
Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Ivan A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Yuliya V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)
Anatoly V. Kononov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Tatyana P. Lyubimova (Perm)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Artemiy A. Popov (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Evgeniy Yu. Raskatov (Ekaterinburg)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Vladimir P. Shveikin (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation
Olga A. Verstakova, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Батаев Иван Анатольевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Любимова Татьяна Петровна, д.ф.-м.н. (Пермь)
Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)
Мионов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Попов Артемий Александрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Раскатов Евгений Юрьевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)
Швейкин Владимир Павлович, д.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Верстакова Ольга Андреевна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

Poltorykhin N. N. and Nikiforov M. V. A method for identifying the optimal operating parameters of an internal combustion engine diagnostic device	6
Skalozub S. L. Calculating resonant frequencies of axisymmetric oscillations of isotropic cylindrical disks	17
Mitryukova E. A., