

Received: 01.02.2024

Revised: 27.02.2024



Accepted: 26.04.2024



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019

SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO A MULTIDIMENSIONAL SINGULAR HEAT EQUATION WITH POWER NONLINEARITY

A. L. Kazakov^{a)} and L. F. Spevak^{b)}, *

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a_kazakov@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  lfs@imach.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: lfs@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 362-3022; Fax: +7 (343) 374-5330

The paper deals with the construction of exact solutions to a singular heat equation with power nonlinearity in the case of numerous independent variables with spatial (e.g. axial or central) symmetry. A new class of self-similar solutions is proposed, which reduce to solving the Cauchy problem for a second-order nonlinear ordinary differential equation having singularities at the higher derivative with respect to the required function and/or the independent variable. The ordinary differential equation is studied in two ways: analytically and numerically. The analytical study uses a truncated Taylor series with recurrently computed coefficients, for which explicit formulas are obtained. The numerical solution to the problem uses an iteration algorithm based on the collocation method and radial basis functions. The numerical analysis shows the convergence of the proposed numerical algorithm and its sufficient accuracy enabling one to use the found self-similar solutions to verify approximate solutions to the original heat equation. Besides, the numerical analysis has allowed the radius of convergence of the constructed Taylor series to be evaluated. The form of the constructed self-similar solutions, namely their unboundedness near the symmetry center (axis), enables us to study the behavior and exactness of the numerical solutions to the nonlinear singular parabolic-type equation that have been obtained by the stepwise solution method proposed by us earlier and possess the same property.

Keywords: nonlinear heat equation, exact solution, self-similar solution, ordinary differential equation, power series, collocation method, radial basis functions

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment from the Russian Ministry of Science and Higher Education, theme No. 124020600042-9.

References

1. Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics. Partial Differential Equations*: vol. 2, Interscience, New York, 1962, 830 p.
2. Evans, L. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*: vol. 19, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, 749 p.
3. Samarskii, A.A. and Gulin, A.V. *Ustoychivost raznostnykh skhem [Stability of Difference Schemes]*. Librokom Publ., Moscow, 2009, 383 p. (In Russian).
4. Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., and Mikhailov, A.P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1995, 534 p.

5. Vazquez, J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Clarendon Press, Oxford, 2007, 648 p.
6. DiBenedetto, E. *Degenerate parabolic equations*, Springer, New York, NY, 1993, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
7. Ladyženskaja, O.A., Solonnikov, V. A., and Ural'ceva, N.A. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs Ser.:* vol. 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968, 648 p.
8. Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*, CRC Press, Boca Raton, London, 2022, 382 p. DOI: 10.1201/9781003042297.
9. Kazakov, A.L. and Orlov, S.S. On some exact solutions to a nonlinear heat equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, 22 (1), 112–123. (In Russian).
10. Kazakov, A.L. and Orlov, S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, 59 (3), 427–441. DOI: 10.1134/S0037446618030060.
11. Kazakov, A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskiye Izvestiya*, 2019, 16, 1057–1068. (In Russian). DOI: 10.33048/semi.2019.16.073.
12. Kazakov, A.L., Nefedova, O.A., and Spevak, L.F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, 59 (6), 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.
13. Kudryashov, N.A. and Chmykhov, M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, 47, 107–117. DOI: 10.1134/S0965542507010113.
14. Chen, W., Fu, Zh.-J., and Chen, C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Heidelberg, Berlin, 2013, 90 p.
15. Chen, C., Karageorghis, A., and Smyrlis, Y. *The Method of Fundamental Solutions: A Meshless Method*, Dynamic Publishers, Atlanta, 2008.
16. Nardini, N. and Brebbia, C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 1983, 7 (3), 157–162. DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
17. Kazakov, A.L., Spevak, L.F. and Nefedova, O.A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, 6, 100–116. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. Available at: http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html
18. Kazakov, A.L., Spevak, L.F., Spevak, E.L. On numerical methods for constructing benchmark solutions to a nonlinear heat equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, 5, 26–44. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044. Available at: <http://dream-journal.org/issues/2020-5/2>
19. Kazakov, A.L. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type. *Symmetry*, 2021, 13 (5), 871. DOI: 10.3390/sym13050871.
20. Kazakov, A. and Lempert, A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, 10 (2), 232. DOI: 10.3390/math10020232.
21. Kazakov, A. and Spevak, L. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10 (9), 1559. DOI: 10.3390/math10091559.
22. Sidorov, A.F. *Izbrannye trudy. Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2001, 576 p. (In Russian).
23. Sedov, L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, Boca Raton, 1993, 496 p. DOI: 10.1201/9780203739730.
24. Arnold, V.L. *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press, 1978, 280 p.
25. Kozlov, V.V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person. *Russian Mathematical Surveys*, 2000, 55 (6), 1175–1192. DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.

