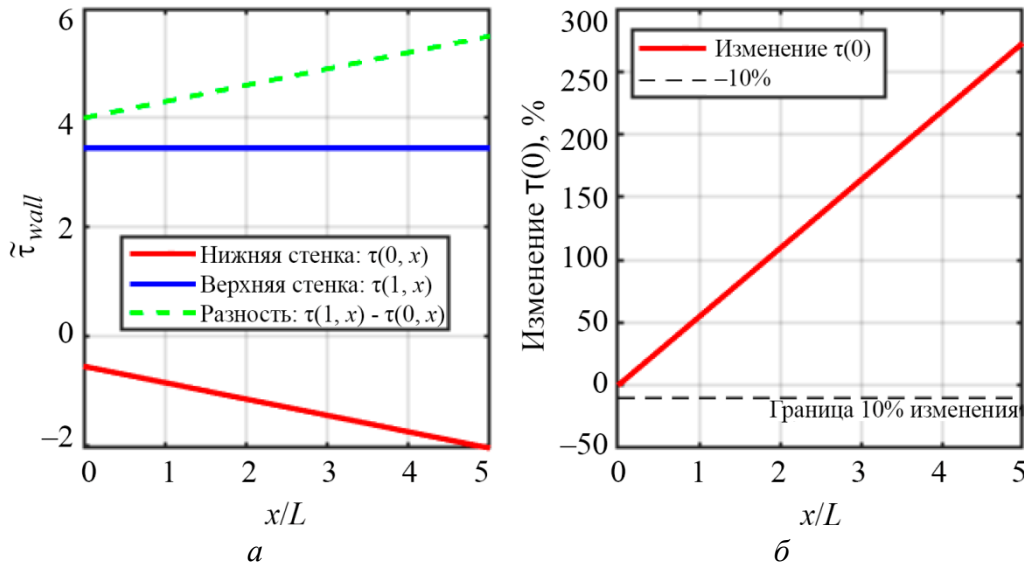


Рис. 6. Напряжения на стенках $\tilde{\tau}_{wall}(x)$ для $n = 2, \Pi = 4$: $\tau(0, x)$, $\tau(1, x)$ и их разность (а); относительное изменение $\tau(0, x)$ (б)

Эволюция напряжений на стенках вдоль канала проанализирована на рис. 6. График, представленный на рис. 6 а, показывает, что напряжение на неподвижной нижней стенке $\tau(0, x)$ линейно уменьшается с продольной координатой x , в то время как напряжение на движущейся верхней стенке $\tau(1, x)$ остается постоянным. Разность напряжений между стенками линейно растет с x , что является прямым следствием конвективного уноса импульса. На графике (рис. 6 б) видно, что относительное изменение напряжения на нижней стенке может достигать значительных величин (порядка 10 % и более) уже на небольшом расстоянии от входного сечения.

5. Заключение

В работе проведено аналитическое и численное исследование влияния слабых конвективных эффектов на комбинированное течение Куэтта – Пуазейля для неньютоновской жидкости, описываемой степенной моделью с произвольным индексом течения n . Методом возмущений по малому параметру $\epsilon = h/L$ получено решение в виде суперпозиции основного профиля $f(\eta)$ и поправки первого порядка $g(\eta)$, учитывающей инерцию.

Установлено, что учет инерции приводит к появлению слабой зависимости течения от продольной координаты. Конвективная поправка нарушает линейность распределения касательного напряжения, внося квадратичную компоненту, пропорциональную $f^2(\eta) - 1$. Напряжение на нижней стенке уменьшается с ростом x , а на верхней остается неизменным в первом порядке.

Воздействие конвекции на структуру течения существенно зависит от типа жидкости. Для псевдопластиков поправка в основном положительна и способствует увеличению скорости в ядре потока. Для дилатантных жидкостей в режиме с обратным течением поправка усиливает немонотонность профиля. Ньютоновская жидкость демонстрирует минимальную интегральную норму возмущения.

Конвективный перенос импульса оказывает стабилизирующее влияние, повышая критическое значение параметра Π_c , при котором возникает обратное течение. Это означает, что для наблюдения немонотонного режима в присутствии инерции требуется более высокий градиент давления по сравнению с ползущим течением.

С увеличением продольной координаты конвективные эффекты накапливаются, приводя к значительной перестройке профиля скорости и поля напряжений. Зона обратного те-

чения расширяется, а разность касательных напряжений на стенках линейно растёт. Относительное изменение напряжения на стенках может достигать десятков процентов на длине, сравнимой с несколькими высотами канала.

Полученные результаты имеют фундаментальное значение для понимания физики течений неньютоновских жидкостей при умеренных числах Рейнольдса и могут служить основой для верификации численных расчетов. Практическая ценность работы заключается в возможности более точного прогнозирования распределения скоростей и напряжений, а также сил трения в технологических аппаратах, таких как экструдеры, микроканалы или смазочные зазоры, где движение границ и перепад давления действуют совместно.

