Revised: 30.12.2022
Accepted: 20.02.2023
Accepted: 28.02.2023
DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053

EXACT SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR DESCRIBING INHOMOGENEOUS ISOBARIC VERTICAL VORTEX FLUID FLOWS IN REGIONS WITH PERMEABLE BOUNDARIES

L. S. Goruleva[1, 2, a)] and E. Yu. Prosviryakov[1, 2, b), *]

[1]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*
[2]*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

[a)] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[b)] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

[*]Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375 3576; fax: +7 (343) 374 5330

A family of exact solutions to the Navier–Stokes equations is constructed to describe nonuniform two-dimensional fluid motions. The superposition of the main unidirectional flow with the secondary flow is considered. The secondary flow is determined by suction or injection through permeable boundaries. This class of exact solutions is obtained by multiplicative and additive separation of variables. The flow of a viscous incompressible fluid is described by a polynomial of the horizontal (longitudinal) coordinate. The polynomial coefficients are functions of the vertical (transverse) coordinate and time. They are determined by a chain of homogeneous and inhomogeneous parabolic partial differential equations with a convective term. In the case of a steady flow, it is described by a system of ordinary differential equations with constant coefficients. An algorithm for integrating a system of ordinary differential equations for studying the steady motion of a viscous fluid is presented. In this case, all the functions defining the velocity are quasipolynomials since the system of ordinary differential equations has an Euler-form exact solution.

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, suction, injection, permeable boundaries, nonuniform flow.

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790140-5.

References

1. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, No. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
2. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p.
3. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, No. 1, pp. 6–76. (In Russian).
4. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu, Burmasheva N.V, Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, No. 4, 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.

5. Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, vol. 42 (11S), pp. 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
6. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
7. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, iss. 2, pp. 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: DREAM_Issue_2_2021_Burmasheva_N.V._et_al._030_051.pdf
8. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, vol. 2, pp. 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
9. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
10. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Camb. Philo. Trans*., 1851, vol. 9, pp. 8–106.
11. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech*., 2002, vol. 464, pp. 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.
12. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, iss. 3, pp. 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: DREAM_Issue_3_2022_Goruleva_L.S._et_al._047_060.pdf
13. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, vol. 34, 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.
14. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, vol. 34, 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
15. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, No. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
16. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of Navier-Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy IMM UrO RAN*, 2020, vol. 26, No. 2, pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87. (In Russian).
17. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).
18. Prosviryakov E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, No. 1, pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
19. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, No. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
20. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, vol. 10, No. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
21. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
22. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, No. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

23. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2023. DOI: 10.1134/S1063785022090024.
24. Prosviryakov E.Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid. *CEUR WorkshopProceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 164–172. Available at: http://ceur-ws.org/Vol1825/p21.pdf
25. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15 (3), pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
26. Privalova V.V., ProsviryakovE.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, No. 2, pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20. (In Russian).
27. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm. Un-ty Publ., 2006, 155 p. (In Russian).
28. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1953, vol. 24, No. 9, pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476.
29. Yuan S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, vol. 27, iss. 3, pp. 267. DOI: 10.1063/1.1722355.
30. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. *Trans. ASME*, 1956, vol. 78, No. 4, pp. 719–724.
31. Sellars J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, vol. 26, No. 4, pp. 489–490. DOI: 10.1063/1.1722024.
32. Berman A.S. Concerning laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, vol. 27, No. 12, pp. 1557. DOI: 10.1063/1.1722307.
33. Regirer S.A. Approximate theory of the flow of a viscous incompressible liquid in pipes with porous walls. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Matematika*, 1962, No. 5, pp. 65–74.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, IPMekh RAN Publ., 2020, 384 p. (In Russian).
35. Polyanin A.D. Exact generalized separable solutions of the Navier–Stokes equations. *Doklady Akademii Nauk*, 2001, vol. 380, No. 4, pp. 491–496. (In Russian).
36. Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics. *Matematicheskoe Modelirovanie i Chislennye Metody*, 2019, No. 1, pp. 65–97. DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597. (In Russian).
37. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional separable solutions of two classes of nonlinear mathematical physics equations. *Doklady Akademii Nauk*, 2019, vol. 486, No. 3, pp. 287–291. DOI: 10.31857/S0869-56524863287-291. (In Russian).
38. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Boca Raton, London, New York, Chapman & Hall/CRC Press, 2004, 840 p. DOI: 10.1201/9780203489659.

