

Received: 20.02.2023

Revised: 17.04.2023

Accepted: 28.04.2023

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.019-040

APPLYING THE METHOD OF VIRTUAL ELEMENTS TO SOLVING CONTACT PROBLEMS OF SHELLS OF REVOLUTION INTERACTING WITH SURFACES OF INCONSISTENT SHAPE

I. G. Emelyanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  emelyanov@imach.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: emelyanov@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

Tel.: +7 (343) 362-3018; fax: +7 (343) 347-5330

An approach based on the method of virtual elements is used to solve the contact problem for a thin shell of revolution lying on a rigid foundation. In this case, the surface of the base has a shape inconsistent with the surface of the shell. The method makes it possible to determine the contact area and the contact pressure from the contact area unknown in two coordinate directions. Since the contact area is not known in advance, the problem is structurally nonlinear. A thin isotropic shell is described by the classical theory based on the Kirchhoff–Love hypotheses. The base is taken absolutely rigid, but with the presence of an elastic gasket. The shell equations are integrated by S. K. Godunov’s method of discrete orthogonalization. To determine the forces of interaction between the shell and the base, a mixed method of structural mechanics is used. With this aim in view, the maximum possible contact area is discretized by virtual rectangular elements. A constant value of the contact pressure is assumed on each element obtained in this area, and the contact pressure is assumed to be zero on the elements in the area where the shell leaves the base. Based on the assumptions, a system of linear algebraic equations is constructed, which determines the contact pressure and deflection of the shell circumference axis. Since the shell can move away from the base, iterative procedures are applied to search for the real contact area, which depends on the geometric and elastic parameters of the shell and the magnitude of the external load. As an example, the contact interaction of a cylindrical shell (part of the shell of a tank car) lying on a rigid base with a gasket is considered. It is shown how the contact area and contact pressure change depending on the rigidity of the gasket and the difference between the radii of the shell and the base (inconsistency in the shape of the surfaces).

Keywords: contact problem, shell of revolution, contact pressure, Fredholm equation, Green’s function, regularization parameter, virtual element, mixed structural mechanics method, Godunov’s discrete orthogonalization method.

Acknowledgment

The study was carried out in accordance with state assignment No. AAAA-A18-118020790140-5 for the IES UB RAS.

References

1. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., eds. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Mechanics of Contact Interactions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 672 p. (In Russian).

2. Johnson K.L. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985, 452 p.
3. Bourago N.G., Kukudzhinov V.N. A review of contact algorithms. *Mech. Solids*, 2005, 40 (1), 35–71.
4. Kikuchi N., Oden J.T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia, 1988, 485 p.
5. Aliabadi M.H. and Brebbia C.A., eds. *Computational Methods in Contact Mechanics*, Southampton, Boston, Computational Mechanics Publ., Cop., 1993, 352 p.
6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, 92, 156–171.
7. Shtaerman I.Ya. *Kontaktная zadacha teorii uprugosti* [Contact Problem of the Theory of Elasticity]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, 270 p. (In Russian).
8. Grigolyuk E.I. and Tolkachev V.M. *Contact Problems in the Theory of Plates and Shells*. Moscow, Mir Publ., 1987, 424 p.
9. Kantor B.Ya. *Kontaktnye zadachi nelineinoi teorii obolochek vrashcheniya* [Contact Problems for Nonlinear Theory of Revolving Shells]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1990, 136 p. (In Russian).
10. Artyukhin Yu.P., Malkin S.A. *Analiticheskie i chislennye metody integralnykh uravneniy v zadachakh uprugogo vozdeistviya tel* [Analytical and Numerical Methods for Solving Integral Equations in Problems of Elastic Action of Bodies]. Kazan, Kazanskiy Gos. Un-t Publ., 2007, 292 p. (In Russian).
11. Lukasevich S. *Lokalnye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local Loads in Plates and Shells]. Moscow, Mir Publ., 1982, 544 p. (In Russian).
12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of Solving Ill-Posed Problems], 2nd edition, Moscow, Nauka Publ., 285 p. (In Russian).
13. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, 518 p. DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0.
14. Podgornyy A.N., Gontarovskiy P.P., Kirkach B.N., Matyukhin Yu.I., Khavin G.L. *Zadachi kontaktного vzaimodeystviya elementov konstruksiy* [The Tasks of Contact Interaction of a Construction Elements]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989, 232 p. (In Russian).
15. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Emel'yanov I.G. et al. *Statika elementov konstruksiy* [Statics of Structural Members. Vol. 8 of the 12-Volume Series Mechanics of Composites]. Kiev, A.S.K. Publ., 1999. (In Russian).
16. Emel'yanov I.G. Numerical analysis of contact interaction of cylindrical shells. *Soviet Applied Mechanics*, 1987, 23, 569–573. DOI: 10.1007/BF00887024.
17. Emelyanov I.G. A study of contact interaction of two-layer shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, 37, 129–134. DOI: 10.1007/BF02369412.
18. Emelyanov I.G. Contact interaction of shells of revolution over unknown two-dimensional regions. *International Applied Mechanics*, 1997, 33, 548–555. DOI: 10.1007/BF02700735.
19. Emelyanov I.G. Investigation into the contact interaction between shell and base with notches. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, 44, 263–270. DOI: 10.3103/S1052618815030048.
20. Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V. Application of virtual elements for determination of stress state of rotational shells. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, 7 (3), 245–252. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.24. (In Russian).
21. Emelyanov I.G. Application of discrete Fourier series to the stress analysis of shell structures. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, 8 (3), 245–253. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20. (In Russian).

22. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. *Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti* [Theory of Shells of Variable Stiffness. Vol. 4. Methods of Shell Design]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1981, 544 p. (In Russian).
23. Godunov S.K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, 16, 3 (99), 171–174. (In Russian).
24. Timoshenko S., Gere J. *Mechanics of Materials*, 2nd ed., Monterey (Calif.), Brooks/Cole engineering div., 1984, 762 p.
25. Mossakovsky V.I., Hudramovych V.S., and Makeev E.M. *Kontaktnoe vzaimodeiostvie elementov obolocheknykh konstruktsiy* [Contact Interactions of Elements of Shell Structures]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, 288 p. (In Russian).
26. Petrovsky I. G. *Leksii po teorii integralnykh uravneniy* [Lectures on the Theory of Integral Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1965, 128 p. (In Russian).
27. Gallagher R.H. *Finite Element Analysis: Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975, 420 p.
28. Rabinovich I.M. *Voprosy teorii staticheskogo rascheta sooruzheniy s odносторонnimi svyazyami* [Problems in the Theory of Static Calculation of Structures with One-Way Communications]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1975, 144 p. (In Russian).