26. Buhmann, M.D. *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 259 p. DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
27. Fornberg, B. and Flyer, N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, 24, 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130. 914000130.

Подана в журнал: 01.02.2024



УДК 517.958:519.633



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Л. Казаков^{а)}, Л. Ф. Спевак^{б)}, *

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a_kazakov@mail.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  ifs@imach.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: ifs@imach.uran.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-22; Факс: +7 (343) 374-53-30

Работа посвящена проблеме построения точных решений вырождающегося уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью в случае многих независимых переменных при наличии пространственной (например, осевой или центральной) симметрии. Предложен новый класс автомодельных решений, нахождение которых сводится к решению задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, имеющего особенности при старшей производной относительно искомой функции и/или независимой переменной. Изучение обыкновенного дифференциального уравнения проводится двумя способами: аналитическим и численным. В ходе аналитического исследования применяются отрезки рядов Тейлора с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, для которых получены явные формулы. Для численного решения задачи используется итерационный алгоритм, основанный на методе коллокаций и радиальных базисных функциях. Проведенный численный анализ показал сходимость предложенного численного алгоритма, а также его достаточную точность, позволяющую использовать найденные автомодельные решения для верификации приближенных решений исходного уравнения теплопроводности. Также численный анализ позволил оценить радиус сходимости построенных рядов Тейлора. Вид построенных автомодельных решений, а именно их неограниченность вблизи центра (оси) симметрии, дал возможность исследовать поведение и точность обладающих тем же свойством численных решений нелинейного вырождающегося уравнения параболического типа, полученных с помощью предложенного авторами ранее пошагового метода решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, точное решение, автомодельное решение, обыкновенное дифференциальное уравнение, степенной ряд, метод коллокаций, радиальные базисные функции

1. Введение

Проблема построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (ДУ с ЧП) является одной из ключевых в математической физике [1, 2]. Причина этого заключается в том, что подобные математические объекты значительно проще изучать. Это позволяет получить дополнительную информацию о содержательных нелинейных свойствах рассматриваемых постановок. Также они оказываются весьма полезными при верификации результатов численных расчетов в случаях, когда сходимость приближенного метода не доказана [3]. Особую значимость указанные обстоятельства приобретают при наличии в ДУ с ЧП вырождения.

Одним из классических уравнений математической физики, обладающих указанными свойствами, является нелинейное уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью [4], которое в зарубежной научной литературе именуется также *the porous medium equation* [5]. Это параболическое уравнение [6] второго порядка вырождается [7] на многообразии, где обращается в нуль искомая функция. Известно достаточно много точных решений для этого уравнения [8], однако они обычно относятся к плоскосимметрическому случаю и/или не обращаются в нуль. Исключением являются работы авторов [9–11], в которых получены новые классы точных решений искомого вида (вырождающихся) для случаев центральной и осевой симметрии. Полученные точные решения применялись для верификации численных расчетов, выполненных с помощью разработанных авторами эвристических приближенных методов [12].

В случае если точное решение получено в виде квадратуры, его изучение можно провести общеизвестными методами математического анализа. Более сложная картина наблюдается, когда его построение сводится к интегрированию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), которое само по себе зачастую оказывается нетривиальным математическим объектом, особенно при наличии вырождения. Здесь для получения свойств решения обычно приходится выполнять серьезное математическое исследование [13]. Одним из эффективных подходов здесь является разработка алгоритмов численного решения задач Коши для получаемых ОДУ. В случае достаточной точности алгоритмов построенные приближенные решения позволяют проводить комплексный численный анализ для изучения свойств исследуемых задач, а также построить решения исходной задачи для ДУ с ЧП, которые могут использоваться в качестве референсных решений. Отметим, что применение классических разностных методов для решения упомянутых задач Коши затруднено особенностями, которые ОДУ наследует у исходного ДУ с ЧП. В связи с этим эффективным может оказаться применение бессеточных методов, таких как метод двойственной взаимности [14], метод фундаментальных решений [15], метод коллокаций [16].

