

Received: 24.12.2025
Revised: 26.01.2026
Accepted: 30.01.2026
DOI: 10.17804/2410-9908.2026.1.006-022

ANALYTICAL SOLUTION TO THE GENERALIZED NUSSELT–COUETTE–POISEUILLE PROBLEM FOR A MULTILAYER INHOMOGENEOUS SHEAR FLOW

K. V. Gubareva^{1, a, *}, E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}, and A. V. Eremin^{1, c}

¹*Samara State Technical University,*







244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,*

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³*Ural Federal University,*

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;
^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;
^c  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia
 Tel.: +7 (846) 332-4226

This paper presents an investigation of an inhomogeneous shear flow of a viscous fluid in the gap between two parallel plates affected by a pressure gradient and gravity. It discusses a generalized formulation of the classical Nusselt–Couette–Poiseuille problem, supplemented by nontrivial boundary conditions including velocity derivatives at the moving boundary. This formulation allows one to model complex physical interactions at the interface and leads to the emergence of multilayer flow structures with alternating directions. The emphasis is on establishing analytical conditions under which the longitudinal velocity profile acquires multiple zeros within the fluid layer, thus corresponding to the formation of stable counter-current zones. The methodological foundation for the study combines an analytical solution to the full system of Navier–Stokes equations with subsequent analysis and parametric investigations. The possibility of the existence of stationary laminar flows with two and three internal zeros of longitudinal velocity, corresponding to two- and three-layer flow stratification, is rigorously proved for the first time. The flow regimes are systematically classified based on the introduced dimensionless parameters, the spatial evolution of the velocity field is analyzed, and the structural stability of multilayer configurations is studied. The obtained results are of significant importance for a deeper understanding of the physics of complex shear flows and open new possibilities for controlling the flow structure in problems of heat and mass transfer in thin layers, microfluidic systems, and modern technologies of applying functional coatings.

Keywords: Nusselt–Couette–Poiseuille flow, multilayer flow, counter-current zones, analytical solution, velocity zeros, shear flow, flow stratification, nonlinear boundary conditions

References

1. Couette, M. Études sur le frottement des liquids. *Annales de Chimie et de Physique*, 1890, 21, 433–510.
2. Poiseuille, J.L. *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres-petits diametres*, Imprimerie Royale, 1844, 111 p.

3. Nusselt, W. Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. *Gesundheits-Ingenieur*, 1915, 38, 477–482, 490–496.
4. Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2000, 658 p.
5. Kundu, P.K., Cohen, I.M., and Dowling, D.R. *Fluid Mechanics*, 5th ed., Academic Press, 2012, 892 p.
6. Schlichting, H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2017, 805 p. DOI: 10.1007/978-3-662-52919-5.
7. Pozrikidis, C. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2nd ed., Oxford University Press, 2011, 1296 p.
8. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56, 662–668. DOI: 10.1134/S0040579522050207.
9. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
10. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, 25 (3), 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
11. Stone, H.A., Stroock, A.D., and Ajdari, A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2004, 36, 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
12. Squires, T.M. and Quake, S.R. Microfluidics: fluid physics at the nanoliter scale. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77, 977–1026. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.977.
13. Scriven, L.E. Physics and applications of DIP coating and spin coating. *MRS Online Proceedings Library*, 1988, 121, 717–729. DOI: 10.1557/PROC-121-717.
14. Pedlosky, J. *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, New York, NY, 2013, 710.
15. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, 51, 581–587. DOI: 10.1134/S001546281605001X.
16. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dynamika*, 2014, 10 (2), 177–182. (In Russian).
17. Prosviryakov, E.Yu. and Spevak, L.F. Layered three-dimensional nonuniform viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2018, 52, 765–770. DOI: 10.1134/S0040579518050391.
18. White, F.M. *Viscous Fluid Flow*, 3rd ed., McGraw-Hill, 2005, 656 p.
19. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23, 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
20. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review. *Symmetry*, 2023, 15 (10), 1825. DOI: 10.3390/sym15101825.
22. Drazin, P.G. and Reid, W.H. *Hydrodynamic Stability*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2004, 605 p.
23. Doedel, E., Keller, H.B., and Kernevez, J.P. Numerical analysis and control of bifurcation problems (I): bifurcation in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1991, 01 (03), 493–520. DOI: 10.1142/S0218127491000397.
24. Boyd, J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd ed., Dover Publications, Mineola, New York, 2000.

25. Burmasheva, N.V., Dyachkova, A.V., and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Poiseuille flow. *Vestnik TGU. Matematika i Mekhanika*, 2022, 77, 68–85. (In Russian). DOI: 10.17223/19988621/77/6.
26. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15 (9), 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
27. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. The Couette–Poiseuille inhomogeneous shear flow at the motion of the lower boundary of the horizontal layer. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya*, 2021, 23 (4), 403–411. (In Russian). DOI: 10.15350/17270529.2021.4.36.
28. Burmasheva, N., Ershkov, S., Prosviryakov, E., and Leshchenko, D. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction. *Fluids*, 2023, 8 (4), 123. DOI: 10.3390/fluids8040123.
29. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy IMM UrO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
30. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Stokes waves in a swirling fluid. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, 10 (3), 309–318. (In Russian).
31. Uzdenova, A., Kovalenko, A., Prosviryakov, E., and Urtenov, M. Mathematical modeling of the influence of the Karman vortex street on mass transfer in electromembrane systems. *Membranes*, 2023, 13 (4), 394. DOI: 10.3390/membranes13040394.
32. Riley, N. Steady streaming. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, 33, 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
33. Shankar, P.N. and Deshpande, M.D. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, 32, 93–136. DOI: 10.1146/annurev.fluid.32.1.93.

Подана в журнал: 24.12.2025

УДК 532.517

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.1.006-022



АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НУССЕЛЬТА – КУЭТТА – ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ



К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвирыков^{2, 3, б}, А. В. Еремин^{1, в}



¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^в  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, 244, г. Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе представлено исследование неоднородного сдвигового течения вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными пластинами под действием градиента давления и силы тяжести. Рассмотрена обобщенная постановка классической задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля, дополненная нетривиальными граничными условиями, включающими производные скорости на движущейся границе. Такая постановка позволяет моделировать сложные физические взаимодействия на границе раздела и приводит к возникновению многослойных структур течения с чередующимися направлениями. Основное внимание уделено установлению аналитических условий, при которых профиль продольной скорости приобретает кратные нули внутри слоя жидкости, что соответствует формированию устойчивых зон противонаправленного течения. Методологическая основа исследования сочетает аналитическое решение полной системы уравнений Навье – Стокса с последующим анализом и параметрическими исследованиями. Впервые строго доказана возможность существования стационарных ламинарных течений с двумя и тремя внутренними нулями продольной скорости, соответствующими двух- и трехслойной стратификации потока. Проведена систематическая классификация режимов течения на основе введенных безразмерных параметров, проанализирована пространственная эволюция поля скоростей, и исследована структурная устойчивость многослойных конфигураций. Полученные результаты имеют существенное значение для углубленного понимания физики сложных сдвиговых течений и открывают новые возможности для управления структурой потока в задачах тепломассопереноса в тонких слоях, микрофлюидных системах и современных технологиях нанесения функциональных покрытий.

Ключевые слова: течение Нуссельта – Куэтта – Пуазейля, многослойное течение, противонаправленные зоны, аналитическое решение, нули скорости, сдвиговое течение, стратификация течения, нелинейные граничные условия

1. Введение

Исследование течений вязкой жидкости в ограниченных объемах между параллельными поверхностями, описываемых классическими моделями Куэтта [1] и Пуазейля [2], а также их обобщением, задачей Нуссельта – Куэтта – Пуазейля [3], составляет одну из центральных тем современной гидродинамики [4, 5]. Эта проблематика имеет глубокое теоретическое содержание и широкий спектр практических приложений. Комбинированная модель служит универсальным теоретическим каркасом для анализа эффектов, возникающих при одновременном действии нескольких движущих сил [6, 7], и является важным инструментом в таких областях, как расчет смазочных слоев в машиностроении, моделирование геофизических потоков в пористых средах и проектирование микрофлюидных устройств для «лабораторий на чипе».

Особый теоретический и практический интерес представляют ситуации, когда течение приобретает выраженную неоднородность, обусловленную сложным характером граничных условий или пространственной неоднородностью внешних полей [8]. В таких условиях могут возникать нетривиальные гидродинамические эффекты, среди которых особое место занимает формирование многослойных структур с чередующимися направлениями течения [9, 10]. Физический механизм этого явления коренится в конкуренции между различными факторами, определяющими динамику жидкости: касательным движением границы, создающим сдвиговое течение; градиентом давления, инициирующим поток Пуазейля; массовыми силами, такими как сила тяжести, чье влияние модулируется ориентацией системы; вязкими напряжениями, перераспределяющими импульс по толщине слоя. Когда эти факторы действуют в противоположных направлениях или характеризуются существенно разными пространственными масштабами, в объеме жидкости могут спонтанно возникать поверхности, где продольная скорость обращается в нуль. Эти поверхности играют роль динамических границ, разделяющих области с противоположной ориентацией потока, что и приводит к образованию многослойной стратифицированной структуры.

Изучение условий возникновения и свойств таких многослойных течений представляет значительную практическую ценность. В области микрофлюидики управляемое создание зон противотечения позволяет эффективно решать задачи смешивания реагентов в малых объемах, где турбулентная диффузия отсутствует, а также осуществлять тонкое сепарирование частиц или молекул в ламинарных потоках [11, 12]. В технологии нанесения покрытий и пленок понимание детальной структуры течения в зазоре между наносящим устройством и подложкой является ключом к контролю над однородностью, адгезией и функциональными свойствами формируемого слоя [13]. В геофизических и астрофизических приложениях аналогичные гидродинамические механизмы лежат в основе формирования стратифицированных течений в атмосферах планет, океанических течений и динамики протопланетных дисков, где перепады плотности и температуры создают сложные многокомпонентные потоки [14].

Несмотря на длительную историю исследования задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля, систематический анализ условий возникновения в ее рамках устойчивых многослойных течений с несколькими внутренними нулями скорости оставался за пределами внимания большинства работ. Исторический экскурс показывает, что отправной точкой стали работы Куэтта [1] и Пуазейля [2], заложившие экспериментальные и теоретические основы. Нуссельт [3] синтезировал эти подходы, исследуя комбинированное течение. В последующие десятилетия модель подвергалась многочисленным усложнениям: учитывались тепловые эффекты и конвекция, нестационарность, нелинейность, обусловленная инерционными членами, и трехмерные возмущения [15–17]. Однако фокус преимущественно оставался на монотонных или однонаправленных профилях скорости [18]. Явление возвратных течений изучалось, как правило, в контексте течений в наклонных каналах или трубах под действием силы тяжести и давления, где может возникать одна зона обратного течения у стенки. Существенно более сложные многослойные структуры, включающие как минимум две внутрен-

ние поверхности раздела, упоминались в работах, посвященных течениям с неоднородными граничными условиями (например, при неравномерном нагреве или наличии поверхностно-активных веществ) или с пространственно-переменными реологическими свойствами [19, 20]. Особый интерес в этом контексте представляют исследования, в которых на границах задаются не только значения скорости, но и ее производные, что позволяет моделировать более широкий класс физических взаимодействий, таких как скольжение с трением, влияние упругих покрытий или сложные условия теплообмена [8, 21].

Проведение теоретического анализа многослойных течений сопряжено с рядом методологических сложностей. Первостепенной задачей является построение самосогласованного решения, удовлетворяющего как нелинейным уравнениям движения, так и нетривиальным граничным условиям [20, 22]. Далее, представляет значительный интерес не только доказательство существования решений с заданным числом нулей, но и исследование их устойчивости по отношению к малым возмущениям, а также установление четкой функциональной зависимости структуры течения от управляющих параметров системы [23]. Наконец, важным шагом является переход от анализа единичных частных случаев к построению общей параметрической классификации всех возможных режимов течения, что позволяет перейти от описания отдельных явлений к формулированию общих закономерностей [24].

Настоящая работа направлена на преодоление указанных методологических вызовов путем проведения систематического исследования условий генерации многослойных течений в рамках обобщенной постановки задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля. Основное внимание уделяется строгому анализу профиля продольной скорости и установлению точных параметрических соотношений, которые разделяют области существования режимов с различным количеством внутренних нулей скорости. Ключевой особенностью предлагаемого подхода является использование нетривиальных граничных условий, включающих производные скорости, что значительно расширяет класс моделируемых физических ситуаций по сравнению с классической постановкой [8, 25]. Методология исследования представляет собой органичное сочетание аналитических методов, позволяющих получить точное решение задачи в замкнутой форме [26, 27], и современных численных методов, используемых для последующего параметрического анализа и визуализации [28, 29].