Подана в журнал: 20.02.2023

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.019-040

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПОВЕРХНОСТЯМИ НЕСОГЛАСОВАННОЙ ФОРМЫ

И. Г. Емельянов

*Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  emelyanov@imach.uran.ru

* Ответственный автор. Эл. почта: emelyanov@imach.uran.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-18; факс: +7 (343) 347-53-30

В работе подход, основанный на методе виртуальных элементов, используется для решения контактной задачи для тонкой оболочки вращения, лежащей на жестком основании. При этом поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму. Метод позволяет определить область контакта и контактное давление по неизвестной по двум координатным направлениям области контакта. Поскольку область контакта заранее неизвестна, то задача является конструкционно нелинейной. Тонкая изотропная оболочка описывается классической теорией, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Основание принимается абсолютно жестким, но с наличием упругой прокладки. Интегрирование уравнений оболочки осуществляется с использованием метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова. Для определения усилий взаимодействия между оболочкой и основанием используется смешанный метод строительной механики. Для этого проводится дискретизация максимально возможной области контакта виртуальными прямоугольными элементами. На каждом полученном элементе в данной области принимается постоянное значение контактного давления, а на элементах в области отхода оболочки от основания контактное давление принимается равным нулю. На основе принятых допущений построена система линейных алгебраических уравнений, которая определяет контактное давление и прогиб оси окружности оболочки. Поскольку возможен отход оболочки от основания, то затем применяются итерационные процедуры поиска реальной области контакта, которая зависит от геометрических и упругих параметров оболочки и величины внешней нагрузки. В качестве примера рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки (часть обечайки вагона-цистерны), лежащей на жестком основании с прокладкой. Показано, как изменяются область контакта и контактное давление в зависимости от жесткости прокладки и разности радиусов оболочки и основания (несогласованности формы поверхностей).

Ключевые слова: контактная задача, оболочка вращения, контактное давление, уравнение Фредгольма, функция Грина, параметр регуляризации, виртуальный элемент, смешанный метод строительной механики, метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова.

1. Введение

Задачи об оценке напряженного состояния контактирующих элементов конструкций, а также задачи о плотности их соединений (т. е. задачи с односторонним механическим взаимодействием между элементами конструкций) обычно называют контактными задачами.

Контактные задачи механики деформируемого твердого тела обычно содержат граничные условия в виде неравенств, которые определяют области взаимодействующих тел, и возможные граничные сингулярности. Эти граничные условия выражают условия непроникновения: третий закон Ньютона о равенстве действия и противодействия и закон поверхностного трения.

Прикладное значение контактных задач трудно переоценить, поскольку любая конструкция обычно представляет собой совокупность элементов, каким-либо образом закрепленных в пространстве и контактирующих при эксплуатации. Достаточно часто области контакта и распределение контактного давления между элементами заранее неизвестны. При этом экспериментальными методами распределение контактной нагрузки точно определить достаточно трудно.

Литературу по различным постановкам контактных задач механики деформируемого твердого тела (в дифференциальной, интегральной и вариационной форме) можно найти, например, в работах [1, 2], а по контактными алгоритмам – в [3, 4, 5].

Впервые задача о контакте упругих тел, первоначально соприкасавшихся в точке, была поставлена и решена Генрихом Герцем [6]. С появлением этой работы начала формироваться область механики деформируемого твердого тела – механика контактного взаимодействия. Теория Герца базируется на допущении малости области контакта по сравнению с размерами контактирующих тел. Такое допущение позволило воспользоваться фундаментальным решением для полупространства при построении ядер интегральных уравнений. Классические решения Герца показывают, что наибольшее давление тело испытывает в середине области контакта для переменных областей, а для постоянных областей имеют место на границе неограниченные контактные напряжения [7]. Это обусловлено сингулярностью ядер исходных интегральных уравнений.

Контактные задачи для оболочек имеют свои специфические особенности по сравнению с аналогичными задачами для толстостенных конструкций [8, 9, 10]. Для пластин и оболочек характерно моментное напряженное состояние, которое вызывает поперечные деформации и обжатие. Однако при использовании гипотез Кирхгофа–Лява эти факторы не учитываются. Интегральные уравнения в рамках этих гипотез, определяющие одномерное контактное давление q для тонкостенного элемента, обычно сводятся к уравнениям Фредгольма первого рода [9]:

$$\int_{\omega} G(x, \xi) q(\xi) d\omega = g(x), \quad (1)$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина, определяющая прогиб в точке x при действии в точке ξ сосредоточенной силы, нормальной к поверхности оболочки; ω – область контакта; $g(x)$ – выражение, описывающее форму поверхности основания и перемещение основания как твердого тела.

Для двумерного случая, например для пластины, интегральное уравнение (1) примет вид [11]

$$\int_{\omega} G(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\omega = g(x, y), \quad (2)$$

где функция Грина определяет прогиб в точке с координатами x, y от силы с координатами $x = \xi, y = \eta$.

Если интегральное уравнение (1) получено в рамках гипотез Кирхгофа–Лява, то оно имеет лишь обобщенное решение. Контактная реакция представляет собой сосредоточенные на границе области контакта силы, поэтому уравнение (1) является некорректным.

Контактную задачу теории оболочек можно сделать математически корректной методами регуляризации, сущность которых заключается в переходе от уравнений Фредгольма первого рода (1) к уравнениям Фредгольма второго рода:

$$Rq(x) + \int_{\omega} G(x, \xi)q(\xi)d\omega = g(x), \quad (3)$$

где R – параметр регуляризации [9, 12].

В контактных задачах получили распространение методы физической регуляризации [9]. Они основаны на уточнении физической постановки задачи. Один из них заключается в том, что в зоне контакта вводится упругий слой, учитывающий реальные свойства микрогеометрии контактирующих поверхностей. Параметр регуляризации определяется экспериментально и характеризует свойства поверхностей.

Другой метод физической регуляризации основан на учете в зоне контакта обжатия оболочки по толщине, которым классическая теория пренебрегает. При этом коэффициент регуляризации имеет другой физический смысл. Учет изменения расстояния между срединной и внешней поверхностями оболочки под действием контактного давления вносит необходимый вклад в интегральное уравнение и приводит его к уравнению Фредгольма второго рода.

Из (1) и (3) видно, что данные уравнения описывают контактные задачи только при жестком нагружении, нагрузка задается через перемещения $g(x)$. С учетом уравнений (2) и (3) записываются интегральные уравнения Фредгольма второго рода для двумерных контактных задач.

В прикладных задачах, когда тела имеют произвольные формы и различные граничные условия, ядро интегрального уравнения, являющееся функцией Грина, трудно определить. Поэтому для решения контактных задач стали широко использоваться численные методы: метод конечных элементов [4, 13, 14], метод граничных элементов [10], метод дискретной ортогонализации [9, 15].

В общем случае контакт оболочки может происходить как по согласованной, так и по несогласованной поверхности. Контакт называется согласованным, если поверхности обоих тел в недеформированном состоянии точно «подогнаны» друг к другу. Тела, имеющие различные по форме профили, называются несогласованными [2]. Известно, что тела несогласованной формы первоначально вступают в контакт в точке или по линии. Под действием внешней нагрузки они деформируются в окрестности точки начального контакта и приходят в соприкосновение по некоторой конечной области.

В данной работе предлагается подход, основанный на методе виртуальных элементов, использовать при решении контактной задачи для тонкой цилиндрической оболочки, лежащей на жестком основании. При этом поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму.

Впервые метод виртуальных (вначале использовался термин «контактных») элементов был предложен для решения одномерных контактных задач, в которых область контакта неизвестна по одному координатному направлению [16]. Затем метод был обобщен для решения двумерных контактных задач, в которых область контакта неизвестна по двум координатным направлениям [15, 17, 18, 19]. В работе [20, 21] для решения контактных задач было предложено использовать термин «виртуальный элемент».