Ранее авторы численно и аналитически изучали некоторые постановки задач Коши для вырождающихся ОДУ второго порядка, возникающих при построении точных решений нелинейных параболических уравнений, имеющих вид тепловой (диффузионной) волны [17–21]. Настоящая работа является продолжением ранее проведенных исследований, рассмотрен новый вид точных решений, которые актуальны, прежде всего, в неоднородном случае.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение второго порядка (уравнение нелинейной теплопроводности со степенной нелинейностью [4], *the porous medium equation* [5], уравнение нелинейной фильтрации [22])

$$T_t = \Delta(T^\alpha), \quad (1)$$

где T – искомая функция (температура); t – время; лапласиан Δ берется по пространственным переменным x_1, \dots, x_n ; $\alpha > 1$ – константа. Заметим, что при $\alpha = 1$ имеем классическое линейное уравнение теплопроводности.

При наличии пространственной симметрии уравнение (1) путем несложных преобразований можно представить в виде

$$u_t = uu_{pp} + \frac{1}{\sigma} u_p^2 + \frac{\nu uu_p}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma = \alpha - 1 > 0$, $\nu = \mu - 1$, $u = T^\sigma$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_\mu^2}$. Появляющаяся при этом константа может быть легко убрана за счет линейной замены независимой переменной t . Наиболее содержательными здесь являются случаи плоской ($\nu = 0$), осевой ($\nu = 1$) и центральной ($\nu = 2$) симметрии; тем не менее, предстоящее исследование относится также и к случаям более высокой размерности ($\nu = 3, 4, \dots$).

3. Аналитическое построение решения

Решение уравнения (2) допускает следующее представление:

$$u = \rho w \left(\frac{t}{\rho} \right). \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в уравнение (2) и приведя подобные слагаемые, получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) вида

$$\xi^2 \left(w w'' + \frac{1}{\sigma} (w')^2 \right) - \xi \left(\frac{2}{\sigma} + \nu \right) w w' - w' + \left(\frac{1}{\sigma} + \nu \right) w^2 = 0, \quad (4)$$

где $\xi = t/\rho$. Переменную ξ в литературе обычно называют *автомодельной* [23]. Решения вида (3), строго говоря, автомодельными не являются, но отличаются от них только множителем ρ , поэтому сохраним для них данное наименование.

Для уравнения (4) рассмотрим задачу Коши стандартного вида

$$w(\xi_0) = w_0, \quad w'(\xi_0) = w_1. \quad (5)$$

В случае если $\xi_0 w_0 \neq 0$, задача Коши (4), (5) подпадает под действие классических теорем существования и единственности [24], поэтому он интереса не представляет и далее не рассматривается.

Если же $\xi_0 w_0 = 0$, то, как легко можно видеть, в уравнении (4) обращается в нуль множитель перед старшей (второй) производной. Классические теоремы тогда оказываются неприменимы. Именно этот случай и будет предметом дальнейшего изучения.

Теорема. Пусть $\xi_0 w_0 = 0$. Тогда задача (4), (5) имеет единственное решение, представимое в виде ряда Тейлора, в следующих случаях: 1) $w_0 = 0$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $w_1 = 0$; 2) $w_0 = 0$, $\xi_0 \neq 0$, $w_1 = \sigma/\xi_0^2$; 3) $w_0 \neq 0$, $\xi_0 = 0$, $w_1 = (\nu + 1/\sigma)w_0^2$. При этом в случае 1 решение тривиальное (все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю), а в случаях 2 и 3 – нетривиальное. При прочих условиях Коши задача (4), (5) решений не имеет.

Для доказательства теоремы построим решение задачи (4), (5) в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{(\xi - \xi_0)^k}{k!}, \quad w_k = \left. \frac{d^k w}{d\xi^k} \right|_{\xi=\xi_0}, \quad (6)$$

коэффициенты которого будем определять индукцией по k . При этом из условий Коши имеем, что для $k = 0, 1$ коэффициенты известны, т. е. база индукции формируется из условия теоремы. Подставив эти значения в уравнение (4), можно убедиться, что полученное соотношение будет совместно только при значениях w_1 , указанных в условии теоремы.

Дальнейшее построение проводится посредством последовательного дифференцирования уравнения (4) с последующей подстановкой найденных ранее значений. Легко убедиться, что в случае 1 имеем, что $w_0 = w_1 = w_2 = \dots = 0$, т. е. решение действительно тривиальное.

Случаи 2 и 3 необходимо рассматривать отдельно. Отметим, что линейная замена переменных $\tilde{w} = Aw$, $\tilde{\xi} = B\xi$ не меняет вид уравнения (4), если выполнено равенство $AB = 1$. Это позволяет, не теряя общности рассмотрения, принять, что $w_0 = 0$, $\xi_0 = 1$ в случае 2 и $w_0 = 1$, $\xi_0 = 0$ в случае 3.