Литература

1. Middleman S. Fundamentals of Polymer Processing. – McGraw-Hill, 1977. – 525 p.
2. Wilson S. D. R. The drag-out problem in film coating theory // *Journal of Engineering Mathematics*. – 1982. – Vol. 16. – P. 209–221. – DOI: 10.1007/BF00042717.
3. Aristov S. N., Skulskiy O. I. Viscoelastic effects of blood flow in nondeformable // *Russian Journal of Biomechanics*. – 1999. – Vol. 3 (4). – P. 24–33.
4. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1. Fluid Mechanics. – 2nd ed. – Wiley, 1987. – 672 p.
5. Tanner R. I. Engineering Rheology. – 2nd ed. – OUP Oxford University Press, 2000. – 586 p.
6. Schowalter W. R. Mechanics of Non-Newtonian Fluids. – Pergamon Press, 1978. – 300 p.
7. Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких – М. ; Ижевск : РХД, 2004. – 154 с.
8. Chhabra R. P., Richardson J. F. Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications. – 1st ed. – Oxford, UK : Butterworth-Heinemann, 1999. – 436 p.
9. Vinogradov G. V., Malkin A. Y. Rheology of Polymers. Viscoelasticity and Flow of Polymers. – Springer, 1980. – 468 p.
10. Nádai A. Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter. – 4th ed. – McGraw-Hill, 1931. – 349 p.
11. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – 3rd ed. – Springer, 2004. – 602 p.
12. Denier J. P., Dabrowski P. P. On the boundary-layer equations for power-law fluids // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2004. – Vol. 460. – P. 3143–3158. – DOI: 10.1098/rspa.2004.1349.
13. Málek, J., Rajagopal, K.R., Růžička, M. Existence and regularity of solutions and the stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1995, 05 (06), 789–812. DOI: 10.1142/S0218202595000449.
14. Frigaard I. A., Ryan D. P. Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. – 2004. – Vol. 123 (1). – P. 67–83. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.06.011.
15. Chang, H.-C., Demekhin E. A. Studies in Interface Science. Vol. 14. Complex Wave Dynamics on Thin Films. – Elsevier, 2002.
16. Falling Liquid Films. Series Applied Mathematical Sciences / S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, M. G. Velarde. – London : Springer, 2012. – DOI: 10.1007/978-1-84882-367-9.
17. Yih, C.-S. Dynamics of Nonhomogeneous Fluids. – Macmillan, 1965. – 306 p.
18. Hartnett J. P., Kostic M. Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1985. – Vol. 28 (6). – P. 1147–1155. – DOI: 10.1016/0017-9310(85)90122-X.

19. The Mathematics of Finite Elements and Applications: Mafelap 1984 / ed. by J. R. Whiteman. – Academic Press, 1985. – 650 p.
20. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53 (4). – P. 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Poole R. J. The Deborah and Weissenberg numbers // Rheology Bulletin. – 2012. – 53 (2). – P. 32–39.
22. Rajagopal K. R. On boundary conditions for fluids of the differential type // Navier-Stokes equations and related nonlinear problems / ed. by A. Sequeira. – Boston, MA : Springer, 1995. – P. 273–278. – DOI: 10.1007/978-1-4899-1415-6_22.
23. Rao I. J., Rajagopal K. R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel // Acta Mechanica. – 1999. – Vol. 135. – P. 113–126. – DOI: 10.1007/BF01305747.
24. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 6. – P. 23–38. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-6/2025-6_528.html
25. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette-Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 5. – P. 6–28. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
26. Aristov S. N., Skulskii O. I. Exact solution of the problem on a six- constant Jeffreys model of fluid in a plane channel // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2002. – Vol. 43. – P. 817–822. – DOI: 10.1023/A:1020752101539.
27. Baranovskii E. S., Prosviryakov E. Yu., Ershkov S. V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104294. – DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
28. Mekheimer Kh. S., El Kot M. A. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis // Acta Mechanica Sinica. – 2008. – Vol. 24. – P. 637–644. – DOI: 10.1007/s10409-008-0185-7.
29. Baranovskii E. S. Analytical Solutions to the unsteady Poiseuille flow of a second grade fluid with slip boundary conditions // Polymers. – 2024. – Vol. 16 (2). – P. 179. – DOI: 10.3390/polym16020179.
30. Massoudi M., Phuoc T. X. Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity // Acta Mechanica. – 2001. – Vol. 150. – P. 23–37. – DOI: 10.1007/BF01178542.
31. Non-Newtonian rivulet flows on unsteady heated plane surface / S. V. Ershkov, E. S. Baranovskii, E. Yu. Prosviryakov, A. V. Yudin // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2025. – Vol. 170. – P. 104984. – DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104984.
32. Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing convective flows of multilayer fluids // Fluid Dynamics. – 2020. – Vol. 55 (6). – P. 798–809.
33. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // Symmetry. – 2023. – Vol. 15 (9). – P. 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
34. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition // Sādhanā. – 2021. – Vol. 46. – 55. – DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.

35. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21 (4). – С. 736–751. – DOI: 10.14498/vsgtu1568.
36. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2025. – Iss. 5. – P. 66–86. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
37. Sofonea M., Matei A. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*. – Springer, 2009. – 230 p.
38. Aristov S. N., Keller I. E. Beltrami stress fields in an elastic body // *Doklady Physics*. – 2016. – Vol. 61 (7). – P. 343–346. – DOI: 10.1134/S1028335816070065.
39. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck-Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. – 2021. – Vol. 37. – P. 17–30. – DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.17.
40. Exact solutions to the Navier-Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows / E. Yu. Prosviryakov, S. A. Mikhailov, O. A. Ledyankina, L. S. Goruleva // *Russian Aeronautics*. – 2023. – Vol. 66. – P. 500–509. – DOI: 10.3103/S106879982303011X.