Устойчивость и сходимость метода, а также сопоставление результатов исследования задачи предложенным методом с результатами исследований другими аналитическими и численными методами в данной работе не обсуждаются, поскольку в работах [15–21] и др. этому вопросу уделено значительное внимание, и доказана устойчивость и сходимость метода.

Применение метода виртуальных элементов в данной работе позволило определить область контакта и распределение контактного давления для оболочек, взаимодействующих по несогласованной поверхности контакта. При этом несогласованные поверхности контактирующих тел могут иметь первоначальные зазоры произвольной формы, т. е. поверхности могут быть топографически негладкими. В работе область контакта определяется по двум координатным направлениям. Также в работе проведена аналогия между интегральными уравнениями Фредгольма второго рода и разрешающими уравнениями метода виртуальных элементов для одномерных контактных задач.

2. Постановка задачи и метод виртуальных элементов

Рассмотрим задачу для тонкой изотропной цилиндрической оболочки, лежащей на жестком основании шириной b . Задача состоит в определении контактного давления по неизвестной области контакта ω и, при необходимости, напряженного состояния рассматриваемой оболочки. Такая область контакта ω , например, будет образовываться между цилиндрической оболочкой с внешним радиусом R_2 , нагруженной внешней распределенной силой p , и основанием с радиусом R_1 (рис. 1). При $R_1 \neq R_2$ поверхность основания имеет несогласованную с поверхностью оболочки форму, т. е. имеется зазор в недеформированном состоянии. Однако даже при $R_1 = R_2$ область контакта может быть неизвестна, поскольку при различных жесткостных параметрах взаимодействующих тел и видах внешней силы p возможны зоны отхода оболочки от основания.

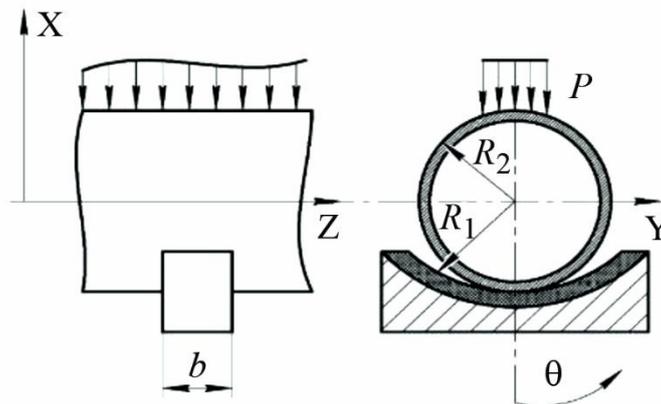


Рис. 1. Оболочка вращения, лежащая на основании с шириной b

Координатную поверхность оболочки вращения отнесем к криволинейной ортогональной системе s и θ , где s – длина дуги меридиана (для цилиндрической оболочки $s = z$), θ – центральный угол в параллельном круге (рис. 2)

Система равновесия для контактирующей оболочки имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\bar{Y} &= \bar{f} + q\lambda\Lambda \\ \lambda(s, \theta \in \omega) &= 1, \\ \lambda(s, \theta \notin \omega) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где \mathfrak{Z} – матричный дифференциальный оператор; \bar{Y} – вектор разрешающих функций; \bar{f} – вектор внешней нагрузки; Λ – столбец, элемент которого, отвечающий уравнению равновесия в проекции на нормаль к поверхности, равен единице, а остальные элементы – нулю; q – контактная нагрузка, действующая по нормали.

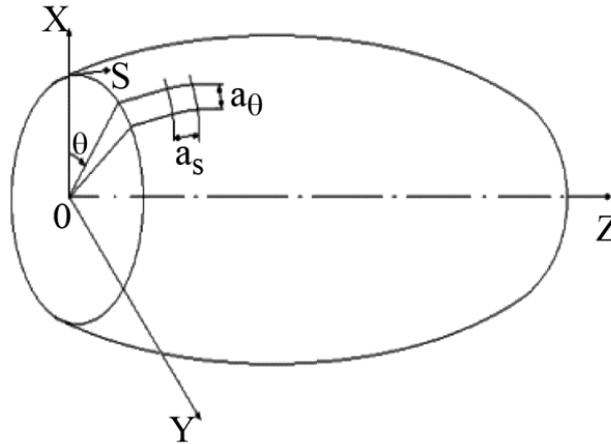


Рис. 2. Координатная поверхность оболочки вращения в криволинейной ортогональной системе s и θ

Для описания тонкой оболочки вращения воспользуемся классической теорией, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Тогда задача определения напряженно-деформированного состояния оболочки с параметрами, переменными вдоль образующей, будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [15, 22]:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s, \theta) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta), \quad (5)$$

$$\bar{Y} = \{N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s\},$$

где N_r, N_z – радиальное и осевое усилия; u_r, u_z – аналогичные перемещения; \hat{S} – сдвигающее усилие; M_s – меридиональный изгибающий момент; v – окружное перемещение; ϑ_s – угол поворота нормали. Элементы матрицы A_m зависят от геометрических и механических характеристик оболочки.

Учитывая уравнения (3) и (4), можно записать [19]:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s, \theta) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta) + \lambda E \bar{q}(s, \theta), \quad (6)$$

$$\bar{q} = \{q, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T,$$

где E – единичная матрица.

Таким образом, система (6) описывает напряженно-деформированное состояние оболочки вращения, на которую действуют внешние силы \bar{f} и контактное давление. Однако проинтегрировать систему (6) нет возможности, поскольку неизвестны область контакта ω и закон распределения контактного давления по ней $q(s, \theta)$.

Для определения $q(s, \theta)$ будем использовать метод виртуальных элементов. Известно, что все многообразие внешних силовых воздействий на оболочку \bar{f} в системе (5) можно представить в виде компонентов распределенной нагрузки: касательной к образующей g_s , касательной к направляющей g_θ , нормальной к поверхности оболочки g_r . Эти компоненты можно представить в виде разложения [22]:

$$g_s = \sum_{k=0}^{\infty} g_s(s) \cos k\theta, \quad g_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} g_\theta(s) \sin k\theta, \quad g_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} g_\gamma(s) \cos k\theta, \quad (7)$$

где k – номер гармоники.

В силу периодичности компонентов поверхностной нагрузки все функции, определяющие напряженно-деформированное состояние оболочки, можно разложить в ряд Фурье по окружной координате θ :

– для симметричных компонент вектора разрешающих функций $N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta_s$

$$\Phi(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(s) \cos k\theta, \quad (8)$$

– для антисимметричных компонент вектора разрешающих функций \hat{S}, v

$$\Psi(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(s) \sin k\theta. \quad (9)$$

Раскладывая компоненты внешней нагрузки и искомые функции в системе (5) в ряды Фурье по окружной координате θ и разделяя переменные для каждого члена разложения, имеем разрешающую систему обыкновенных уравнений восьмого порядка [15, 22]

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = A_k(s)\bar{Y}_k + \bar{g}_k(s), \quad (10)$$

$$(k = 0, 1, 2 \dots), \quad A_K(s) = \|a_{ij}^{(k)}(s)\|, \quad s_0 \leq s \leq s_L, \quad (i, j = 1, 2 \dots 8), \quad \bar{g}_k = \{g_{1k} \dots g_{8k}\},$$

с граничными условиями

$$B_1 \bar{Y}(s_0) = \bar{b}_1$$

$$B_2 \bar{Y}(s_L) = \bar{b}_2.$$

Здесь B_1, B_2 – заданные матрицы; \bar{b}_1, \bar{b}_2 – заданные векторы; $\bar{g}(s)$ – вектор, учитывающий известную внешнюю нагрузку; L – длина оболочки, $a_{ij}^{(k)}$ – компоненты матрицы жесткости оболочки.