Случай 2. Для нахождения w_2 продифференцируем уравнение (4) по ξ и положим $\xi_0 = 1$, $w_0 = 0$, $w_1 = \sigma$. Приведя подобные и разрешив выражение относительно w_2 , получим, что

$$w_2 = \frac{\nu w_1^2}{\sigma + 1} = \frac{\nu \sigma^2}{\sigma + 1} \geq 0. \quad (7)$$

И так далее. Пусть найдены $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k$. Для отыскания w_{k+1} продифференцируем уравнение (4) k раз и подставим значения, известные в силу предположения индукции. Получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k C_k^i \left(w_i w_{k+2-i} + \frac{w_{i+1} w_{k+1-i}}{\sigma} \right) + k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left(w_i w_{k+1-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-i}}{\sigma} \right) + \\ & + k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i \left(w_i w_{k-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-1-i}}{\sigma} \right) - \left(\nu + \frac{2}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k+1-i} - \\ & - \left(\nu + \frac{2}{\sigma} \right) k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i w_i w_{k-i} - w_{k+1} + \left(\nu + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k-i} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Разрешив данное соотношение относительно старшего коэффициента, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} w_{k+1} = & -\frac{1}{1+k\sigma} \left[\sum_{i=2}^k C_k^i w_i w_{k+2-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^{k-1} C_k^i w_{i+1} w_{k+1-i} + k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left(w_i w_{k+1-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-i}}{\sigma} \right) + \right. \\ & + k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i \left(w_i w_{k-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-1-i}}{\sigma} \right) - \left(\nu + \frac{2}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k+1-i} - \\ & \left. - \left(\nu + \frac{2}{\sigma} \right) k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i w_i w_{k-i} - w_{k+1} + \left(\nu + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k-i} \right], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$. Поскольку $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k$ известны в силу предположения индукции, причем $w_0 = 0$, по формуле (9) w_{k+1} определяется однозначно. При этом в случае плоской симметрии ($\nu = 0$) имеем, что $w_2 = w_3 = \dots = w_k = \dots = 0$, т. е. ряд обрывается, и решение имеет вид $w = \sigma(\xi - 1)$. При $\nu \neq 0$ подобного эффекта не наблюдается.

Случай 3. Аналогично предыдущему случаю имеем, что

$$\begin{aligned} w_1 = \nu + \frac{1}{\sigma} > 0, \quad w_2 = \nu \left(\nu + \frac{1}{\sigma} \right) \geq 0, \quad w_3 = 2\nu \left(\nu + \frac{1}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right), \\ w_4 = \left(6 - \nu - \frac{4}{\sigma} \right) w_0 w_3 + 3(2 - \nu) w_1 w_2 = \nu \left(\nu + \frac{1}{\sigma} \right) \left(12 + 4\nu - 3\nu^2 - \frac{14 + \nu}{\sigma} + \frac{8}{\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_{k+1} = \sum_{i=2}^k C_k^i \left[(k-i)(k-i-1) + \left(\frac{i-2}{\sigma} - \nu \right) (k-i) + \nu + \frac{1}{\sigma} \right] w_i w_{k-i}, \quad k = 4, 5, \dots$$

Как и в случае 2, по формуле (10) w_{k+1} определяется однозначно; при $\nu = 0$ ряд обрывается и решение имеет вид $w = \xi/\sigma + 1$.

Таким образом, во всех допустимых случаях ряд (6) построен. Теорема доказана.

Замечание 1. Вопрос о сходимости построенных рядов требует дополнительного изучения, которое является сложной самостоятельной задачей, выходящей за рамки настоящей статьи. Тем не менее, выскажем предположение о том, что в случае 2 ряд (5) будет локально сходиться при любых допустимых начальных данных, а в случае 3 при некоторых значениях входных параметров возможна его расходимость.

Замечание 2. Решение (4), (5) в случае 2 позволяет построить автомодельное решение уравнения (2), имеющее тип *тепловой волны*, следующего вида:

$$u = \begin{cases} 0, & \rho \geq t/\xi_0; \\ \rho w(t/\rho), & \rho \leq t/\xi_0. \end{cases} \quad (11)$$

Исходя из физических соображений, здесь предполагается, что $\xi_0 > 0$.

Замечание 3. Решение (4), (5) в случае 3 позволяет построить автомодельное решение уравнения (2) $u = \rho w(t/\rho)$, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = w_0 \rho$. Известен пример С. В. Ковалевской [25], который показывает, что задача с начальными данными для уравнения теплопроводности может иметь формальное решение в виде ряда Тейлора, который, однако, расходится всюду, за исключением момента времени $t = 0$. Аналогичные результаты были получены для нелинейного уравнения в плоскосимметричном случае в работе одного из авторов [19].

