





Received: 30.12.2021
Revised: 17.02.2022
Accepted: 25.02.2022
DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.052-066

STAGNATION POINTS OF AN INHOMOGENEOUS SOLUTION DESCRIBING CONVECTIVE EKMAN FLOW IN THE OCEANIC EQUATORIAL ZONE

A. V. Gorshkov^{a),*} and E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-5741-3979>  alex55gor@mail.ru;
^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: alex55gor@mail.ru
 Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: 374 53 30

An inhomogeneous analytical solution describing a stratified large-scale isothermal Ekman–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in the equatorial zone is obtained. A set of stagnation points of this solution is studied. Temperature is set at the flow boundaries. Tangential stresses simulating the effect of wind are specified at the free boundary. The Navier slip conditions are specified on the solid surface. The solution is constructed in the form of functions, linear in horizontal coordinates, with the coefficients dependent on the vertical coordinate. The coefficients of the linear functions are obtained as polynomials. The condition of consistency of the overdetermined equation system describing the specified flow is obtained. The consistency condition imposes restrictions on the boundary conditions. It is shown that the set of stagnation points lies on a straight line.

Keywords: viscous fluid convection, Ekman flow, Coriolis force, equator, inhomogeneous solution.

References

1. Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics*, Berlin, New York, Springer, 1987.
2. Zyryunov V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techeniy* [Theory of steady-state oceanic currents]. L.: Gidrometeoizdat, 1985, 248 p. (In Russian).
3. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean Currents. *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, Bd. 2, no. 11.
4. Korotaev G.K., Mikhaylova E.N., Shapiro N.B. *Teoriya ekvatorialnykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World Ocean]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1986, 208 p. (In Russian).
5. Felzenbaum A.I. *Teoreticheskie osnovy i metody rascheta ustanovivshikhsya morskikh techeniy* [Theoretical Foundations and Methods for Calculating Steady Sea Currents]. AN SSSR Publ., 1960, 127 p. (In Russian).
6. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Ekman Convective Layer Flow of a Viscous Incompressible Fluid. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, No. 2, pp. 189–195. DOI: 10.1134/S0001433818020081.
7. Gorshkov A.V. Prosviryakov E.Yu. Convective flow in the solid rotation of a viscous incompressible fluid. *AIP Conference Proceedings*, 2017, 1915, 040020. DOI: 10.1063/1.5017368.
8. Ingel L.Kh., Aristov S.N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere. *Tr. In-ta Eksperim. Meteorol.*, 1996, No. 27 (162), pp. 142–157. (In Russian).

9. Gorshkov A.V. Prosviryakov E.Yu. Isobaric Vortex Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition // AIP Conference Proceedings, 2018, vol. 2053, 040030. DOI: 10.1063/1.5084468.
10. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, No. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
11. Ershkov Sergey V., Prosviryakov Evgeniy Yu., Burmasheva Natalya V., and Christianto Victor. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, No. 4, pp. 044501. DOI:10.1088/1873-7005/ac10f0.
12. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, No. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004. (In Russian).
13. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Couette Flows. *Nelin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
14. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushcheyasya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm. Gos. Univ. Publ., 2006, 154 p. (In Russian).
15. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, VyatGU Publ., 2011. (In Russian).
16. Aristov S.N., Shvarts K.G. Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, No. 1, pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
17. Neto C., Evans D., Bonaccorso E., Hans-Jürgen Butt and Vincent S.J. Craig Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, vol. 68, No. 12, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
18. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, No. 2 (28), pp. 35–44. (In Russian).

Подана в журнал: 30.12.2021





УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.052-066

ЗАСТОЙНЫЕ ТОЧКИ НЕОДНОРОДНОГО РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭКМАНА В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЗОНЕ ОКЕАНА

А. В. Горшков^{а),*}, Е. Ю. Просвиряков^{б)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-5741-3979>  alex55gor@mail.ru;
^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: alex55gor@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

В работе получено неоднородное аналитическое решение, описывающее слоистое крупномасштабное конвективное течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне. Исследуется множество застойных точек этого решения. На границах потока жидкости задана температура. На свободной границе заданы касательные напряжения, моделирующие воздействие ветра. На твердой поверхности заданы условия скольжения жидкости Навье.

Решение построено в виде функций, линейных по горизонтальным координатам с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты. Коэффициенты линейных функций получены в виде полиномов.

Получено условие совместности переопределенной системы уравнений, описывающей указанное течение. Условие совместности накладывает ограничения на граничные условия. Показано, что множество застойных точек лежит на прямой.