Система (10) может быть проинтегрирована с использованием метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова [22, 23], если известны все компоненты нагрузки. Таким образом, чтобы замкнуть систему (6), необходимо определить контактное давление $q(s, \theta)$, распределенное по некоторой неизвестной пока области контакта ω .

Проведем дискретизацию максимально возможной области контакта ω_{\max} ($N \times K$) прямоугольными элементами (N, K – число элементов по окружности и меридиану). Для задачи, показанной на рис. 1, максимальная физически возможная область контакта ω_{\max} ограничена размерами ширины основания b и $2t_\theta$ ($2t_\theta = \pi R_2$ – размер по направлению окружной координаты θ). Таким образом, область ω_{\max} можно представить в виде совокупности виртуальных элементов с размерами a_s и a_θ (рис. 2). На каждом виртуальном элементе примем постоянное значение контактного давления $q > 0$. На элементах в области возможного отстава-

ния оболочки от основания примем $q = 0$. Таким образом, взаимодействие оболочки и основания может быть представлено конечным числом усилий X_{ij} , приложенных на виртуальных элементах по всей области ω_{\max} :

$$X_{ij} = q_{ij}a, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots K,$$

Где $a = a_\theta \times a_s$ – площадь виртуального элемента; q_{ij} – контактное давление, действующее на виртуальном элементе.

Для определения усилий взаимодействия между оболочкой и основанием воспользуемся методом сил, который применяется в строительной механике [24]. Выделим из области ω_{\max} одно полукольцо шириной a_s . Для полученного кольца составим систему уравнений равновесия методом сил:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \delta_{2i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_2 + DX_2^{(1)} &= 0, \\ &\dots, \\ \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь δ_{ij} – перемещение в основной системе по направлению i -й связи от единичного усилия, введенного по направлению j -й связи; Z – перемещение оболочки как жесткого тела в вертикальном направлении. Верхний индекс в скобках обозначает номер кольца, следовательно $X_i^{(j)} = X_{ij}$.

Оператор D является аналогом параметра регуляризации. Он учитывает деформирование микрогеометрии поверхности основания или оболочки. Будем использовать простейшую модель для учета упругих свойств основания. Модель линейного деформирования основания – модель Винклера. Следовательно, согласно [9, 25], D можно представить как

$$D = \frac{1}{ca}, \tag{12}$$

где c – коэффициент постели; a – площадь виртуального элемента.

Коэффициенты δ_{ij} в системе (11) определяются путем интегрирования системы (10) после подстановки единичных усилий $P_1^* = 1$. Единичная сила P_1^* представляется в виде поверхностной нагрузки, распределенной на виртуальном элементе с площадью a , то есть в виде разложения в ряд Фурье

$$q_1^* = \frac{P_1^*}{\pi R_1 a_s} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_f} \frac{2 \sin(k\Delta\theta/2)}{k\Delta\theta} \cos k\theta \right\}, \tag{13}$$

где $\Delta\theta$ – угол, который стягивает виртуальный элемент; n_f – количество удерживаемых гармоник.

Таким образом, после интегрирования системы (10) определяем матрицу радиальных перемещений для исследуемой оболочки $w_{ij} = u_{rij}$, которые равны коэффициентам δ_{ij} в системе (11).

3. Связь между интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями

Известно, что существует аналогия между линейными интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями [26]. Уравнение Фредгольма второго рода (3), определяющее распределение контактного давления, представим в виде

$$q(x) = -\frac{1}{R} \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi + \frac{1}{R} g(x), \quad (14)$$

где $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$.

Если интервал (a, b) разбить на N интервалов, то длина их будет равна

$$\frac{b-a}{N} = \Delta x = \Delta \xi.$$

Представим [26]:

$$G(a + i\Delta x, a + j\Delta \xi) = G_{ij}, \quad q(a + i\Delta x) = q_i, \quad g(a + i\Delta x) = g_i \quad (i, j = 1 \dots N).$$

Заменим интеграл

$$\int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi$$

суммой

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \Delta \xi.$$

Следовательно, вместо интегрального уравнения (14) получим систему алгебраических уравнений

$$q_1 = -\frac{1}{R} \sum_{j=1}^N G_{1j} q_j \Delta \xi + \frac{1}{R} g_1, \quad (15)$$

...

$$q_N = -\frac{1}{R} \sum_{j=1}^N G_{Nj} q_j \Delta \xi + \frac{1}{R} g_N.$$

Заменяя в системе (11) усилия взаимодействия контактной нагрузкой $q_i = X_i \Delta \xi^{-1}$, имеем:

$$q_1^{(1)} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} q_i^{(1)} + \frac{1}{D\Delta\xi} Z^{(1)} \cos \theta_1, \quad (16)$$

....,

$$q_N^{(1)} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} q_i^{(1)} + \frac{1}{D\Delta\xi} Z^{(1)} \cos \theta_N.$$

Видно, что системы (15) и (16) совпадают с точностью до констант. Следовательно, система (11) является аналогом одномерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численно определенная функция δ_{ij} для системы (11) является аналогом функции Грина G . Функция Грина краевой задачи для дифференциального уравнения есть фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Функция Грина позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям. Необходимо добавить, что только для ограниченного класса изотропных оболочек – прямоугольных пластин, круглых пластин, сферических оболочек, цилиндрических оболочек бесконечной длины – существуют аналитические выражения для функции Грина [8, 10, 11]. Для оболочек вращения конечной длины, оболочек с переменными параметрами вдоль образующей, анизотропных оболочек и т. д. построить аналитическую функцию Грина не представляется возможным. Однако численно определить такую функцию для любой оболочки, подчиняющейся гипотезам Кирхгофа–Лява, с переменными параметрами вдоль образующей достаточно просто, интегрируя систему (10) от нагрузки, выраженной соотношением (13). В этой универсальности и простоте заключается преимущество численных методов.

4. Разрешающая система для двумерных контактных задач

В системе (11) внешнее усилие осуществляется в виде жесткого нагружения, т. е. за счет заданного перемещения Z . Однако в прикладных задачах нагружение оболочки обычно осуществляется за счет внешних механических сил. При использовании смешанного метода, применяемого в строительной механике [24], система (11) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \delta_{2i} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_2 + DX_2^{(1)} &= 0, \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i^{(1)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i^{(1)} = P^{(1)}.$$

Здесь $P^{(1)}$ – проекция внешней силы на вертикальную ось x , которая действует на первое кольцо.