Замечание 4. Если $\nu = 0$ (плоская симметрия), обрыв ряда приводит к линейному решению уравнения (2). В случае 2 оно имеет вид $u = \sigma t - \sigma \rho$; в случае 3: $u = t/\sigma + \rho$.

4. Численный анализ

Решения задачи (4), (5) в случае 2 могут быть использованы в качестве теста для численных алгоритмов решения уравнения (2) с краевым условием, задающим движение фронта тепловой волны:

$$u|_{\rho=t/\xi_0} = 0. \quad (12)$$

Чтобы построить нетривиальное решение задачи (2), (12) (соответствующее второй строке в правой части уравнения (11)) в момент времени $t > 0$, нужно найти решение задачи (4), (5) на отрезке $\xi \in [\xi_0 + \infty)$. Отметим, что при $\nu > 0$ уравнение (2) имеет особенность в точке $\rho = 0$, соответствующей бесконечно большому значению ξ , поэтому его численное решение в момент времени t можно построить лишь на отрезке $\rho \in [\rho^{(t)}, t/\xi_0]$, где $\rho^{(t)} > 0$ – некоторое близкое к нулю число. С учетом этого для построения решения задачи (2), (12) на интервале $t \in [0, T]$ в области $\rho \geq \rho_0 > 0$ требуется найти решение задачи (4), (5) на отрезке $\xi \in [\xi_0, T/\rho_0]$.

Численное решение задачи (4), (5) будем строить итерационно, с использованием метода коллокаций [14] и радиальных базисных функций (РБФ) [26, 27]. Для этого представим задачу в следующем виде:

$$w'' = F(\xi, w, w'), \quad (13)$$

$$w(\xi_0) = 0, \quad w'(\xi_0) = \frac{\sigma}{\xi_0^2}. \quad (14)$$

$$\text{Здесь } F(\xi, w, w') = \frac{1}{w} \left(\frac{w'}{\xi^2} - \frac{(w')^2}{\sigma} \right) + \frac{1}{\xi} \left(\frac{2}{\sigma} + \nu \right) w' - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{1}{\sigma} + \nu \right) w.$$

Итерационные алгоритмы решения задач, подобных (13), (14), были подробно описаны в наших работах [17, 18, 21]. Поэтому изложим вычислительную процедуру кратко. Решение задачи (13), (14) на отрезке $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$ будем искать в виде $w(\xi) = p(\xi) + h(\xi)$, где $p(\xi)$ – частное решение уравнения (13), $h(\xi)$ – решение соответствующей задачи для однородного уравнения:

$$h'' = 0, \quad h(\xi_0) = -p(\xi_0), \quad h'(\xi_0) = \frac{\sigma}{\xi_0^2} - p'(\xi_0). \quad (15)$$

Итерационный процесс имеет вид:

$$p_{(0)} \equiv 0, \quad (16)$$

$$h_{(n)} = \left(\frac{\sigma}{\xi_0^2} - (p'_{(n)})(\xi_0) \right) (\xi - \xi_0) - p_{(n)}(\xi_0), \quad (17)$$

$$w_{(n)}(\xi) = p_{(n)}(\xi) + h_{(n)}(\xi), \quad (18)$$

$$p'_{(n+1)} = F(\xi, w_{(n)}, w'_{(n)}). \quad (19)$$

Здесь $w_{(n)}$, $p_{(n)}$, $h_{(n)}$ – n -е итерации решений. Уравнение (19) решается методом коллокаций с использованием РБФ [14, 21]. Итерационный процесс (16) – (19) останавливается, когда при заданном параметре $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\left| \frac{w_{(n+1)}(\xi_1) - w_{(n)}(\xi_1)}{w_{(n)}(\xi_1)} \right| < \varepsilon. \quad (20)$$

Прежде чем перейти к описанию результатов расчетов, отметим, что при $\nu = 0$ процедура (15)–(19) уже на первой итерации приводила к линейному точному решению (см. Замечание 4).