Ключевые слова: вязкая жидкость конвекция, течение Экмана, сила Кориолиса, экватор, неоднородное решение.

1. Введение

Геострофическое приближение, описывающее течение жидкости по поверхности Земного шара, построено на основе равновесия градиента давления жидкости и силы Кориолиса. Приводя к очень простым и изящным соотношениям, это приближение играет чрезвычайно важную роль. Но это приближение не работает в окрестности экватора, и в экваториальной области требуются более сложные динамические модели [1, 2].

Исследование экваториальных течений является одной из важных проблем океанологии и геофизической гидродинамики. К настоящему времени отправной точкой всех исследований в геофизической гидродинамике является точное решение Экмана [3], описывающее стационарное изобарическое течение жидкости по равномерно вращающейся поверхности.

Компоненты скорости течения жидкости получены в виде функций вертикальной пространственной координаты z . Обобщения сдвигового течения Экмана отражены в монографиях [1, 2, 4, 5] и статьях [6–12].

В работах [6–8, 11–15] были построены решения уравнений Навье–Стокса при различных граничных условиях. В этих решениях, как и в решении Экмана, компоненты скорости зависят только от вертикальной координаты z . При таком выборе представления скоро-

стей условие несжимаемости выполняется автоматически, и разрешающая система уравнений получается совместной.

В работах [10, 11] описаны классы решений, линейных по горизонтальным координатам. В работах [9, 13] построены частные случаи решений, описывающих завихренное движение жидкости, для которого условие несжимаемости выполняется автоматически.

В настоящей работе построено аналитическое решение, описывающее слоистое крупномасштабное конвективное течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне. Решение построено в виде функций, линейных по двум горизонтальным пространственным координатам с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты z . Получено условие совместности разрешающей системы дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Однородным будем называть решение, в котором компоненты скорости течения жидкости зависят только от вертикальной пространственной координаты z . Решение, в котором компоненты скорости зависят от горизонтальных координат и вертикальной координаты z , будем называть неоднородным. Слагаемые решения, не зависящие от горизонтальных координат, будем называть фоновыми. Система уравнений, описывающая неоднородное решение, в общем случае получается переопределенной. Для обеспечения разрешимости системы строится «условие совместности». Условие совместности накладывает ограничения на компоненты скоростей и, соответственно, на граничные условия.

Рассмотрим конвективное течение Экмана в экваториальной зоне. При этом полагается, что широта места φ мала и можно, приближенно, принять $\sin \varphi \approx 0$, $\cos \varphi \approx 1$. Введем локальную систему координат следующим образом: ось oz направлена вдоль радиуса Земли, ось oy – по касательной к меридиану в сторону Северного полюса, ось ox им перпендикулярна и направлена по касательной к экватору.

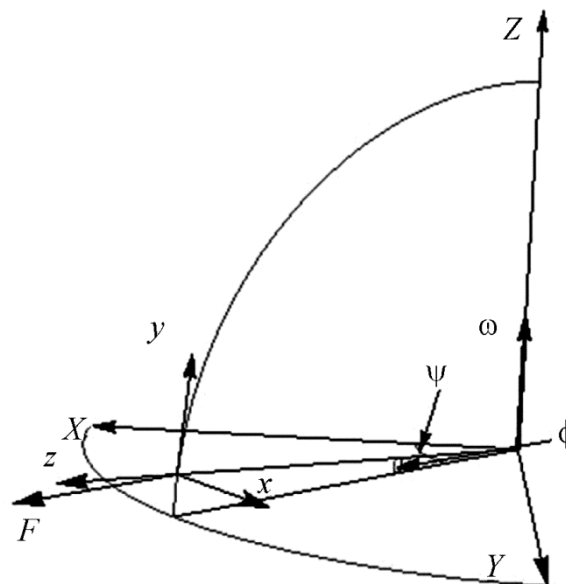


Рис. 1. Схема ориентации осей координат и векторов в экваториальной зоне

В локальной системе координат (x, y, z) при указанной широте ось вращения Земли параллельна оси oy . Далее будем рассматривать сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости, полагая $V_z = 0$. Стационарное крупномасштабное конвективное течение Экмана