Подана в журнал: 30.12.2022
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Л. С. Горулева[1, 2, а)], Е. Ю. Просвиряков [1, 2, б), *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
[2] *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования*
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

[а)] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[б)] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

[*]Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: +7 (343) 374-53-30

В статье построено семейство точных решений уравнений Навье–Стокса для описания неоднородных двумерных движений жидкости. Рассматривается суперпозиция основного однонаправленного потока с вторичным течением. Вторичное течение определяется отсосом или вдувом через проницаемые границы. Данный класс точных решений получен методом разделения переменных мультипликативным и аддитивным способом. Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается полиномом от горизонтальной (продольной) координаты. Коэффициенты полинома являются функциями от вертикальной (поперечной) координаты и времени. Они определяются цепочкой однородных и неоднородных уравнений в частных производных параболического типа с конвективным слагаемым. В случае установившегося течения оно описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведен алгоритм интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для изучения установившегося движения вязкой жидкости. В этом случае все функции, определяющие скорость, являются квазиполиномами из-за того, что система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет точное решение в форме Эйлера.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье–Стокса, отсос, вдув, проницаемые границы, неоднородное течение.

1. Введение

Однонаправленные течения вязкой несжимаемой жидкости – это движения среды с диссипацией, описываемые посредством одной компоненты трехмерного вектора скорости $\boldsymbol{V} = (V_x, 0, 0)$ [1–8]. Одномерные по скорости течения жидкости стали предметом изучения математиков, механиков и физиков, поскольку в этом случае система, состоящая из уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности (несжимаемости), сводится к следующему двумерному уравнению типа теплопроводности размерности $(2+1)$ [7, 8]:

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right).$$

Традиционно исследуется не уравнение, записанное выше, а его частный случай – одномерное уравнение [1, 2, 4]

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}.$$

При помощи данного уравнения изучают неустановившиеся движения жидкости Куэтта, Стокса и другие течения, индуцированные различными типами начально-краевых условий [1, 2, 4]. Точные решения Куэтта, первой и второй задач Стокса описывают слоистые (сдвиговые) течения, профиль скорости которых зависит только от одной координаты z (вертикальной или поперечной). Тогда, как видно выше, можно уже для однонаправленных потоков исследовать влияние пространственной неоднородности на структуру гидродинамического потока [1, 2, 4].

Точные решения для неоднородных изобарических однонаправленных течений вязкой несжимаемой жидкости были построены в статье [7]. В научной работе [8] были получены точные решения типа Пуазейля и Куэтта–Пуазейля для неоднородных однонаправленных течений. Точные решения, анонсированные в [7, 8], оказались полезными для построения новых классов точных решений уравнений Навье–Стокса, поскольку позволили обнаружить качественные эффекты, наблюдаемые ранее в двумерных или трехмерных течениях [12–16]. Отметим, что топология однонаправленного поля скоростей для одномерного неоднородного течения типа Куэтта позволила описать стратификацию с несколькими точками покоя [12]. Для сдвиговых неоднородных течений аналогичные результаты были получены недавно [17–28]. Таким образом, необходимо продолжать находить новые точные решения уравнений Навье–Стокса для их использования в теории и практике, а также в построении новой теории гидродинамической устойчивости.