Целью работы является выявление фундаментальных физических механизмов, ответственных за формирование многослойных течений, создание их полной классификации и детальное исследование пространственной структуры соответствующих полей скорости. Для достижения этой цели последовательно решается ряд взаимосвязанных задач. Первая задача заключается в построении полного аналитического решения обобщенной задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля с граничными условиями, содержащими производные. Вторая задача состоит в разработке эффективной методики анализа нулей полученного профиля скорости и классификации режимов течения на основе безразмерных критериев. Третья задача предусматривает проведение масштабных параметрических исследований для точного определения областей существования и условий перехода между течениями с одним, двумя и тремя внутренними нулями. Четвертая задача направлена на визуализацию и качественный анализ пространственной эволюции поля скоростей в поперечном направлении, что позволяет оценить степень неоднородности течения и устойчивости многослойной структуры.

Результаты исследования имеют как фундаментальное значение, углубляя понимание нелинейной динамики стратифицированных сдвиговых течений [30, 31], так и прикладной потенциал, открывая новые возможности для управления потоками в микрофлюидных системах [32] и технологических процессах [33].

2. Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, заключенной между двумя бесконечными параллельными пластинами, разделенными посто-

янным зазором толщиной h (рис. 1). Нижняя пластина предполагается абсолютно неподвижной, в то время как верхняя пластина движется с постоянной скоростью W . Направление вектора скорости верхней пластины составляет угол φ с положительным направлением оси x . Выбор системы координат осуществляется таким образом, чтобы ось x была ориентирована вдоль основного направления течения, ось y – в поперечном направлении в плоскости пластин, а ось z – по нормали к пластинам, причем координата z изменяется от 0 на нижней пластине до h на верхней. Течение происходит под действием двух основных внешних факторов: постоянного однородного градиента давления $\nabla p = (P_1, P_2, 0)$ и удельной силы тяжести \mathbf{g} , направленной вертикально вниз. Для общности постановки допускается, что система пластин может быть наклонена относительно горизонтальной плоскости на угол α . При этом проекция вектора ускорения свободного падения на плоскость течения xu образует угол β с осью x . Такая геометрия позволяет учесть широкий спектр возможных ориентаций системы относительно направления силы тяжести.

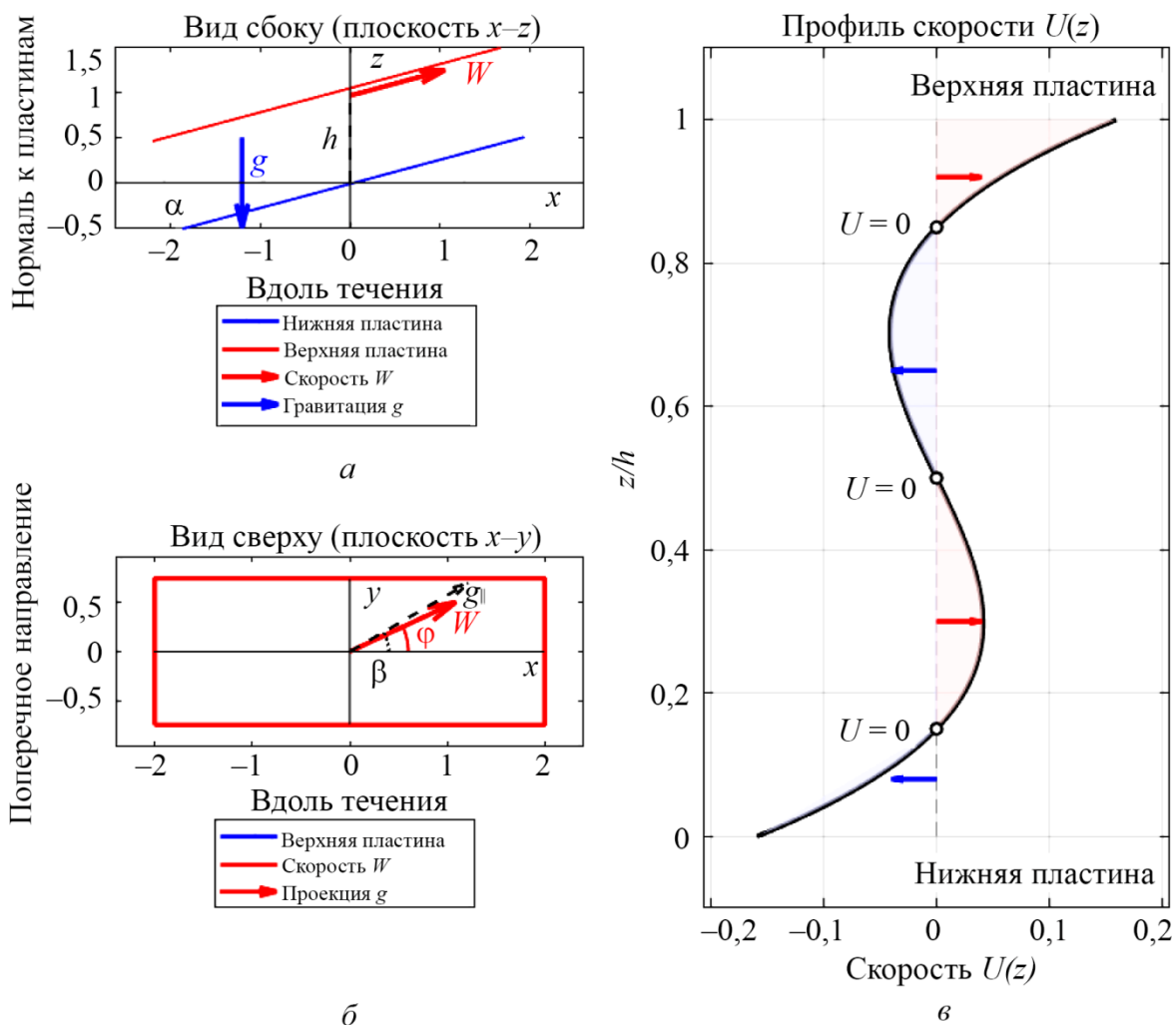


Рис. 1. Схематическое изображение обобщенной задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля: вид сбоку (плоскость xz), показывающий наклон пластин под углом α , толщину слоя h , скорость верхней пластины W и ускорение свободного падения g (а); вид сверху (плоскость xu), демонстрирующий углы φ и β , определяющие направления скорости и проекции силы тяжести соответственно (б); качественный профиль скорости $U(z)$ с тремя внутренними нулями, иллюстрирующий многослойную структуру течения (в)

Математическая модель течения основывается на системе уравнений Навье – Стокса для стационарного движения ньютоновской жидкости с постоянными физическими свойствами:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости. Для рассматриваемой геометрии естественно предположить, что течение является полностью развитым (установившимся) и однородным в направлениях x и y , за исключением давления, которое в силу наличия градиентов обязано иметь линейную зависимость от этих координат. Из условия несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и граничных условий на непроницаемых пластинах следует, что вертикальная компонента скорости w тождественно равна нулю во всем объеме жидкости.