вязкой несжимаемой жидкости с учетом двух компонент силы Кориолиса в безразмерных переменных описывается системой уравнений Навье–Стокса [1, 2, 9]:

$$\begin{aligned} \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta V_x; \\ \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \Delta V_y; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{2\delta V_x}{\text{Gr} \cdot \text{Ek}} + \frac{\delta}{\text{Gr}} T; \\ \text{Ra} \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \Delta^* T; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_x, V_y – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости V ; безразмерные горизонтальные координаты x и y определены характерным масштабом длины L , а поперечная координата z – толщиной слоя жидкости h ; $\delta = h/L$ – отношение масштабов длины; ν – кинематическая вязкость жидкости; β – коэффициент объемного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения; χ – коэффициент температуропроводности; T_m – разность максимальной и минимальной температур; Ω – угловая скорость вращения Земли; P – безразмерное приведенное давление; деленное на удвоенную кинетическую энергию; $V = g \beta T_m L^2 / \nu$ – характерный масштаб линейной скорости; $\text{Gr} = g \beta T_m L^3 / \nu^2$ – число Грасгофа; $\text{Ra} = \text{Pr Gr}$ – число Рэлея; $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля; $\text{Ek} = \text{Ro} / \text{Gr} = \nu / (L^2 \Omega)$ – число Экмана; $\text{Ro} = V / (L \Omega)$ – число Россби; оператор Лапласа в безразмерных переменных:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Сила Кориолиса параллельна оси oz локальной системы координат. Вектор скорости движения жидкости лежит в плоскости oxy (рис. 1).

Для системы (1) зададим следующие граничные условия. На границах слоя жидкости задана температура в виде линейной функции горизонтальных координат. На нижней поверхности, задаваемой уравнением $z = 0$;

$$T|_{z=0} = A_0 + xA_1 + yA_2, \quad (2)$$

где A_0 – значение фоновой температуры (можно принять равным нулю); A_1 и A_2 – компоненты граничного вектора градиента температуры, постоянные. На свободной поверхности, заданной уравнением $z = 1$, температура задана аналогично (2):

$$T|_{z=1} = B_0 + xB_1 + yB_2, \quad (3)$$

где B_0 – значение фоновой температуры; B_1 и B_2 – постоянные компоненты граничного вектора градиента температуры.

Предполагается, что жидкость скользит по твердой поверхности, и выполняется условие Навье [17, 18]:

$$\delta V_x|_{z=0} = a V_x'|_{z=0}, \quad \delta V_y|_{z=0} = a V_y'|_{z=0}. \quad (4)$$

Здесь штрихом обозначена частная производная соответствующей функции по переменной z .

На свободной поверхности заданы касательные напряжения [3]:

$$V_x' = \delta \tau_1, \quad \text{и} \quad V_y' = \delta \tau_2, \quad (5)$$

моделирующие воздействие ветра, причем $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$ являются линейными функциями горизонтальных координат.

Поле давления на верхней границе представим в следующем виде:

$$P|_{z=1} = P_0 + P_1 x + P_2 y, \quad (6)$$

где P_0 – значение фонового давления; P_1 и P_2 – компоненты вектора градиента давления жидкости, постоянные. Фоновое давление на верхней границе P_0 примем за отсчетное, т. е. будем полагать равным нулю:

$$P_0 = 0. \quad (7)$$

3. Точное решение вблизи экватора

Точное решение будем искать в виде [10, 11]:

$$\begin{aligned} V_x &= U_0(z) + xU_1(z) + yU_2(z); \quad V_y = V_0(z) + xV_1(z) + yV_2(z); \\ P &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z); \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив вид точного решения (8) в исходную систему уравнений в частных производных (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменных x и y , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двенадцати функций $U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, P_0, P_1, P_2, T_0, T_1, T_2$:

$$\begin{aligned} U_1'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1^2 + U_2 V_1); \\ V_2'' &= \text{Re} \delta^2 (U_2 V_1 + V_2^2); \\ U_2'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1 U_2 + U_2 V_2); \\ V_1'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1 V_1 + V_1 V_2); \\ T_1'' &= \text{Ra} (T_1(z) U_1(z) + T_2(z) V_1(z)); \\ T_2'' &= \text{Ra} (T_1(z) U_2(z) + T_2(z) V_2(z)); \\ P_1' &= \frac{\delta U_1}{\text{Ek Re}} + \frac{T_1}{\delta}, \quad P_2' = \frac{\delta U_2}{\text{Ek Re}} + \frac{T_2}{\delta}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 U_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_1 + U_0 U_1 + U_2 V_0); \\
 V_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_2 + U_0 V_1 - V_0 U_1); \\
 T_0''(z) &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_0(z) + T_2(z) V_0(z)); \\
 P_0' &= \frac{\delta U_0}{\operatorname{Re} \operatorname{Ek}} + \frac{T_0}{\delta};
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$U_1 + V_2 = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) – условие несжимаемости. Подставим в уравнения (9), (10) и (11) условие несжимаемости. В результате системы уравнений (9), (10) и (11) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned}
 U_1'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (U_1^2 + U_2 V_1); \\
 U_1'' &= -\operatorname{Re} \delta^2 (U_2 V_1 + U_1^2); \\
 U_2'' &= 0, V_1'' = 0;
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 T_1'' &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_1(z) + T_2(z) V_1(z)); \\
 T_2'' &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_2(z) - T_2(z) U_1(z));
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$P_1' = \frac{\delta U_1}{\operatorname{Ek} \operatorname{Re}} + \frac{T_1}{\delta}; P_2' = \frac{\delta U_2}{\operatorname{Ek} \operatorname{Re}} + \frac{T_2}{\delta}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 U_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_1 + U_0 U_1 + U_2 V_0); \\
 V_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_2 + U_0 V_1 - V_0 U_1);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 P_0' &= \frac{\delta U_0}{\operatorname{Re} \operatorname{Ek}} + \frac{T_0}{\delta}; \\
 T_0''(z) &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_0(z) + T_2(z) V_0(z)).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Граничные условия (2), (3), (5) и (7) с учетом вида решения (8) преобразуются в следующие:

$$\delta U_1(0) = aU_1'(0), \delta V_1(0) = aV_1'(0), \delta U_2(0) = aU_2'(0), \delta V_2(0) = aV_2'(0); \tag{18}$$

$$U_1'(1) = \delta\tau_{11}, V_1'(1) = \delta\tau_{21}, U_2'(1) = \delta\tau_{12}, V_2'(1) = \delta\tau_{22}; \tag{19}$$

$$\delta U_0(0) = aU_0'(0), \delta V_0(0) = aV_0'(0), U_0'(1) = \delta\tau_{10}, V_0'(1) = \delta\tau_{20};$$

$$T_0(0) = A_0, T_1(0) = A_1, T_2(0) = A_2;$$

$$T_0(1) = B_0, T_1(1) = B_1, T_2(1) = B_2;$$

$$P_0(1) = 0, P_1(1) = P_{10}, P_2(1) = P_{20},$$

(20)

где компоненты вектора силы трения τ_1, τ_2 представлены как линейные функции горизонтальных координат $\tau_1 = \tau_{10} + x\tau_{11} + y\tau_{12}$ и $\tau_2 = \tau_{20} + x\tau_{21} + y\tau_{22}$.

Первое и второе уравнения подсистемы (13) будут совместны, если выполняется равенство

$$U_2 V_1 + U_1^2 = 0, \tag{21}$$

которое назовем условием совместности. Условие совместности накладывает ограничения на параметры граничных условий системы (13).

Решения для производных скоростей U_1, U_2, V_1 и V_2 по горизонтальным переменным с учетом условия совместности (21) получатся в виде линейных функций переменной z . Используя граничные условия на твердой поверхности (18), получим решения в виде:

$$U_1 = C_1(z + a/\delta); U_2 = C_3(z + a/\delta); V_1 = C_5(z + a/\delta); V_2 = -U_1 = -C_1(z + a/\delta), \tag{22}$$

где C_1, C_3 и C_5 – произвольные постоянные интегрирования. Для выполнения условий совместности (21) произвольные постоянные C_1, C_3 и C_5 должны удовлетворять соотношению $C_1^2 + C_3 C_5 = 0$, а граничные условия (19), соответственно, соотношению:

$$\tau_{11}^2 + \tau_{12}\tau_{21} = 0. \tag{23}$$

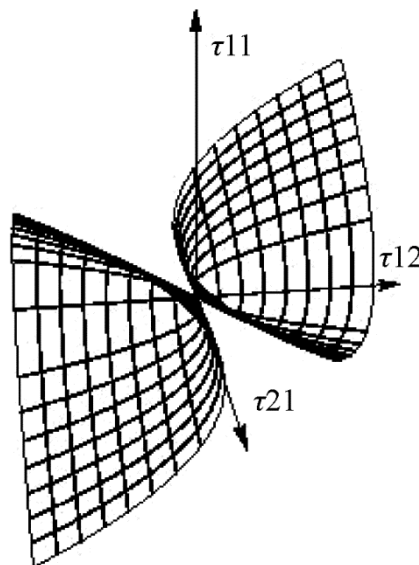


Рис. 2. Поверхность в пространстве параметров граничных напряжений τ_{ij}

На рис. 2 представлена поверхность в пространстве параметров граничных условий τ_{ij} , соответствующая уравнению (23). Если изображающая точка граничных условий с координатами $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21})$ лежит на этой поверхности, то выполняется условие совместности и существует слоистое течение, принадлежащее классу решений (8), описанное в данной работе. В противном случае слоистое течение невозможно.