В данной статье рассматривается построение класса точных решений для изобарических неоднородных течений с отсосом и вдувом жидкости через проницаемые границы. Полагается, что вертикальная скорость жидкости постоянна. Это допущение физически обосновано для многих технических и физических процессов с учетом проницаемости границ области течения [28, 29]. Впервые задача о влиянии вторичного поперечного течения на структуру фонового потока начала изучаться в [30], а продолжение исследований можно проследить по пионерским работам [31–35]. К настоящему времени появилась возможность аналитического исследования течений жидкости с проницаемыми границами, что важно для решения задач гидродинамики от наноуровня до крупномасштабных течений океанов и струй в астрофизических движениях плазмы и различных газов.

2. Постановка задачи

Движение вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении в бесконечном горизонтальном слое описывается векторным уравнением Навье–Стокса и скалярным уравнением неразрывности (несжимаемости) [7, 8]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V},\ \nabla)\boldsymbol{V} = \nu\Delta\boldsymbol{V}, \tag{1}$$

$$\left(\nabla,\ \boldsymbol{V}\right)=0. \tag{2}$$

В уравнении переноса момента импульса (1) и уравнении неразрывности (несжимаемости) (2) введены стандартные обозначения: $\boldsymbol{V}=\left(V_x,\ V_y,\ V_z\right)$ – вектор скорости; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; $\nabla=\left(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z\right)$ – трехмерный оператор Гамильтона; $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ – трехмерный оператор Лапласа; круглые скобки в уравнении (1) определяют скалярное произведение.

Далее будем рассматривать двумерные течения жидкости с полем скоростей, которое задается вектором

$$\boldsymbol{V}=\left(V_x\left(x,\ y,\ z,\ t\right),\ 0,\ w\right). \tag{3}$$

Здесь w – вертикальная (поперечная) скорость жидкости в бесконечном горизонтальном слое жидкости, которая является постоянной. Соответственно, скорость $V_x\left(x,\ y,\ z,\ t\right)$ называется горизонтальной (продольной).

После подстановки вектора скорости (3) в уравнения (1) и (2) получим следующую систему [7, 8]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+w\frac{\partial V_x}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=0\,. \tag{5}$$

Система уравнений (4) и (5), в силу уравнения несжимаемости (5), редуцируется к одному уравнению типа теплопроводности с конвективным перемешиванием:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+w\frac{\partial V_x}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

с полем скоростей, зависящим от двух координат и времени,

$$\boldsymbol{V}=\left(V_x\left(y,\ z,\ t\right),\ 0,\ 0\right). \tag{7}$$

3. Некоторые частные решения

Точное решение уравнения (6) будет далее найдено при помощи модификаций метода разделенных переменных [34–38]. Отметим, что решением уравнения (7) является частный случай (7), описывающий сдвиговое (слоистое) течение типа Куэтта:

$$V_x=U\left(z,\ t\right). \tag{8}$$

В этом случае неизвестная функция U вычисляется посредством интегрирования уравнения типа теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+w\frac{\partial U}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Данное уравнение имеет фундаментальное решение [34, 38]:

$$U=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{(z-wt)}{4\nu t}\right).$$

В зависимости от рода краевых условий на границах $z=0$ и $z=h$ (h – толщина слоя), можно записать точное решение посредством функции Грина [29, 33].

Если рассматривается установившееся течение $V_x=U(z)$ вязкой несжимаемой жидкости, то точное решение определяется из обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\nu\frac{d^2U}{dz^2}-w\frac{dU}{dz}=0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое имеет два линейно независимых решений Эйлера:

$$U=C_1+C_2\exp\left(\frac{w}{\nu}\right).$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Аналогично поле скоростей

$$V_x=yu_1(z,\ t) \tag{9}$$

является точным решением уравнения (6). В силу линейности (6) сумма полей скоростей (8) и (9)

$$V_x=U(z,\ t)+yu_1(z,\ t) \tag{10}$$

есть точное решение для уравнения (6). Поставив суперпозицию решений (8) и (9) в формулу (6), получим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t}+y\frac{\partial u_1}{\partial t}+w\left(\frac{\partial U}{\partial z}+y\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)=\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right).$$

Скорость U и пространственное ускорение u_1 определяются после интегрирования системы изолированных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}+w\frac{\partial U}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+w\frac{\partial u_1}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}.$$

Данная система легко интегрируется аналогично тому, как было получено точное решение для поля скоростей (8).