Граничные условия на неподвижной нижней пластине ($z = 0$) являются условиями прилипания:

$$u(0) = 0, v(0) = 0.$$

На движущейся верхней пластине ($z = h$) задаются более сложные условия, которые включают не только значения скоростей, но и значения их первых и вторых производных по нормали:

$$u(h) = W \cos \varphi, v(h) = W \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(h) = \Omega, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(h) = \Gamma.$$

Здесь Ω и Γ – это параметры, имеющие ясную физическую интерпретацию: Ω характеризует линейный сдвиг скорости вблизи верхней границы, что может моделировать наличие тонкого смазочного слоя или эффекта скольжения; Γ определяет квадратичную составляющую сдвига и может быть связан, например, с кривизной профиля скорости, индуцированной неоднородными свойствами границы. Такие обобщенные граничные условия существенно расширяют класс описываемых физических ситуаций по сравнению со стандартными условиями Дирихле.

В рамках сделанных предположений о полной развитости течения система уравнений Навье – Стокса допускает значительное упрощение. Уравнение для поперечной компоненты скорости v становится независимым и принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\nu \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\rho} P_2 - g \sin \alpha \sin \beta.$$

Продольная компонента скорости u , вообще говоря, может зависеть от обеих горизонтальных координат. Однако структурный анализ уравнений и граничных условий показывает, что эту зависимость можно представить в виде конечного полиномиального разложения по поперечной координате y :

$$u(y, z) = U(z) + u_1(z) y + \frac{1}{2} u_2(z) y^2.$$

Здесь $U(z)$ описывает основной профиль продольной скорости, одинаковый во всех сечениях $y = \text{const}$, а функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ характеризуют линейную и квадратичную неоднородность

течения в поперечном направлении. Подстановка данного представления в исходные уравнения Навье – Стокса и выделение членов при одинаковых степенях z приводит к системе связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $U(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ и $v(z)$. Эта система и составляет основу для последующего аналитического решения.

3. Аналитическое решение

Построение аналитического решения начинается с последовательного интегрирования полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Процедура существенно упрощается благодаря тому, что уравнения оказываются расцепленными и могут решаться последовательно, начиная с наиболее простых.

Функция $u_2(z)$, определяющая квадратичную по z часть скорости, находится непосредственно из граничного условия для второй производной на верхней пластине. Интегрирование с учетом условия на нижней пластине дает линейный профиль:

$$u_2(z) = \frac{\Gamma}{h}z.$$

Этот результат имеет физический смысл: квадратичная неоднородность течения в поперечном направлении линейно нарастает по толщине слоя от нуля на нижней стенке до значения Γ на верхней, что согласуется с заданным значением второй производной.

Поперечная компонента скорости $v(z)$ удовлетворяет неоднородному уравнению второго порядка с постоянной правой частью. Его двукратное интегрирование с учетом граничных условий $v(0) = 0$ и $v(h) = W \sin \varphi$ приводит к квадратичному профилю:

$$v(z) = Az^2 + Bz,$$

где коэффициенты A и B выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$A = \frac{1}{2\nu} \left(\frac{P_2}{\rho} - g \sin \alpha \sin \beta \right), B = \frac{W \sin \varphi}{h} - Ah.$$

Коэффициент A пропорционален результирующей движущей силе в поперечном направлении, представляющей собой разность между градиентом давления P_2/ρ и проекцией силы тяжести $g \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$. Знак A определяет направление выпуклости параболического профиля $v(z)$.

Функция $u_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu \frac{d^2 u_1}{dz^2} = v(z)u_2(z).$$

Подстановка выражений для $v(z)$ и $u_2(z)$ превращает правую часть в кубический полином от z . Двукратное интегрирование этого уравнения с учетом однородных условий на нижней пластине (производные от u_1 не заданы, но естественно положить $u_1(0) = 0$, так как при $z = 0$ и $y \neq 0$ течение не может иметь особенность) и условия для первой производной на верхней пластине $u_1'(h) = 0$ (вытекающего из структуры граничных условий для полной скорости u) дает решение в виде полинома пятой степени:

$$u_1(z) = C_5 z^5 + C_4 z^4 + C_1 z.$$

Явные выражения для коэффициентов через основные параметры имеют вид

$$C_5 = \frac{A\Gamma}{20\nu h}, C_4 = \frac{B\Gamma}{12\nu h}, C_1 = \frac{\Omega}{h} - \frac{\Gamma}{h} \left(\frac{Ah^4}{20} + \frac{Bh^3}{12} \right).$$

Коэффициенты C_5 и C_4 прямо пропорциональны произведению Γ (квадратичный сдвиг) на поперечные движущие силы A и B , что подчеркивает нелинейный характер взаимодействия этих факторов. Свободный коэффициент C_1 обеспечивает выполнение граничного условия для $\partial u/\partial z$ на верхней пластине.

Наконец, основная функция $U(z)$ находится из наиболее сложного уравнения:

$$v \frac{d^2 U}{dz^2} = v(z)u_1(z) + \frac{P_1}{\rho} - g \sin \alpha \cos \beta - \nu u_2(z).$$

Правая часть этого уравнения после подстановки $v(z)$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ представляет собой полином седьмой степени относительно z . Его двукратное интегрирование приводит к полиному девятой степени:

$$U(z) = \sum_{k=0}^9 D_k z^k.$$

Коэффициенты D_k выражаются через уже вычисленные A , B , C_1 , C_4 , C_5 и исходные параметры P_1 , ν , g , α , β . Две константы интегрирования, возникающие при решении уравнения второго порядка, однозначно определяются из граничных условий для самой функции $U(z)$: $U(0) = 0$ (неподвижная нижняя пластина) и $U(h) = W \cos \varphi$ (тангенциальная компонента скорости верхней пластины). Окончательное выражение для $U(z)$ является громоздким, но принципиально важным свойством является его полиномиальность и явная зависимость от всех физических параметров задачи.

Таким образом, построено полное аналитическое решение обобщенной задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля в замкнутой форме. Решение удовлетворяет всем уравнениям и граничным условиям, что может быть проверено прямой подстановкой. Полиномиальный характер решения делает его исключительно удобным для последующего анализа, в частности, для исследования нулей функции $U(z)$, которые определяют структуру течения. Нули $U(z)$ внутри интервала $(0, h)$ соответствуют поверхностям, где продольная скорость обращается в нуль. Эти поверхности разделяют слои жидкости, движущиеся в противоположных направлениях. Количество, расположение и кратность этих нулей являются ключевыми характеристиками, определяющими режим течения.