Рассмотрим систему уравнений (14), описывающую компоненты вектора градиента температуры. Умножим первое уравнение на U_1 , второе – на U_2 и сложим. В результате с учетом условия несжимаемости (12), условия совместности (21) и выражений для производных скоростей (22) получим соотношение, связывающее вторые производные неизвестных T_1 и T_2 :

$$C_1(z+a/\delta)T_1'' + C_3(z+a/\delta)T_2'' = 0.$$

Полученное выражение разделим на $(z+a/\delta)$ и проинтегрируем дважды по z . В результате получится соотношение, связывающее неизвестные T_1 и T_2 :

$$C_1 T_1(z) + C_3 T_2(z) = C_7 z + C_8, \quad (24)$$

где C_7 и C_8 произвольные постоянные интегрирования. Разрешим полученное соотношение (24) относительно неизвестной T_2 и подставим в первое уравнение системы (14):

$$T_1'' = \frac{Ra(C_8 + C_7 z)(a + z\delta)}{\delta}. \quad (25)$$

Интегрируя уравнение (25) и используя соотношение (24), найдем компоненты градиента температуры:

$$T_1(z) = C_{10} + C_9 z + Ra \left(\frac{C_8}{2} \left(\frac{z^3}{3} + \frac{a z^2}{\delta} \right) + \frac{C_7}{6} \left(\frac{z^4}{2} + \frac{a z^3}{\delta} \right) \right);$$

$$T_2(z) = \frac{C_8 + C_7 z - C_1 \left(C_{10} + C_9 z + Ra \left(\frac{C_8 z^3}{6} + \frac{C_7 z^4}{12} + \frac{a C_8 z^2}{2\delta} + \frac{a C_7 z^3}{6\delta} \right) \right)}{C_3},$$

где C_9 и C_{10} – произвольные постоянные интегрирования. Из полученных выражений делаем вывод, что при данной постановке задачи градиенты температуры не являются линейными функциями координаты z , как для однородного решения, а являются полиномами третьего порядка относительно переменной z и существенно зависят от производных скорости по горизонтальным координатам.

Интегрируя уравнения системы (15), найдем компоненты градиента давления в виде:

$$P_1 = C_{11} - \left(C_{10} z - \frac{a C_1 z}{Ek \delta} + \frac{C_9 z^2}{2} - \frac{C_1 z^2}{2 Ek} + \frac{a C_8 Ra z^3}{6\delta} + \frac{C_8 Ra z^4}{24} + \frac{a C_7 Ra z^4}{24\delta} + \frac{C_7 Ra z^5}{60} \right) \frac{\delta}{Gr};$$

$$P_2 = C_{12} - \frac{\delta}{Gr} \left[\frac{C_8 z}{C_5} - \frac{C_1 C_{10} z}{C_5} + \frac{C_7 z^2}{2 C_5} - \frac{C_1 C_9 z^2}{2 C_5} - \frac{C_3}{Ek} \left(\frac{z^2}{2} + \frac{az}{\delta} \right) - \right]$$

$$-\frac{Ra C_1}{C_5} \left(-\frac{a C_8 z^3}{6\delta} + \frac{C_8 z^4}{24} - \frac{a C_7 z^4}{24\delta} - \frac{C_7 z^5}{60} \right),$$

где C_{11} и C_{12} – произвольные постоянные интегрирования.

Для системы уравнений (16), описывающей фоновые компоненты скорости, проведем преобразования, аналогичные преобразованиям уравнений для градиентов температуры (14). В результате получим соотношение, связывающее вторые производные неизвестных функций U_0 и V_0 :

$$C_1 U_0''(z) + C_3 V_0''(z) = \delta^2 Gr (P_1(z) + P_2(z)).$$

Интегрируя полученное равенство, найдем связь самих функций U_0 и V_0 :

$$C_1 U_0(z) + C_3 V_0(z) = \int \left(\int \delta^2 Gr (P_1(z) + P_2(z)) dz + C_{13} \right) dz + C_{14}. \quad (26)$$

Выразим из (26) функцию V_0 и подставим в первое уравнение системы (11). Проинтегрировав полученное соотношение, найдем выражение для фоновой компоненты скорости U_0 :

$$\begin{aligned} U_0 = C_{16} + C_{15} z - z^2 \delta^2 \left[\frac{Ra(5a(C_7 + 4C_8) + (2C_7 + 5C_8)\delta)}{240} + \frac{(2aC_1 + (C_1 + (2C_{10} + C_9)Ek)\delta)}{4Ek} \right] + \\ + z^3 \left(\frac{C_{14} Gr \delta^2}{6} + \frac{\delta^2 (a C_1 + C_{10} Ek \delta)}{6 Ek} \right) + z^4 \left(\frac{C_{13} Gr \delta^2}{12} + \frac{(C_1 + C_9 Ek) \delta^3}{24 Ek} \right) + \\ + z^5 \delta^2 \left[\frac{a C_8 Ra}{120} - \frac{\delta^2 Gr}{80 Ek} \left((C_1^2 + C_3^2)(2a + \delta) + (C_7 + 2C_8) \delta Ek \right) \right] + \\ + z^6 \delta^2 \left[\frac{Ra(a C_7 + C_8 \delta)}{720} + \frac{Gr \delta^2}{180 Ek} (a(C_3^2 + C_1^2) + C_8 Ek \delta) \right] + \\ + z^7 \delta^3 \left[\frac{C_7 Ra}{2520} + \frac{\delta^2 Gr}{1008 Ek} (C_3^2 + C_1^2 + C_7 Ek) \right], \end{aligned}$$

где C_{13} , C_{14} , C_{15} и C_{16} - произвольные постоянные интегрирования. Возвращаясь к выражению (26), найдем выражение для фоновой компоненты скорости V_0 :

$$\begin{aligned}
 V_0 = & \frac{C_{14} - C_1 C_{16} + (C_{13} - C_1 C_{15})z}{C_3} + \\
 & + z^2 \left[\frac{C_1 Ra \delta^2 (5a(C_7 + 4C_8) + (2C_7 + 5C_8)\delta)}{240 C_3} - \frac{(C_7 + 2C_8 - C_1(2C_{10} + C_9))\delta^3}{4 C_3} - \frac{C_3 \delta^2 (2a + \delta)}{4 Ek} \right] + \\
 & + z^3 \left[\frac{a C_3 \delta^2}{6 Ek} - \frac{C_1 C_{14} Gr \delta^2}{6 C_3} + \frac{(C_8 - C_1 C_{10})\delta^3}{6 C_3} \right] + z^4 \left[\frac{(C_7 - C_1 C_9)\delta^3}{24 C_3} - \frac{C_1 C_{13} Gr \delta^2}{12 C_3} + \frac{C_3 \delta^3}{24 Ek} \right] + \\
 & + z^5 \frac{C_1}{C_3} \left[\frac{\delta^4 Gr}{80 Ek} ((C_3^2 + C_1^2)(2a + \delta) + (C_7 + 2C_8)Ek\delta) - \frac{a C_8 Ra \delta^2}{120} \right] - \\
 & - z^6 \frac{C_1}{C_3} \left[\frac{Ra \delta^2 (aC_7 + \delta C_8)}{720} + \frac{\delta^4 Gr (a(C_3^2 + C_1^2) + C_8 Ek\delta)}{180 Ek} \right] - \\
 & - \frac{z^7 C_1}{C_3} \left[\frac{C_7 Ra \delta^3}{2520} + \frac{Gr \delta^5 ((C_3^2 + C_1^2) + C_7 Ek)}{1008 Ek} \right].
 \end{aligned}$$

Получилось общее решение системы (16) при заданном виде производных скоростей (22), зависящее от шестнадцати произвольных постоянных. Решения для фоновой температуры и давления не приводятся из-за их громоздкости. Решение для температуры – полином тринадцатого порядка, для давления – четырнадцатого порядка.

Заметим, что из четырех значений граничных условий (19) τ_{11} , τ_{12} , τ_{21} и τ_{22} в данной задаче независимы только два. На решения (22) наложены два условия: условие несжимаемости (12) и условие совместности (21). Из условия несжимаемости (12) следует, что $\tau_{22} = -\tau_{11}$, из условия совместности (21) – $\tau_{21} = -\tau_{11}^2/\tau_{12}$. Очевидно, что второе условие может выполняться только при $\tau_{12} \neq 0$ или $\tau_{21} \neq 0$. Если $\tau_{12} = 0$, то и τ_{11} должно быть равно нулю. При этом τ_{21} может принимать произвольные значения. Этот случай для изотермического течения рассмотрен в работе [9].

Анализ множества застойных точек

Застойной точкой назовем точку оси z , в которой одна из компонент вектора скорости V обращается в ноль. Двойной застойной точкой будем называть точку, в которой обращаются в ноль обе компоненты вектора скорости.

Построим компоненты вектора скорости V_x и V_y согласно виду решения (8) с подстановкой выражений (22) и учетом граничных условий (19). В результате получим:

$$V_x = U_0(z) + \tau_{11}x(z+a/\delta) + \tau_{12}y(z+a/\delta); \quad V_y = V_0(z) + \tau_{21}x(z+a/\delta) - \tau_{11}y(z+a/\delta).$$

1. Пусть в точке $z = z^*$ фоновые слагаемые компонент скорости обращаются в ноль:

$$U_0(z^*) = 0 \text{ и } V_0(z^*) = 0.$$

Тогда координаты застойных точек на плоскости $z = z^*$ определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= 0; \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Получилась линейная система алгебраических однородных уравнений относительно переменных x и y . Но определитель этой системы в силу условия совместности (21) обращается в ноль. Так как система однородная, то она имеет бесконечно много решений, лежащих на прямой, определяемой уравнением:

$$\tau_{11}x + \tau_{12}y = 0. \quad (28)$$

На приведенном ниже рисунке показаны линии тока жидкости на плоскости переменных x и y при $z^* = 0,7725$ и следующих значениях параметров системы и граничных условий:

$$\begin{aligned} B_1 = 70,0, B_2 = -25,0, \tau_1 = -20,1, \tau_2 = -22,7584, \tau_{12} = 1,3, \tau_{21} = -1,0, \\ Ek = 0,0001, Gr = 10,0, Ra \end{aligned} \quad (29)$$

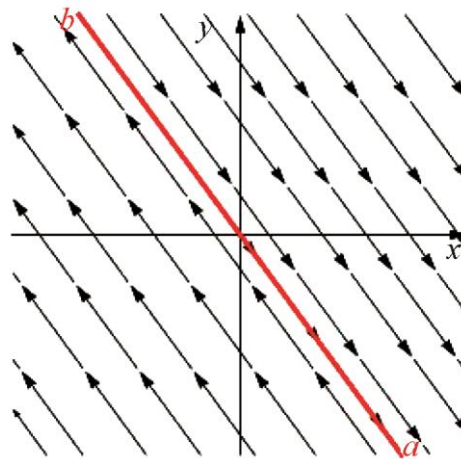


Рис. 3. Линии тока на плоскости x и y при $z^* = 0,7725$

Множество застойных точек выделено на рис. 3 красной линией.

2. Пусть в точке $z = z^*$ фоновые слагаемые компонент скорости в ноль не обращаются, застойных точек фоновых слагаемых компонент скорости нет:

$$U_0(z^*) \neq 0 \text{ и } V_0(z^*) \neq 0.$$

Координаты застойных точек на плоскости x, y удовлетворяют системе линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно переменных x и y :

$$\begin{aligned} \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= -U_0(z^*); \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= -V_0(z^*). \end{aligned} \quad (30)$$

Но определитель этой системы, как и системы (27), в силу условия совместности (21) обращается в ноль. Как известно, решение такой системы существует, если правые части удовлетворяют условию совместности:

$$\tau_{11}U_0(z^*) + \tau_{12}V_0(z^*) = 0. \quad (31)$$

Решение при этом не единственно. Множество решений образует на плоскости $z = z^*$ прямую линию, координаты точек которой удовлетворяют уравнению:

$$\tau_{11}x + \tau_{12}y = -\frac{U_0(z^*)}{z^* + a/\delta}.$$

Пусть условие совместности (31) при заданных значениях параметров (29) и заданном значении z^* не выполняется. Тогда рассмотрим соотношение (31) как уравнение относительно какого-либо параметра граничных условий задачи. В приведенном ниже примере (рис. 4) граничное условие B_2 для компоненты градиента давления получено как решение уравнения (31).