В статьях [7, 8] было показано, что при $w=0$ функция вида $\frac{y^2}{2}u_2(z,\ t)$ не является точным решением (6).

Рассмотрим теперь сумму решения (10) и нелинейного слагаемого вида $\frac{y^2}{2}u_2(z,\ t)$:

$$V_x=U(z,\ t)+yu_1(z,\ t)+\frac{y^2}{2}u_2(z,\ t). \tag{11}$$

Этот многочлен удовлетворяет этому уравнению. Неизвестные функции в представлении поля скоростей вычисляются из системы уравнений в частных производных типа теплопроводности с конвективным перемешиванием:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+w\frac{\partial U}{\partial z}=\nu\left(u_2+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right);$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+w\frac{\partial u_1}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \tag{12}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+w\frac{\partial u_2}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Система (12) состоит из уравнений, которые слабо связаны между собой, что существенно облегчает аналитическое или численное интегрирование.

4. Класс полиномиальных решений

Рассмотрим далее точное решение уравнения (6) в виде многочлена специального вида относительно координаты y [7, 8]:

$$V_x=U(z,\ t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{y^k}{k!}u_k(z,\ t). \tag{13}$$

В формуле (13) для краткости записи введен факториал

$$k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(k-1)\cdot k=\prod_{i=1}^{k} i.$$

Посчитаем отдельно частные производные, необходимые для подстановки в уравнение типа теплопроводности (7):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{y^k}{k!}\frac{\partial u_k}{\partial t};$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k .$$

Подставим получившиеся выражения в уравнение (7):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} + w\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial z} \right) =$$

$$= \nu \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right];$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} + w \frac{1}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial z} \right) y^k =$$

$$= \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} y^k + \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{(k-2)!} y^{k-2} \right].$$

Если применить метод неопределенных коэффициентов, то данное уравнение можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial t} + w\frac{\partial U}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 \right); \\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + w\frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu \left(u_3 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right); \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + w\frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu \left(u_4 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right); \\
\ldots; \\
\frac{\partial u_{n-2}}{\partial t} + w\frac{\partial u_{n-2}}{\partial z} = \nu \left(u_n + \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial z^2} \right); \\
\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + w\frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial u_n}{\partial t} + w\frac{\partial u_n}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}. \ldots
\end{gathered} \tag{14}$$

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

Систему уравнений (14) целесообразно решать «снизу вверх» в силу ее линейной рекуррентной структуры. Отметим, что если в семействе точных решений (13) положить $n = 2$, т. е. ограничиться только квадратичными членами, то система (14) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w\frac{\partial U}{\partial z} = \nu\left(u_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + w\frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + w\frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Получившаяся система полностью совпадает с приведенной выше системой (12), определяющей компоненты решения (11).

Проиллюстрируем рекуррентный способ интегрирования для описания установившихся течений для поля скоростей (11), которое имеет вид

$$V_x = U(z) + yu_1(z) + \frac{y^2}{2}u_2(z).$$

В этом случае система уравнений в частных производных типа теплопроводности (12) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\nu\frac{d^2u_2}{dz^2} = w\frac{du_2}{dz};$$

$$\nu\frac{d^2u_1}{dz^2} = w\frac{du_1}{dz};$$

$$\nu\left(u_2 + \frac{d^2U}{dz^2}\right) = w\frac{dU}{dz}.$$

Точное решение последней системы имеет вид

$$u_2 = C_2\exp\left(\frac{w}{\nu}z\right) + C_1;$$

$$U = \frac{\nu}{w}\left(C_2 z\exp\left(\frac{w}{\nu}z\right) - C_1 z\right) + C_3\exp\left(\frac{w}{\nu}z\right) + C_4;$$