В этом случае в системе (17) перемещение Z будет неизвестной величиной. Если учесть влияние оставшихся колец на первое, то уравнения (17) примут вид

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \delta_{li}^{(j)} X_i^{(j)} - Z^{(1)} \cos \theta_1 + DX_1^{(1)} = 0,$$

...,

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \delta_{Ni}^{(j)} X_i^{(j)} - Z^{(1)} \cos \theta_N + DX_N^{(1)} = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i^{(1)} = P^{(1)}.$$

Уравнения (18) в матричном виде, учитывая симметрию задачи относительно вертикальной оси x , запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} [W_D^{(1)}] \{X\}^T - Z^{(1)} \{C\} &= 0 \\ \{C\}^T \{X^{(1)}\} &= 0,5P^{(1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $\{X\}^T = \{X_1^{(1)} \dots X_M^{(1)} \dots X_1^{(k)} \dots X_M^{(k)}\}$ – вектор размера $M \times K$ неизвестных усилий, $M = N/2$; $Z^{(1)}$ – смещение центра окружности в первом кольце; $\{C\}^T = \{\cos \theta_1 \dots \cos \theta_M\}$ – вектор косинусов; $\{X^{(1)}\}^T = \{X_1^{(1)} \dots X_M^{(1)}\}$,

$$[W_D^{(1)}] = \begin{bmatrix} w_1^{(1)} + w_2^{(1)} + D & w_2^{(1)} + w_3^{(1)} & \dots & w_M^{(1)} + w_{M+1}^{(1)} \dots \\ & w_1^{(1)} + w_4^{(1)} + D & \dots & w_{M-1}^{(1)} + w_{M+2}^{(1)} \dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & \text{симм.} & \dots w_1^{(1)} + w_{2M}^{(1)} + D \dots \\ & w_1^{(k)} + w_2^{(k)} & w_2^{(k)} + w_3^{(k)} & \dots & w_M^{(k)} + w_{M+1}^{(k)} \\ & & w_1^{(k)} + w_4^{(k)} & \dots & w_{M-1}^{(k)} + w_{M+2}^{(k)} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \text{симм.} & \dots & w_1^{(k)} + w_{2M}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где $w_i = \delta_{li} = u_{ri}$, $i = 1, \dots, N$.

Система (19) состоит из $M + 1$ уравнения и имеет $M \times (K + 1)$ неизвестных. Используя блочный вид матрицы (20), уравнение (19) можно записать как

$$[H_{11} \ H_{12} \dots H_{1K}] \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(K)}\} \end{bmatrix} - Z^{(1)}\{C\} = 0.$$

После введения трехмерной индексации n, m, p ($n = 1 \div 2M$ – номер элемента на окружности, $m = 1 \div K$ – номер кольца, $p = 1 \div K$ – номер кольца, на котором приложена единичная сила) матрица H будет иметь вид

$$H_{mp} = \begin{bmatrix} w_{1mp} + w_{2mp} + \delta_{mp}^* D & w_{2mp} + w_{3mp} & \dots & w_{Mmp} + w_{M+1,mp} \\ & w_{1mp} + w_{4mp} + \delta_{mp}^* D & \dots & w_{M-1,mp} + w_{M+2,mp} \\ & \dots & \dots & \dots \\ \text{симм.} & & & w_{1mp} + w_{2M,mp} + \delta_{mp}^* D \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В матрице (21) δ_{mp}^* – символ Кронекера.

Аналогичным образом составляются уравнения для оставшихся $K-1$ колец, и все уравнения сводятся в одну систему

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(k)}\} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \dots \\ Z^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \times \{C\} + \begin{bmatrix} \{0^{(1)}\} \\ \{0^{(2)}\} \\ \dots \\ \{0^{(k)}\} \\ -0.5P \end{bmatrix} = 0, \quad (22)$$

где P – проекция внешних сил на вертикальную ось x , действующих на оболочку.

Система (22) состоит из $K \times (M+1)$ уравнений и имеет $K \times (M+K)$ неизвестных величин. Однако, учитывая, что вектор $\{Z\}^T = \{Z^{(1)} \dots Z^{(k)}\}$ имеет простой физический смысл (прогиб оси окружности) и что размер области b намного меньше длины оболочки L , можно принять

$$Z^{(j)} = Z^* = const, \quad j = 1 \dots K. \quad (23)$$

Учитывая допущение (23), систему (22), определяющую контактное давление и прогиб оси окружности Z , можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$[A]\{\hat{X}\} = \{B\}, \quad (24)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] & -\{C\}^T \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] & -\{C\}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] & -\{C\}^T \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{\hat{X}\}^T = \left\{ \{X^{(1)}\} \dots \{X^{(k)}\} Z^* \right\}, \quad \{B\}^T = -\left\{ \{0^{(1)}\} \dots \{0^{(k)}\} -0,5P \right\}.$$

5. Разрешающие уравнения для оболочек, контактирующих по поверхностям несогласованной формы

Во многих прикладных задачах контакт оболочки происходит по несогласованной форме поверхности основания, например, как сказано выше, из-за разности радиусов $R_1 > R_2$ между оболочкой и основанием. Следовательно, для топографически гладких тел будет существовать первоначальный геометрический зазор в окружном направлении $\Delta(\theta)$. Также зазор $\Delta(s)$ может появиться, если образующие оболочки и основания не совпадают в меридиональном направлении s . Например, если основание имеет конусность, то зазор будет зависеть от меридиональной координаты $\Delta(s)$. Следовательно, в общем случае первоначальный зазор в каждой точке может быть функцией двух переменных $\Delta(s, \theta)$. Если поверхность имеет шероховатость, то она также будет нарушать непрерывность первоначального контакта. Большинство обработанных поверхностей в первом приближении можно моделировать одномерными либо двумерными шероховатостями. Зазор между плоской поверхностью и поверхностью, обладающей регулярной волнистостью в двух направлениях, можно представить в виде [2]

$$\Delta(x, y) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1 \cos(2\pi x / \lambda_1) + \Delta_2 \cos(2\pi x / \lambda_2),$$

где Δ_i и λ_i – амплитуда и длина волны соответственно.

В общем случае зазор будет состоять из суммы первоначального геометрического зазора и зазора, вызванного волнистостью.

Таким образом, в случае контакта оболочки с основанием, имеющим первоначальные зазоры произвольной формы, или в случае контакта с топографически негладкими поверхностями основания разрешающая система (22) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1k}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \dots & [H_{2k}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \dots & [H_{kk}] \\ \{C\}^T & \{C\}^T & \dots & \{C\}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \dots \\ \{X^{(k)}\} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \dots \\ Z^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \times \{C\} + \begin{bmatrix} \{\Delta_R^{(1)}\} \\ \{\Delta_R^{(2)}\} \\ \dots \\ \{\Delta_R^{(k)}\} \\ -0,5P \end{bmatrix} = 0, \quad (25)$$

где $\{\Delta_R^{(j)}\} = \{\Delta_{R1}^{(j)} \dots \Delta_{RM}^{(j)}\}$ – вектор суммарного зазора ($j = 1 \dots K$).

При этом, если $R_1 \neq R_2$, между оболочкой и основанием для топографически гладких тел будет существовать первоначальный геометрический зазор $\Delta(\theta)$. Однако для всех колец он будет одинаков: $\{\Delta_R^{(1)}\} = \{\Delta_R^{(2)}\} \dots = \{\Delta_R^{(K)}\}$.