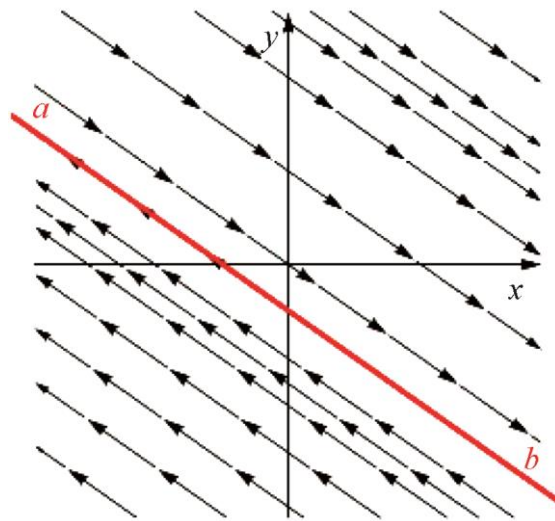


Рис. 4. Линии тока на плоскости x и y при $z^* = 0,7$

При наборе (29) параметров граничных условий (18), (19) и (20) и системы уравнений (9), (10) и (11) при относительной глубине $z^* = 0,7$ однородное решение не имеет застойной точки, так как свободные члены компонент скоростей не обращаются в ноль (рис. 4). В данном примере граничная компонента градиента температуры B_2 определена как решение условия совместности (31). Линия застойных точек (жирная линия) не проходит через начало координат плоскости переменных x и y . Таким образом, существование застойных точек зависит от горизонтальных градиентов температуры, заданных на границе.

3. Пусть при заданном значении z^* в ноль обращается только одна из компонент фоновых слагаемых скорости (простая застойная точка). Например $U_0(z^*) = 0$ и $V_0(z^*) \neq 0$. Тогда получим следующие выражения скоростей:

$$\begin{aligned} V_x &= \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta); \\ V_y &= V_0(z^*) + \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta), \end{aligned}$$

а система уравнений, определяющая застойные точки примет вид:

$$\begin{aligned}\tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= 0; \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= -V_0(z^*).\end{aligned}\quad (32)$$

Определитель системы (32), как и систем (27) и (30), равен нулю. Для существования решения системы (32) должно выполняться условие совместности:

$$V_0(z^*)\tau_{11} = 0 \text{ или } V_0(z^*)\tau_{12} = 0. \quad (33)$$

В этом случае должно выполняться одно из условий:

а) $V_0(z^*) = 0$ и приходим к случаю 1;

б) $\tau_{12} = 0$, но тогда из условия (23) следует $\tau_{11} = 0$ и первое уравнение системы (33) вырождается;

в) $\tau_{11} = 0$, из условия совместности (23) следует: или $\tau_{12} = 0$ или $\tau_{21} = 0$ и левая часть одного из уравнений (33) обращается в тождественный ноль.

Таким образом, застойные точки могут появляться на заданной глубине, если на этой глубине существует двойная застойная точка фоновых слагаемых скорости или застойных точек фоновых слагаемых нет.

4. Заключение

В работе построено неоднородное аналитическое решение, описывающее конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне с учетом двух компонент силы Кориолиса. Решение для экваториальной зоны, в отличие от решения для средних широт [6], представлено в виде полиномов высокого порядка. Исследовано множество застойных точек решения. Показано, что линия застойных точек на заданной глубине существует, если существует двойная застойная точка фоновых компонент скорости, или застойные точки отсутствуют.

Литература

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2-х т. – М. : Мир, 1984. – 811 с.
2. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений. – Л. : Гидрометеиздат, 1985.
3. Ekman V. W. On the Influence of the Earths Rotation on Ocean Currents // Arkiv for matematik, Asrtonomi, och Fysic. – 1905. – Band 2, No. 11.
4. Фельзенбаум А. И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. – М. : Изд-во. АН СССР, 1960. – 127 с.
5. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. – Киев : Наук. думка, 1986. – 208 с.
6. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 213–220.
7. Gorshkov A. V. and Prosviryakov E. Yu. Convective flow in the solid rotation of a viscous incompressible fluid // AIP Conference Proceedings. – 2017. – 1915. – 040020. – DOI: 10.1063/1.5017368.
8. Ингель Л. Х., Аристов С. Н. Класс точных решений нелинейных задач о термических циркуляциях, связанных с объемным тепловыделением в атмосфере // Тр. ин-та экспериментальной метеорологии. – 1996. – Вып. 27 (162). – С. 142–157.

9. Gorshkov A. V. Prosviryakov E. Yu. Isobaric Vortex Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – 040030. – DOI: 10.1063/1.5084468.
10. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, No. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
11. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / Sergey V. Ershkov, Evgeniy Yu. Prosviryakov, Natalya V. Burmasheva, and Victor Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53, No. 4. – P. 044501. – DOI:10.1088/1873-7005/ac10f0.
12. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9 (3). – P. 3–9.
13. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182.
14. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : ПГУ, 2006. – 155 с.
15. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости // Киров : ВятГУ, 2011. – 207 с.
16. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57, No. 1. – P. 188–194. – DOI: 10.1134/S0021894416010211.
17. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso, Butt Hans-Jürgen, and S. J. Vincent Craig // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68, No. 12. – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
18. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник ТГУ, Механика. – 2014. – № 2 (28). – С. 35–44.