$$u_1 = C_5\exp\left(\frac{w}{\nu}z\right) + C_6.$$

По аналогии с результатами, изложенными в [7, 8], можно выписать формулы для касательных напряжений и вектора завихренности неоднородного вертикально завихренного течения вязкой несжимаемой жидкости с вдувом или отсосом через проницаемые границы, которые естественным образом модифицируются. Ввиду тривиальности выкладок, они здесь не приводятся.

5. Заключение

В статье предложен новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса для описания нестационарного изобарического течения жидкости с учетом постоянной вертикальной (поперечной) скорости. Семейство точных решений является обобщенным (специальным) полиномом произвольного порядка от горизонтальной (продольной) координаты с коэффициентами, зависящими как от вертикальной координаты, так и от времени. Неизвестные функции определяются из решения системы уравнений параболического типа с конвективным слагаемым.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № АААА-А18-118020790140-5.

Литература

1. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, No. 5. – P. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
2. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
3. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
4. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. –Vol. 53, No. 4. – 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
5. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Appl. Mech. Rev. – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
6. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
7. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact Solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. URL: DREAM_Issue_2_2021_Burmasheva_N.V._et_al._030_051.pdf
8. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. –2022. – Vol. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
9. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
10. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.
11. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215. – DOI: 10.1017/S0022112002001003.
12. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: DREAM_Issue_3_2022_Goruleva_L.S._et_al._047_060.pdf
13. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // Physics Fluids. – 2022. – Vol. 34. – 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.

14. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34. – 123104 – DOI: 10.1063/5.0127990.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50, No. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
16. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26, вып. 2. – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
17. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
18. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53, No. 1. – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
19. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2015. – Вып. 4. – С. 50–54.
20. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10, вып. 2. – С. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.
21. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, No. 2. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.
22. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Vol. 60, No. 6. – P. 1031–1037. – DOI: 10.1134/S0021894419060075.
23. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // Technical Physics Letters. – 2023. – DOI: 10.1134/S1063785022090024.
24. Просвиряков Е. Ю. Слоистые градиентные стационарные течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости // CEUR WorkshopProceedings. – 2016. – Vol. 1825. – P. 164–172. – URL: http://ceur-ws.org/Vol1825/p21.pdf
25. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2019. – Vol. 15 (3). – P. 271–283. – DOI: 10.20537/nd190306.
26. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 230–242. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
27. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Изд-во Пермск. гос. ун-та, 2006.
28. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl.Phys. – 1953. – Vol. 24, No. 9. – P. 1232–1235. – DOI: 10.1063/1.1721476.
29. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27, iss. 3. – P. 267. – DOI: 10.1063/1.1722355 .
30. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Trans. ASME. – 1956. – Vol. 78, No. 4. – P. 719–724.
31. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers // J. Appl. Phys. –1955.– Vol. 26, No. 4. – P. 489–490. – DOI: 10.1063/1.1722024.
32. Berman A. S. Concerning laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27, No. 12. – P. 1557. – DOI: 10.1063/1.1722307.

33. Регирер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // Изв. вузов. Матем. – 1962. – № 5. – С. 65–74.
34. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : Изд-во ИПМех РАН, 2020. – 384 с.
35. Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 491–496.
36. Полянин А. Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // Мат. моделирование и численные методы. – 2019. – № 1. – С. 65–97. – DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597.
37. Полянин А. Д., Журов А. И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // Докл. АН. – 2019. – Т. 486, № 3. – С. 287–291. – DOI: 10.31857/S0869-56524863287-291.
38. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. – Boca Raton, London, New York : Chapman & Hall / CRC Press, 2004. – 840 p.