При учете зазора за счет разности радиусов и конусности, т. е. для тел с несогласованными по форме профилями в двух координатных направлениях, вектор зазоров $\Delta(s, \theta)$ для всех колец будет разным:

$$\{\Delta_R^{(1)}\} \neq \{\Delta_R^{(2)}\} \dots \neq \{\Delta_R^{(K)}\}.$$

Таким образом, последний столбец в системе (25), вычисленный из геометрических соображений, будет учитывать произвольный в двух координатных направлениях первоначальный зазор между оболочкой и основанием в недеформированном состоянии. Таким образом, показана возможность исследовать контакт оболочки с основанием, имеющим первоначальные зазоры произвольной формы, и с топографически негладкими поверхностями основания, и в этом заключается научная новизна предлагаемой работы.

6. Алгоритм поиска области контакта

Система линейных алгебраических уравнений (25) при решении задач с двухсторонними связями (если оболочка не отходит от основания, например, за счет клея или сварки) полностью определяет вектор контактных (положительных и отрицательных) давлений. Следовательно, после решения системы (25) находится $K \times M$ значений контактного давления для всех виртуальных элементов по области ω_{\max} в первом приближении. Поскольку в прикладных задачах возможно отставание оболочки от основания, то затем необходимо применять итерационные процедуры поиска реальной области контакта ω . Для определения тех виртуальных элементов, которые необходимо исключить из системы (25), используется метод последовательных приближений, который обычно используется при решении контактных задач для оболочечных конструкций [14, 25]. Алгоритм поиска заключается в том, что j -е приближение строится с использованием предыдущих $j-1$ и с учетом отсутствия основания (т. е. связи) на тех элементах, где $X_{ij} < 0$. Алгоритм реализуется в лагранжевой координатной системе с использованием согласованных виртуальных элементов. Следовательно, после решения системы уравнений (25) для первого шага и определения виртуального элемента с максимальным отрицательным контактным давлением $X_{qr} < 0$ на втором шаге строится неконденсированная (вида (24) первоначального порядка) система [27] с нулевым столбцом и нулевой строкой при X_{qr} . Процесс продолжается до тех пор, пока все значения определяемых усилий не станут неотрицательными.

При определении достоверности полученной конечной разрешающей системы алгебраических уравнений (как системы с односторонними связями) за ее характеристику принимаются следующие ее свойства [28]:

- 1) усилия во всех ее односторонних связях, при выключении остальных односторонних связей, должны получиться положительными;
- 2) включение в частичную систему каких-либо дополнительных связей из числа отброшенных должно привести к отрицательным значениям усилий в них;
- 3) перемещения по направлению односторонних связей, не входящих в состав рабочей системы, должны быть положительными.

Затем, как сказано выше, при необходимости можно определить напряженно-деформированное состояние оболочки от найденного контактного давления и внешнего нагружения. Определение напряженного состояния оболочки от произвольного давления, которое приложено на множестве виртуальных элементов, в данной работе не рассматривается, поскольку оно подробно рассмотрено в работах [15, 20, 21].

7. Численный пример и обсуждение результатов вычисления

В качестве примера рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки (часть обечайки вагона-цистерны), лежащей на жестком основании с прокладкой (рис. 1). При расчете принималось: длина оболочки $L = 1,25$ м, внешний радиус оболочки $R_2 = 1,50$ м, толщина стенки $h = 0,006$ м, модуль упругости $E = 2,1 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Главный вектор внешней нагрузки $P = 4,5 \times 10^5$ Н приложен симметрично относительно сечения $s = L/2$. Оболочка лежит на жестком основании шириной $b=0,25$ м, расположенном симметрично относительно граничных контуров. Между основанием и оболочкой имеется упругая прокладка. Длина основания по окружности $2t\theta$ стягивается углом 128° . Коэффициент постели, учитывающий упругие свойства прокладки, принимался как для вакуумной резины, $c = 10^8$ Н/м³.

Граничные условия для обоих контуров, $s = s_0, s_L$, приняты в виде

$$u_r = u_z = v = \mathcal{S}_S = 0.$$

Максимально возможная область контакта ω_{\max} разбивалась по длине области $2t\theta$ углами, равными $\Delta\theta = 2^\circ$ ($N = 64$), а ширина в меридиональном направлении b делилась на пять элементов ($K=5$). Следовательно, площадь виртуального элемента равна $a = 5,24 \times 5 = 26,2$ см². В выражении (13) удерживалось 170 гармоник.

На рис. 3 показано распределение контактного давления q на области ω_{\max} . Оболочка контактирует с основанием одинакового радиуса $R_1 = R_2$, т. е. по поверхности согласованной формы. На данном и последующих рисунках по вертикальной оси откладывается контактное давление q в МПа. Горизонтальные оси определяют сетку (64×5) виртуальных элементов по координатам θ и s соответственно. Для лучшего восприятия рисунка сетка нарисована с уменьшенным в пять раз размером по координате θ . Из рисунка видно, что принятые при расчете упругие свойства прокладки (как для резины) обеспечивают полное прилегание оболочки к основанию по всей первоначальной области контакта ω_{\max} .

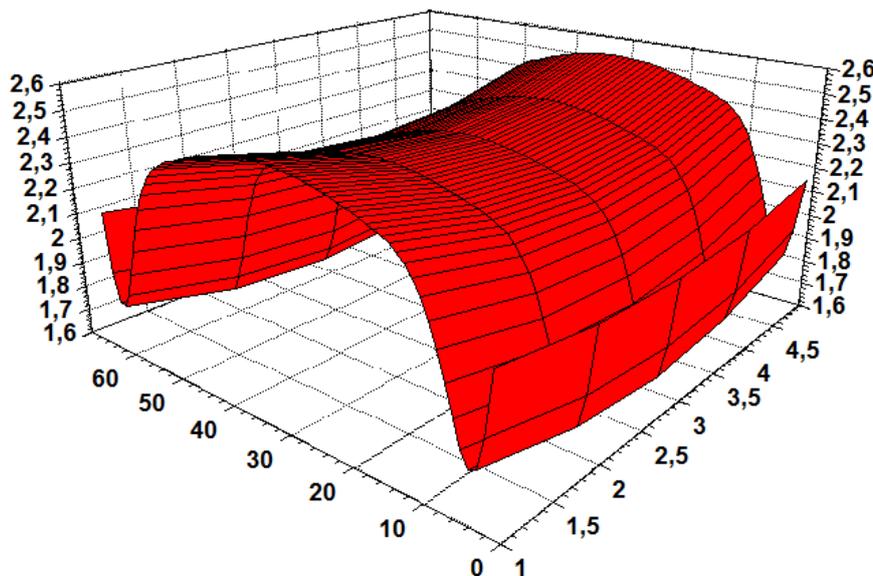


Рис. 3. Распределение контактного давления q по области ω_{\max} с учетом упругих свойств прокладки для случая $R_1 = R_2$

На рис. 4 показано распределение контактного давления для случая контакта оболочки с основанием большого радиуса $R_1 = 1,52$ м. Следовательно, контакт происходит по поверхности несогласованной формы с первоначальным зазором $\Delta(\theta)$ вдоль окружности. Из рисунка видно, что в этом случае контактное давления распределяется не по всей первоначальной области ω_{\max} . С помощью предложенного выше алгоритма определяется область ω , на которой контактное давление положительно. На полоске по краям области, равной двум виртуальным элементам параллельной оси оболочки, контакт отсутствует.