Задача (13), (14) была решена с помощью алгоритма (16) – (20) при $\sigma = 2$, $\xi_0 = 1$ и различных значениях параметров ν , ξ_1 и числа точек коллокации M , используемых при решении уравнения (19) и расположенных на отрезке $[\xi_0, \xi_1]$. Оценка точности расчетов производилась с помощью невязки уравнения (4) при подстановке полученных численных решений:

$$\delta(w) = \max_{\xi \in [\xi_0, \xi_1]} \left| \xi^2 \left(w w'' + \frac{(w')^2}{\sigma} \right) - \xi \left(\frac{2}{\sigma} + \nu \right) w w' - w' + \left(\frac{1}{\sigma} + \nu \right) w^2 \right|. \quad (21)$$

Приведенные в табл. 1 значения невязок позволяют сделать следующие выводы. Предложенный алгоритм сходится относительно числа точек коллокации. Увеличение ξ_1 , т. е. увеличение интервала времени, на котором нужно построить решение задачи (2), (12), приводит к снижению точности решения и требует увеличения числа точек коллокации.

Таблица 1

Невязки уравнения (4) для численных решений

v	ξ_1	M	$\delta(w)$	v	ξ_1	M	$\delta(w)$
1	2	10	$3,8 \cdot 10^{-5}$	2	2	10	$4,4 \cdot 10^{-5}$
		20	$9,5 \cdot 10^{-7}$			20	$1,1 \cdot 10^{-6}$
		50	$1,8 \cdot 10^{-7}$			50	$5,3 \cdot 10^{-7}$
	5	10	$3,4 \cdot 10^{-2}$		5	10	$5,4 \cdot 10^{-2}$
		20	$1,7 \cdot 10^{-4}$			20	$5,1 \cdot 10^{-4}$
		50	$4,8 \cdot 10^{-6}$			50	$4,1 \cdot 10^{-5}$
	8	20	$1,4 \cdot 10^{-2}$		8	20	$1,1 \cdot 10^{-2}$
		50	$2,6 \cdot 10^{-4}$			50	$2,3 \cdot 10^{-4}$
		100	$9,2 \cdot 10^{-5}$			100	$1,2 \cdot 10^{-4}$

Аналогичная оценка точности была проведена для отрезков ряда (6),

$$w^{(n)} = \sum_{k=0}^n w_k \frac{(\xi - \xi_0)^k}{k!}, \tag{22}$$

построенных в соответствии с доказательством теоремы. Невязки уравнения (4) при $\sigma = 2$, $\xi_0 = 1$ и различных значениях параметров v , ξ_1 и степени отрезка ряда n приведены в табл. 2. Отметим, что если для численного решения значение ξ_1 является параметром итерационного алгоритма (для разных ξ_1 мы имеем разные решения), то при оценке точности решения (22) ξ_1 лишь задает отрезок, на котором мы оцениваем невязку (см. (21)). Приведенные в табл. 2 результаты дают основания полагать, что в обоих рассмотренных случаях ряд (6) имеет радиус сходимости не менее 1/2. Приведенные данные также показывают, что область сходимости рядов ограничена и невелика, в связи с чем использовать отрезки рядов (22) для построения решений задачи (2), (12) можно лишь на небольшом интервале времени.

Таблица 2

Невязки уравнения (4) для решений в виде отрезков рядов

v	ξ_1	n	$\delta(w)$	v	ξ_1	n	$\delta(w)$
1	1,3	10	$3,4 \cdot 10^{-4}$	2	1,3	10	$7,2 \cdot 10^{-4}$
		20	$3,1 \cdot 10^{-8}$			20	$1,6 \cdot 10^{-7}$
		30	$2,1 \cdot 10^{-12}$			30	$2,5 \cdot 10^{-11}$
	1,5	10	$6,8 \cdot 10^{-2}$		1,5	10	$1,4 \cdot 10^{-1}$
		20	$1,0 \cdot 10^{-3}$			20	$5,2 \cdot 10^{-3}$
		30	$1,1 \cdot 10^{-5}$			30	$1,4 \cdot 10^{-4}$
	1,7	10	2,2		1,6	10	$9,6 \cdot 10^{-1}$
		20	$9,5 \cdot 10^{-1}$			20	$2,2 \cdot 10^{-1}$
		30	$3,0 \cdot 10^{-1}$			30	$3,6 \cdot 10^{-2}$
	1,9	10	$3,1 \cdot 10^1$		1,8	10	$2,1 \cdot 10^1$
		20	$1,5 \cdot 10^2$			20	$8,4 \cdot 10^1$
		30	$6,8 \cdot 10^2$			30	$2,4 \cdot 10^2$

Автомодельные решения уравнения (2), полученные по формуле (11) из найденных решений задачи (13), (14), были сопоставлены с решениями задачи (2), (12) с помощью пошагового алгоритма, представленного в работах [17, 21]. На рис. 1 показано сравнение полученных решений при $\sigma = 2, \nu = 1, \xi_0 = 1$ в четыре момента времени.