4. Результаты и обсуждение

На основе полученного точного аналитического решения проведено исследование структуры течения и условий формирования многослойных конфигураций. Основное внимание уделено анализу профиля основной скорости $U(z)$ и зависимости количества его внутренних нулей от безразмерных комбинаций управляющих параметров. Для систематизации результатов введен ряд определяющих безразмерных чисел. Наряду с классическими числами Рейнольдса $Re = Wh/\nu$ и Фруда $Fr = W/\sqrt{gh}$, характеризующими относительную роль инерции и гравитации, ключевыми оказались следующие параметры: $\Pi_1 = P_1 h / (\rho W^2)$ (отношение напорной силы к инерционному переносу), $\Pi_2 = P_2 h / (\rho W^2)$ (поперечный аналог Π_1), $\Omega^* = \Omega h / W$ (безразмерный линейный сдвиг), $\Gamma^* = \Gamma h^2 / W$ (безразмерный квадратичный сдвиг), а также геометрические параметры α и β и угол φ . Комбинации этих параметров определяют баланс сил и, следовательно, структуру течения.

В результате параметрического анализа выделены три качественно различных режима, соответствующих течению с одним (классический случай), двумя и тремя внутренними нулями функции $U(z)$. На рис. 2 представлены характерные профили скорости для этих режимов. На рис. 2 а показан профиль с единственным нулем на нижней границе. Этот режим реализуется, когда все движущие факторы (движение верхней пластины, градиенты давления, сила тяжести) действуют согласованно в одном направлении или когда их конкуренция

недостаточна для обращения скорости в нуль внутри объема. Течение является однонаправленным по всей толщине, за исключением пристенного слоя вблизи нижней пластины, где вязкое трение приводит к его торможению и смене знака.

Рисунок 2 б демонстрирует более сложный случай с двумя внутренними нулями. В этом режиме в толще жидкости формируются три отчетливые зоны. Две крайние зоны (прилегающие к пластинам) характеризуются положительной скоростью (направление совпадает с движением верхней пластины), а центральная зона представляет собой слой обратного течения с отрицательной скоростью. Физически такая структура возникает при достаточно сильной конкуренции между факторами. Например, если градиент давления P_1 направлен против движения пластины, а его величина превышает некоторое критическое значение, он может «продавить» обратное течение в центральной части слоя, преодолевая вязкий перенос импульса от движущейся границы. Нули скорости соответствуют поверхностям раздела между этими зонами.

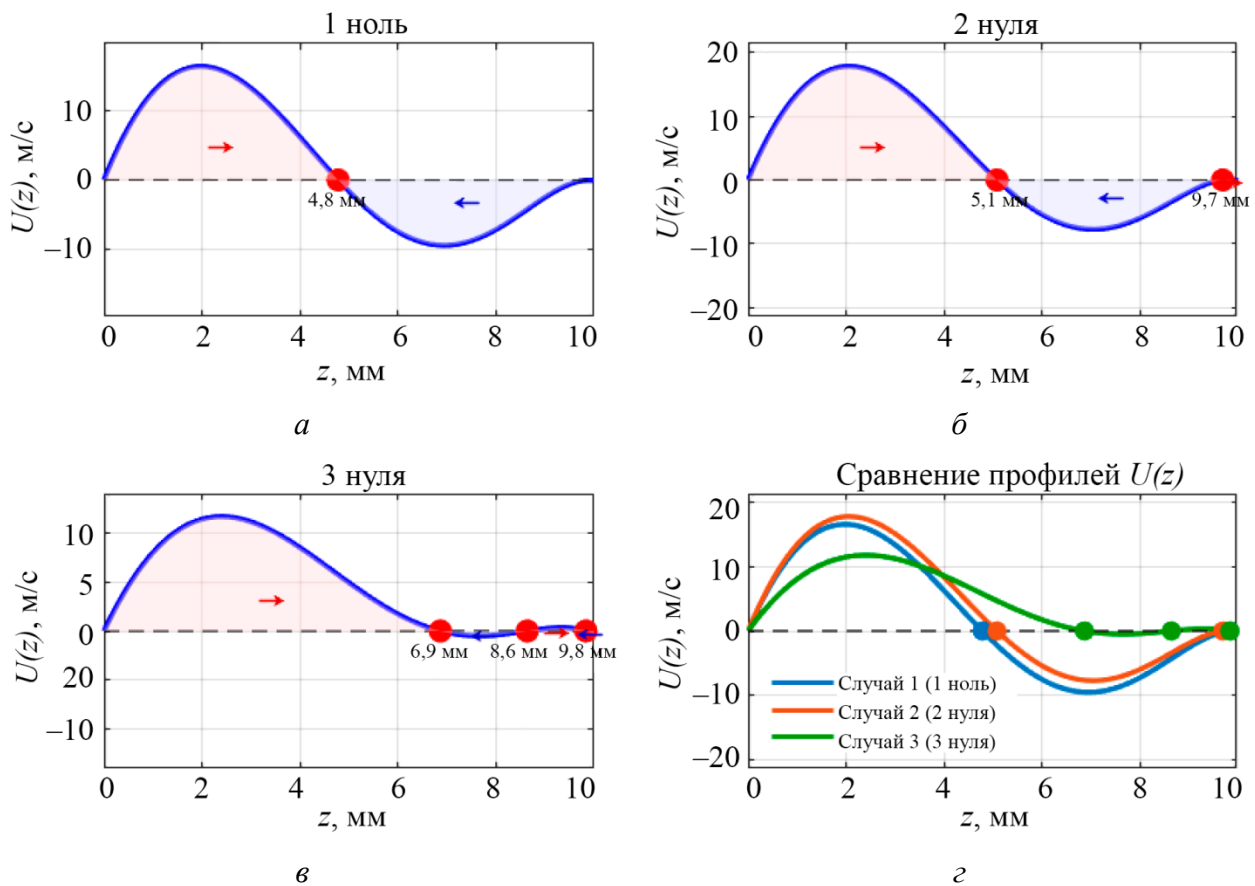


Рис. 2. Профили продольной скорости $U(z)$ для трех характерных случаев: классический профиль с одним нулем на нижней границе (а); профиль с двумя внутренними нулями, разделяющими три зоны течения (б); профиль с тремя внутренними нулями, соответствующий четырем чередующимся зонам прямого и обратного течения (в); сравнительный анализ всех трех случаев (г)

Наиболее интересный и сложный режим, впервые обнаруженный в рамках данной постановки, представлен на рис. 2 в. Профиль $U(z)$ имеет три внутренних нуля, что соответствует чередованию четырех слоев с попеременно меняющимся направлением течения. Анализ показывает, что для реализации этого режима требуется тонкий баланс нескольких факторов. Во-первых, необходима значительная по величине и правильно ориентированная конкуренция между градиентом давления и движением границы. Во-вторых, существенную роль

начинают играть нелинейные эффекты, связанные с параметром квадратичного сдвига Γ . Фактически член $u_2(z)y^2/2$ в разложении скорости, хотя и не влияет на профиль на линии $y = 0$, изменяет структуру уравнений для $U(z)$ через произведение $v(z)u_2(z)$ в правой части. Это приводит к появлению в решении полиномиальных членов высоких степеней, способных создавать дополнительные экстремумы и нули. Сравнительный анализ всех трех профилей на одном графике (рис. 2 *з*) наглядно иллюстрирует эволюцию структуры от простой (монотонной) к сложной (осциллирующей) при изменении управляющих параметров.