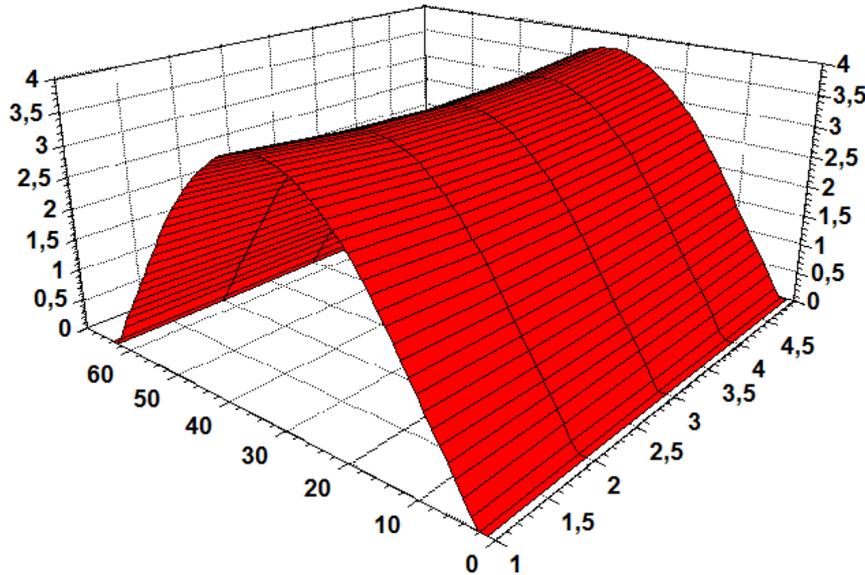


Рис. 4. Распределение контактного давления q по области ω с учетом упругих свойств прокладки для случая $R_1 > R_2$

На рис. 5 показано распределение контактного давления для случая повышенной в тысячу раз жесткости прокладки ($c = 10^{11}$ Н/м³). Следовательно, можно считать, что контакт происходит с абсолютно жестким основанием. Оболочка контактирует с основанием радиуса $R_1 = R_2$, т. е. по поверхности согласованной формы.

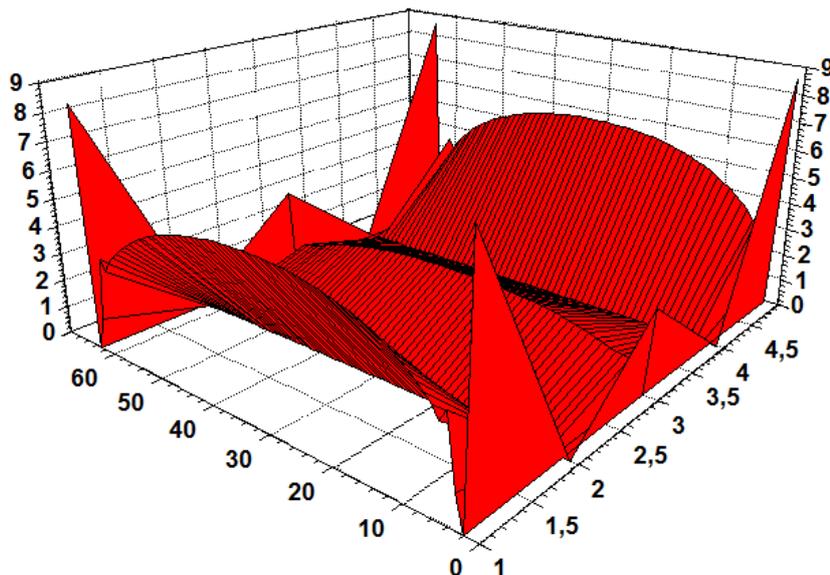


Рис. 5. Распределение контактного давления q по области ω_{\max} при контакте с жестким основанием для случая $R_1 = R_2$

На рис. 5 видно увеличение контактного давления на границе области, параллельной оси оболочки. Даже при достаточно крупной сетке области ω_{\max} видны локальные силы на этой границе области контакта. Это явление согласуется с известным эффектом образования локальных сил на границе области при решении аналитическими методами одномерных контактных задач [8, 9]. Наличие таких локальных сил может определять прочность и устойчивость оболочечных конструкций. Из рисунка видно, что существуют области виртуальных элементов, на которых отсутствует контактное давление. Эти области определяют реальную область контакта ω .

На рис. 6 показано распределение контактного давления для случая контакта оболочки с абсолютно жестким основанием с большим радиусом $R_1 = 1,52$ м, т. е. по поверхности несогласованной формы. Из рисунка видно, что из-за первоначального зазора контактное давление распределяется не по всей первоначальной области ω_{\max} . Область контакта ω при заданной внешней силе значительно уменьшается. На полоске по краям области, равной восьми виртуальным элементам параллельной оси оболочки, контакт отсутствует.

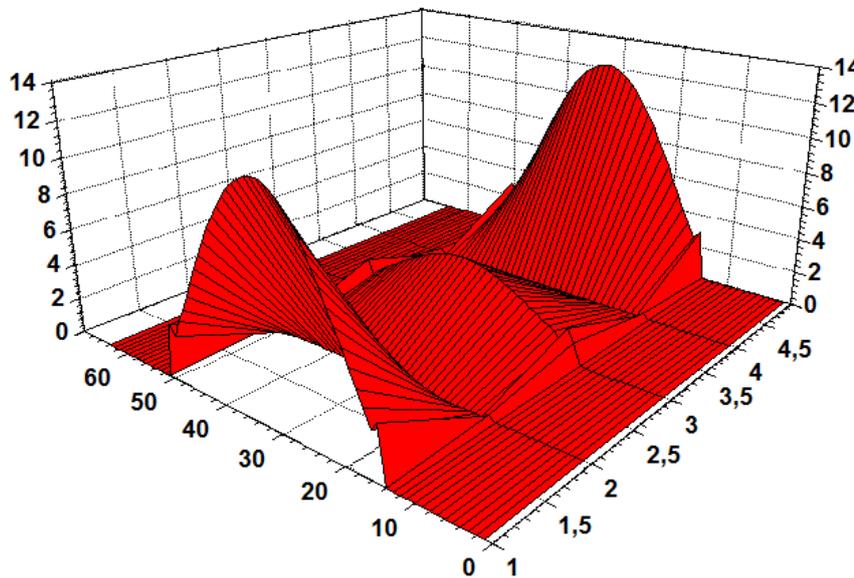


Рис. 6. Распределение контактного давления q по области ω при контакте с жестким основанием для случая $R_1 > R_2$

На рис. 7 показано распределение контактного давления для случая, когда оболочка контактирует по поверхности несогласованной формы в двух координатных направлениях. За счет учета небольшой конусности основания от левой границы области (уклон 1/20) будет образовываться первоначальный геометрический зазор в меридиональном направлении. Следовательно, имеется первоначальный геометрический зазор в двух направлениях $\Delta(\theta, s)$. На рис. 7 показано распределение контактного давления, если контакт происходит с упругим основанием ($c = 10^8$ Н/м³). Из рисунка видно, что область виртуальных элементов, на которых отсутствует контактное давление, увеличивается от левой границы к правой.

На рис. 8 показано распределение контактного давления для случая с небольшой конусностью жесткого ($c = 10^{11}$ Н/м³) основания.