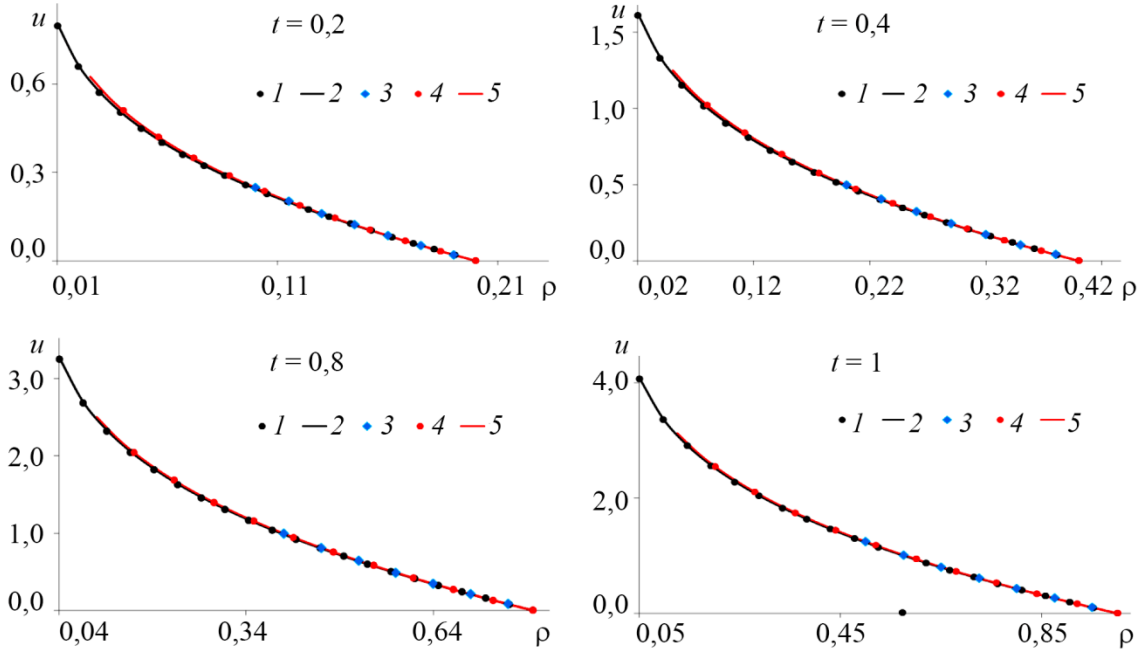


Рис. 1. Сравнение численных и точных решений задачи (2), (12): 1 – пошаговое численное решение с шагом $h = 0,1$; 2 – пошаговое численное решение с шагом $h = 0,05$; 3 – автомодельное решение при $\xi_1 = 2$; 4 – автомодельное решение при $\xi_1 = 5$; 5 – автомодельное решение при $\xi_1 = 8$

Прокомментируем подробно графики, соответствующие моменту $t = 0,2$.

Поскольку решение задачи (2), (12) в каждый момент времени неограниченно возрастает при $\rho \rightarrow 0$, при реализации пошагового алгоритма на каждом шаге $t = t_k$ нужно было задать область решения, не содержащую нулевое значение переменной ρ . Нами в качестве такой области был принят отрезок $\rho \in [0,05t_k, t_k]$, поскольку нулевой фронт в рассматриваемом случае имеет вид $\rho = t$. Таким образом, пошаговые решения (графики 1 и 2) определены при $t = 0,2$ на отрезке $\rho \in [0,01, 0,2]$.

Напомним, что решение задачи (2), (12) (его ненулевая часть), найденное по формуле (11) из решения задачи (13), (14) при заданном значении ξ_1 , в каждый момент времени t имеет смысл на отрезке $\rho \in [t/\xi_1, t]$. Следовательно, при $t = 0,2$ график 3 определен для $\rho \in [0,1, 0,2]$, график 4 – для $\rho \in [0,04, 0,2]$, график 5 – для $\rho \in [0,025, 0,2]$.

В остальные моменты времени области определения приведенных графиков аналогичны.

Проиллюстрированные на рис. 1 результаты расчетов можно интерпретировать следующим образом. Сходимость пошагового алгоритма решения задачи (2), (12) подтверждена для рассматриваемого случая, когда на каждом шаге $t = t_k$, по сути, требуется найти решение в открытой области $\rho \in (0, t_k]$. Автомодельные решения, построенные с помощью численного решения задачи (13), (14) при различных значениях параметра ξ_1 , близки в общей части области определения. Это говорит о стабильности использованного алгоритма. Кроме этого, можно сделать вывод, что, несмотря на снижение точности решения задачи (13), (14) с ростом ξ_1 (см. табл. 1), полученные даже при достаточно больших значениях ξ_1 автомодельные решения могут быть использованы для тестирования методов приближенного решения зада-

чи (2), (12). При этом чем больше ξ_1 , тем в большей области можно провести верификацию приближенного решения.

5. Заключение

В статье исследован новый класс автомодельных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью (*the porous medium equation*). Показано, что при наличии пространственной симметрии построение таких решений можно свести к интегрированию ОДУ второго порядка. Наибольший интерес представляют те решения ОДУ, которые соответствуют случаю, когда зануляется множитель перед старшей (второй) производной. Это происходит, если в нуль обращается автомодельная переменная и/или искомая функция. Тогда классические теоремы существования и единственности оказываются неприменимыми, и требуется специальное исследование, которое проводилось двумя способами: во-первых, аналитически, с использованием представления решения в виде Ряда Тейлора с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, для которых в некоторых случаях получены приближенные оценки радиусов сходимости; во-вторых, численно, с помощью алгоритма, основанного на методе коллокаций и радиальных базисных функций. Численный анализ показал достаточную точность предложенного алгоритма решения ОДУ, что позволяет использовать полученные решения для построения автомодельных решений исходного уравнения теплопроводности, которые, в свою очередь, могут служить для верификации приближенных решений типа тепловой волны, в частности, с помощью разработанного авторами ранее пошагового метода.

Таким образом, построенные решения ОДУ интерпретированы с точки зрения исходного уравнения в частных производных. Показано, что в одном из рассмотренных случаев их можно использовать для построения тепловой волны, которая распространяется по нулевому фону с конечной скоростью.

Особо следует отметить, что найденные автомодельные решения в неодномерных случаях имеют существенное отличие от полученных авторами ранее точных решений нелинейного уравнения теплопроводности, а именно: они неограниченно возрастают вблизи центра (оси) симметрии. С помощью этих решений авторам впервые удалось верифицировать предложенный ими пошаговый алгоритм численного решения для подобного случая, когда в каждый момент времени нетривиальное решение определено в открытой пространственной области.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема № 124020600042-9).

Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными / пер. с англ. Т. Д. Вентцель. – М. : Мир, 1964. – 832 с.
2. Evans L. Partial Differential Equations. Vol. 19 : Graduate Studies in Mathematics. – 2nd ed. – Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2010. – 749 p.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. – М. : Либроком, 2009. – 383 с.
4. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
5. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p.

6. DiBenedetto E. Degenerate parabolic equations. – New York : Springer–Verlag, 1993. – 388 p.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.
8. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. – Boca Raton, London : CRC Press, 2022. – 382 p. – DOI: 10.1201/9781003042297.
9. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 112–123.
10. Казаков А. Л., Орлов С. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сибирский математический журнал. – 2018. – Т. 59, № 3. – С. 544–560. – DOI: 10.17377/smzh.2018.59.306.
11. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073.
12. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 6. – С. 1047–1062. – DOI: 10.1134/S0044466919060085.
13. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.
14. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. – 90 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
15. The method of fundamental solutions: a meshless method / ed. by C. S. Chen, A. Karageorghis, Y. S. Smyrlis. – Atlanta : Dynamic Publishers, 2008.
16. Nardini N., Brebbia C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // Applied Mathematical Modelling. – 1983. – Vol. 7, iss. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
17. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html
18. Kazakov A. L., Spevak L. F., Spevak E. L. On numerical methods for constructing benchmark solutions to a nonlinear heat equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 5. – P. 26–44. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044. – URL: <http://dream-journal.org/issues/2020-5/2>
19. Kazakov A. L. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 871. – DOI:10.3390/sym13050871.
20. Kazakov A. L., Lempert A. A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – 232. – DOI: 10.3390/math10020232.
21. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusionwave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.
22. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
23. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
24. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : МЦНМО, 2018. – 344 с.

25. Kozlov V. V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person // *Russian Mathematical Surveys*. – 2000. – Vol. 55, iss. 6. – P. 1175–1192. – DOI: <https://doi.org/10.1070/rm2000v055n06ABEH000353>
26. Buhmann M. D. *Radial Basis Functions*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 259 p. – DOI: [10.1017/CBO9780511543241](https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241).
27. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica*. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: [10.1017/S0962492914000130](https://doi.org/10.1017/S0962492914000130).