Пространственная структура течения для наиболее сложного случая с тремя нулями детально исследована на рис. 3. На рис. 3 *а* представлена карта изолиний продольной скорости $V_x(y, z) = U(z) + u_1(z)y + u_2(z)y^2/2$ в плоскости поперечного сечения yz . Жирная белая линия соответствует изолинии $V_x = 0$. Видно, что в центральной части области ($y \approx 0$) поверхности нулевой скорости практически плоские и параллельны пластинам, что соответствует одномерному профилю $U(z)$. Однако по мере удаления от центральной оси наблюдается отчетливое искривление этих поверхностей. Это является прямым следствием неоднородности течения в поперечном направлении, описываемой функциями $u_1(z)$ и $u_2(z)$. Искривление приводит к тому, что толщина слоев с заданным направлением течения становится функцией координаты y .

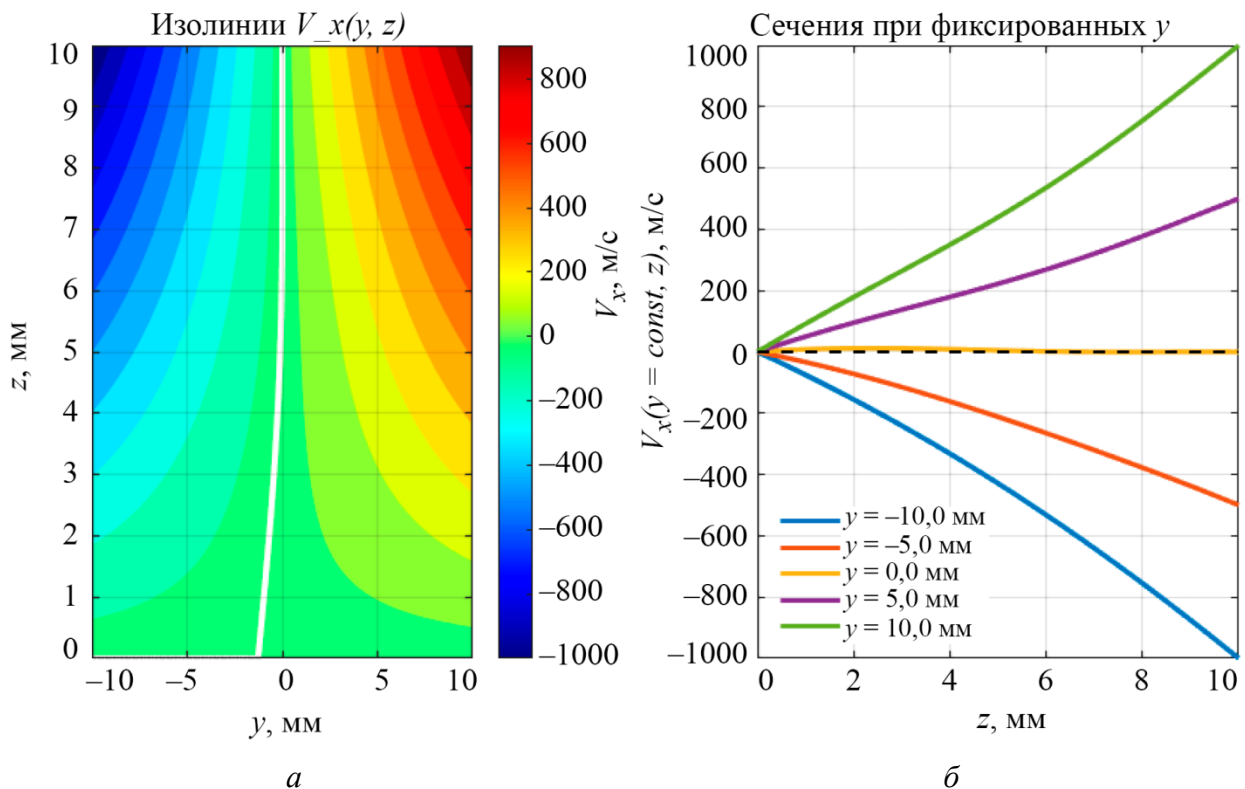


Рис. 3. Пространственная структура поля скоростей $V_x(y, z)$ для случая с тремя нулями: изолинии продольной скорости в плоскости yz , белая линия соответствует условию $V_x = 0$ (*а*); сечения поля скоростей при фиксированных значениях координаты y (*б*)

Для количественной оценки этой неоднородности на рис. 3 *б* построены сечения поля скорости $V_x(y = \text{const}, z)$ при нескольких фиксированных значениях y . Видно, что качественная четырехслойная структура сохраняется во всем диапазоне y , однако амплитуда скорости в каждом слое, а также точное положение нулей плавно изменяются с изменением y . Наибольшая амплитуда наблюдается в центральном сечении $y = 0$, что согласуется с тем, что граничные условия заданы симметрично, а основные движущие силы не зависят от y . Уменьшение амплитуды к краям является следствием роста влияния квадратичного члена

$u_2(z)y^2/2$, который может приводить к дополнительному торможению или ускорению потока в зависимости от знака $u_2(z)$.

Для глубокого понимания динамики формирования многослойных структур ключевое значение имеет анализ производных профиля скорости $U(z)$. На рис. 4 а представлены первые производные dU/dz для трех основных режимов. Производная характеризует градиент скорости и, следовательно, величину вязких напряжений $\tau_{xz} = \mu dU/dz$. В точках, где $U(z) = 0$, значение производной определяет характер перехода через ноль. Если производная положительна, то при увеличении z скорость меняет знак с минуса на плюс; отрицательная производная указывает на обратный переход. В случае с тремя нулями наблюдается четкое чередование знаков производной в точках нуля, что подтверждает последовательную смену направления течения от слоя к слою. Особый интерес представляют экстремумы производной, которые соответствуют зонам максимальных касательных напряжений.

Еще более информативным является анализ второй производной d^2U/dz^2 , представленный на рис. 4 б. Эта величина связана с кривизной профиля скорости и определяет источник член в уравнении для $U(z)$. Нули второй производной соответствуют точкам перегиба профиля, где кривизна меняет знак. На графике вертикальными линиями отмечены положения нулей самой функции $U(z)$. Видно, что вблизи этих нулей вторая производная часто принимает экстремальные значения, что свидетельствует о резком изменении градиента скорости в тонких переходных слоях между зонами с разным направлением течения. Для режима с тремя нулями график второй производной имеет сложный, осциллирующий характер с несколькими экстремумами и нулями, что отражает богатую внутреннюю структуру течения.

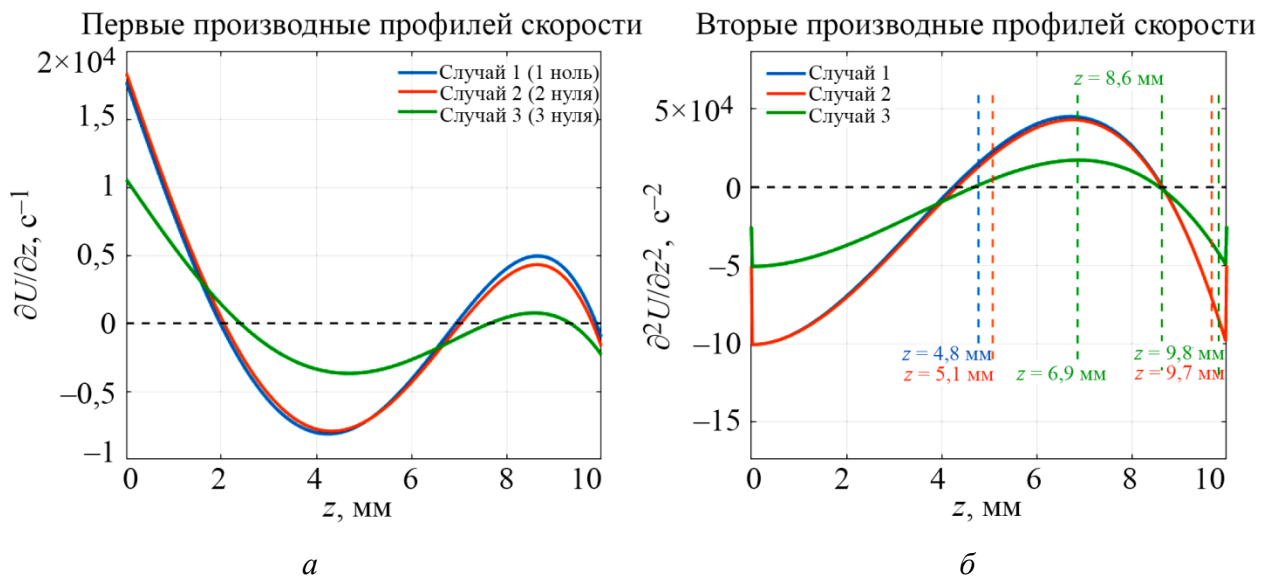


Рис. 4. Анализ производных профилей скорости: первые производные $\partial U/\partial z$ для трех случаев (а); вторые производные $\partial^2 U/\partial z^2$, вертикальные линии отмечают положение нулей функции $U(z)$ (б)

Параметрические исследования, проведенные путем варьирования безразмерных чисел в широких пределах, позволили установить основные закономерности перехода между режимами. Ключевую роль в увеличении числа нулей играет безразмерный градиент давления Π_1 . При фиксированных прочих параметрах существует критическое значение Π_1^{cr1} , при котором монотонный профиль с одним нулем теряет устойчивость и возникает первая пара дополнительных нулей, соответствующих зоне обратного течения в центральной части. При дальнейшем увеличении $|\Pi_1|$ эта зона расширяется, а при достижении второго критического значения Π_1^{cr2} возникает вторая пара нулей, что приводит к четырехслойной структуре. Зна-

чения критических параметров существенно зависят от других чисел, в частности от Ω^* и Γ^* . Параметр линейного сдвига Ω^* оказывает сильное влияние на наклон профиля вблизи верхней пластины. Положительные значения Ω^* (ускорение жидкости у границы) способствуют подавлению обратных течений и увеличению критического Π_1^{cr} . Отрицательные значения Ω^* (торможение у границы), напротив, благоприятствуют возникновению многослойности. Параметр квадратичного сдвига Γ^* модулирует нелинейные взаимодействия. При $\Gamma^* > 0$ он может способствовать стабилизации дополнительных нулей, делая четырехслойную структуру существующей в более широком диапазоне параметров.

Обсуждение физических механизмов позволяет сформулировать следующую картину. Многослойное течение возникает как результат суперпозиции и конкуренции нескольких элементарных течений: однородного сдвига (Куэтта), параболического течения, вызванного градиентом давления (Пуазейля), и течения, индуцированного силой тяжести. Нелинейные граничные условия, включающие Ω и Γ , фактически задают «начальные условия» для распределения напряжения и его градиента на верхней границе, что эквивалентно наличию дополнительных распределенных сил в приграничном слое. Когда результирующая этих распределенных сил направлена против основного потока, создаваемого движением пластины, в объеме жидкости могут формироваться локализованные зоны с отрицательной скоростью. Высокие степени полинома в решении $U(z)$ обеспечивают достаточную «гибкость» профиля для размещения нескольких таких зон. Интересно отметить аналогию с задачами конвекции в горизонтальном слое с заданными потоками тепла на границах, где также могут возникать многослойные структуры с чередующимися ячейками.

5. Заключение

В настоящей работе впервые получено полное аналитическое решение обобщенной задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля с граничными условиями, включающими значения скорости и ее производных на движущейся границе. На основе этого точного решения строго доказана возможность существования стационарных ламинарных течений с двумя и тремя внутренними нулями продольной скорости, что соответствует двух- и трехслойной стратификации потока. Проведена систематическая классификация режимов течения и установлены параметрические условия, разделяющие области существования режимов с различным количеством внутренних нулей.

Основным теоретическим достижением работы является доказательство принципиальной возможности формирования в ламинарном сдвиговом течении устойчивых многослойных структур с несколькими поверхностями раздела, на которых скорость обращается в нуль. Показано, что ключевым фактором, приводящим к такой стратификации, является конкуренция между движением верхней пластины, градиентом давления и силой тяжести. При этом нелинейные граничные условия, учитывающие сдвиг и кривизну профиля скорости на границе, играют существенную роль, модулируя пороговые значения параметров перехода между режимами.