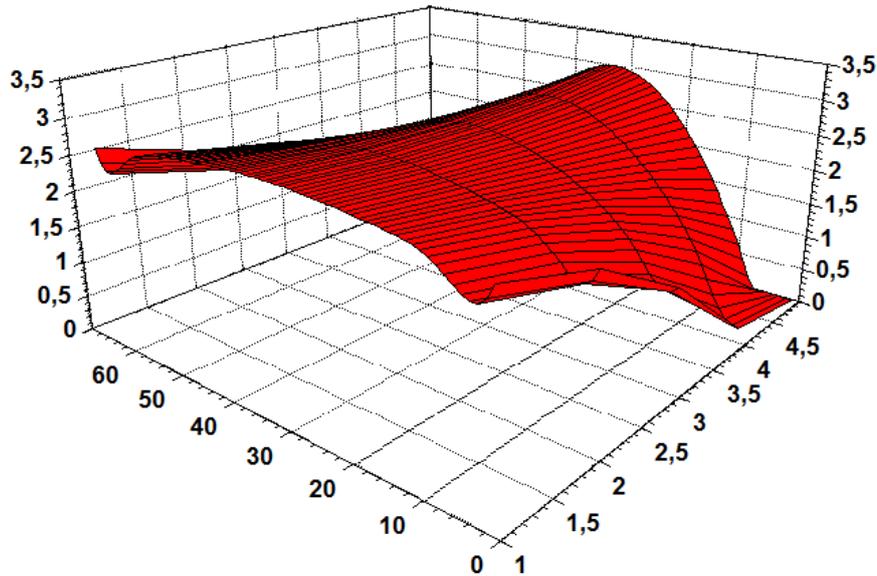


Рис. 7. Распределение контактного давления q по области ω с учетом упругих свойств прокладки и небольшой конусности основания

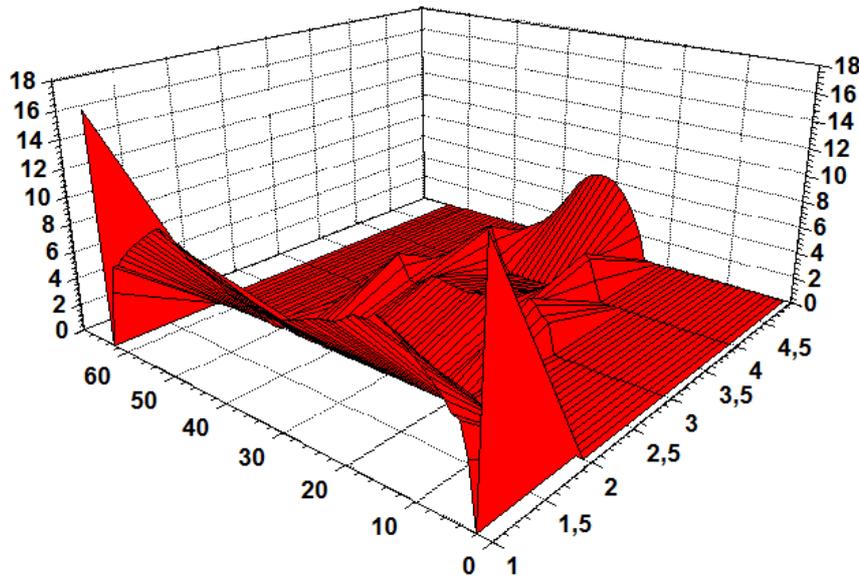


Рис. 8. Распределение контактного давления q по области ω при контакте с жестким основанием и с учетом небольшой конусности основания

Из рис. 8 видно, что при жёстком основании и первоначальном зазоре первоначальная область ω_{\max} значительно уменьшается. На полоске, ширина которой увеличивается слева направо, контакт отсутствует.

8. Заключение

Таким образом, численный метод, основанный на методе виртуальных элементов, обобщен для решения контактных задач для тонкой оболочки, лежащей на основании с поверхностью несогласованной формы. Метод позволяет определить область контакта и контактное давление по неизвестной по двум координатным направлениям области кон-

такта. В работе показана аналогия между разрешающими уравнениями метода виртуальных элементов и интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Проведенный численный эксперимент для конструкции в виде обечайки вагона-цистерны показывает, что контактное давление и область контакта зависят от величины несогласованности формы контактирующих поверхностей и упругих характеристик основания.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН (тема АААА-А18-118020790140-5).

Литература

1. Механика контактного взаимодействия / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – 672 с.
2. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
3. Bourago N. G., Kukudzhanov V. N. A review of contact algorithms // Mech. Solids. – 2005. – Vol. 40 (1). – P. 35–71.
4. Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. – Philadelphia : Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1988. – 485 p.
5. Computational Methods in Contact Mechanics / ed. by M. H. Aliabadi and C. A. Brebbia. – Southampton; Boston : Computational Mechanics Publ., Cop., 1993. – 352 p. – ISBN 1-85312-184-3 (Southampton). – (Intern. Ser. on Computational Engineering).
6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – 92. – 156–171.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – Москва; Ленинград : Гостехиздат, 1949. – 270 с.
8. Grigolyuk E. I. and Tolkachev V. M. Contact Problems in the Theory of Plates and Shells. – М. : Mir Publ., 1987. – 424 p.
9. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – Киев : Наукова думка, 1990. – 136 с.
10. Артюхин Ю. П., Малкин С. А. Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений в задачах упругого воздействия тел. – Казань : Казанский государственный университет, 2007. – 292 с.
11. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / пер. с англ. и польск. Б. Н. Ушакова. – Москва : Мир, 1982. – 542 с.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 285 с.
13. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. – Berlin–Heidelberg : Springer, 2006. – 518 p. – DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0.
14. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный., П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач, Ю. И. Матюхин, Г. Л. Хавин. – Киев : Наукова думка, 1989. – 232 с.
15. Механика композитов : в 12 т. Том 8 : Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев : А.С.К, 1999. – 389 с.
16. Emelyanov I. G. Numerical analysis of contact interaction of cylindrical shells // Soviet Applied Mechanics. – 1987. – Vol. 23, No. 6. – P. 569–573. – DOI: 10.1007/BF00887024.
17. Emelyanov I. G. A study of contact interaction of two-layer shells // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1996. – Vol. 37, iss 1. – P. 129–134. – DOI: 10.1007/BF02369412.

18. Emelyanov I. G. contact interaction of shells of revolution in unknown two-dimensional regions // *International Applied Mechanics*. – 1997. – Vol. 33, No. 7. – P. 548–555. – DOI: 10.1007/BF02700735.
19. Emelyanov I. G. investigation into the contact interaction between shell and base with notches // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2015. – Vol. 44, No. 3. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S1052618815030048.
20. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В. Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 245–252. – DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.24.
21. Емельянов И. Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 245–253. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20.
22. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек : в 5 т. Т. 4 : Теория оболочек переменной жесткости. – Киев : Наукова думка, 1981. – 544 с.
23. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 171–174.
24. Тимошенко С. П., Гере Д. Ж. Механика материалов. – М. : Мир, 1976. – 669 с.
25. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. – Киев : Наукова думка, 1988. – 288 с.
26. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений : учебник. – 3-е изд. – М. : Наука, 1965. – 128 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
28. Рабинович И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М. : Стройиздат, 1975. – 144 с.