Введенные в работе безразмерные параметры Π_1 , Π_2 , Ω^* , Γ^* позволили провести систематическую классификацию режимов течения и построить качественные диаграммы существования. Установлено, что увеличение безразмерного градиента давления $|\Pi_1|$, направленного против движения пластины, является основным механизмом генерации дополнительных нулей скорости. Параметры Ω^* и Γ^* , характеризующие детали граничного взаимодействия, оказывают значительное влияние на устойчивость многослойных конфигураций и ширину параметрических областей их существования.

Детальный анализ пространственной структуры поля скоростей выявил, что многослойная стратификация наиболее выражена в центральной части течения, а по мере удаления от оси симметрии наблюдается плавное искривление поверхностей нулевой скорости и уменьшение амплитуд пульсаций. Это является следствием неоднородности течения в по-

перечном направлении, описываемой полиномиальными функциями $u_1(z)$ и $u_2(z)$. Анализ первых и вторых производных профиля скорости позволил идентифицировать зоны максимальных касательных напряжений и точки перегиба, что дает полное представление о динамике течения в каждом слое.

Полученные результаты имеют значительный фундаментальный и прикладной потенциал. С теоретической точки зрения работа расширяет понимание возможных режимов в классической задаче гидродинамики и демонстрирует эффективность использования обобщенных граничных условий для моделирования сложных физических взаимодействий на границах. С практической стороны, установленные количественные критерии могут быть использованы для целенаправленного управления структурой течения в микрофлюидных устройствах, например, для создания контролируемых зон смешивания или сепарации в ламинарных условиях. В технологии нанесения покрытий понимание условий возникновения обратных течений важно для предотвращения дефектов и обеспечения однородности формируемого слоя.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: анализ линейной устойчивости полученных многослойных течений по отношению к трехмерным возмущениям; учет тепловых эффектов и массопереноса, которые могут приводить к возникновению новых типов неустойчивостей; исследование нестационарных режимов и динамики формирования многослойных структур; экспериментальная верификация теоретических результатов на современных установках по визуализации течений. Развитие представленных подходов открывает путь к созданию новых методов активного управления течениями в микро- и наномасштабах, основанных на тонкой настройке граничных условий и внешних полей.

Литература

1. Couette M. Études sur le frottement des liquids // *Annales de Chimie et de Physique*. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
2. Poiseuille J. L. Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres-petits diametres. – Imprimerie Royale, 1844. – 111 p.
3. Nusselt, W. Das Grundgesetz des Wärmeüberganges // *Gesundheits-Ingénieur*. – 1915. – Vol. 38. – P. 477–482, 490–496.
4. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. – Cambridge University Press, 2000. – 658 p.
5. Kundu P. K., Cohen I. M., Dowling D. R. *Fluid mechanics*. – 5th ed. – Academic Press, 2012. – 892 p.
6. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2017. – 805 p. – DOI: 10.1007/978-3-662-52919-5.
7. Pozrikidis C. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. – 2nd ed. – Oxford University Press, 2011. – 1296 p.
8. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2022. – Vol. 56. – P. 662–668. – DOI: 10.1134/S0040579522050207.
9. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2022. – Vol. 18 (3). – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
10. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. – 2021. – Vol. 25 (3). – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.

11. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2004. – Vol. 36. – P. 381–411. – DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
12. Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: fluid physics at the nanoliter scale // *Reviews of Modern Physics*. – 2005. – Vol. 77. – P. 977–1026. – DOI: 10.1103/RevModPhys.77.977.
13. Scriven L. E. Physics and applications of DIP coating and spin coating // *MRS Online Proceedings Library*. – 1988. – Vol. 121. – P. 717–729. – DOI: 10.1557/PROC-121-717.
14. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. – New York, NY : Springer, 2013. – 710 p.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow // *Fluid Dynamics*. – 2016. – Vol. 51. – P. 581–587. – DOI: 10.1134/S001546281605001X.
16. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // *Нелинейная динамика*. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182.
17. Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Layered three-dimensional nonuniform viscous incompressible flows // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2018. – Vol. 52. – P. 765–770. – DOI: 10.1134/S0040579518050391.
18. White F. M. *Viscous Fluid Flow*. – 3rd ed. – McGraw-Hill, 2005. – 656 p.
19. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
20. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53 (4). – 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // *Symmetry*. – 2023. – Vol. 15 (10). – P. 1825. – DOI 10.3390/sym15101825.
22. Drazin P. G., Reid W. H. *Hydrodynamic Stability*. – 2nd ed. – Cambridge University Press, 2004. – 605 p.
23. Doedel E., Keller H. B., Kernevez J. P. Numerical analysis and control of bifurcation problems (I): bifurcation in finite dimensions // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 1991. – 01 (03). – P. 493–520. – DOI: 10.1142/S0218127491000397.
24. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. – 2nd ed. – Mineola, New York : Dover Publications, 2000.
25. Бурмашева Н. В., Дьячкова А. В., Просвирыков Е. Ю. Неоднородное течение Пуазейля // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 77. – С. 68–85. – DOI 10.17223/19988621/77/6.
26. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // *Symmetry*. – 2023. – Vol. 15 (9). – 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
27. Горулева Л. С., Просвирыков Е. Ю. Неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазейля при движении нижней границы горизонтального слоя // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2021. – Т. 23 (4). – С. 403–411. – DOI: 10.15350/17270529.2021.4.36.
28. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction / N. Burmasheva, S. Ershkov, E. Prosviryakov, D. Leshchenko // *Fluids*. – 2023. – Vol. 8 (4). – P. 123. – DOI: 10.3390/fluids8040123.
29. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Труды ИММ УрО РАН*. – 2020. – Т. 26 (2). – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
30. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Волны Стокса в завихренной жидкости // *Нелинейная динамика*. – 2014. – Т. 10 (3). – С. 309–318.

31. Mathematical modeling of the influence of the Karman vortex street on mass transfer in electromembrane systems / A. Uzdenova, A. Kovalenko, E. Prosviryakov, M. Urtenov // *Membranes*. – 2023. – Vol. 13 (4). – P. 394. – DOI: 10.3390/membranes13040394.
32. Riley N. Steady streaming // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2001. – Vol. 33. – P. 43–65. – DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
33. Shankar P. N., Deshpande M. D. Fluid mechanics in the driven cavity // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2000. – Vol. 32. – P. 93–136. – DOI: 10.1146/annurev.fluid.32.1.93.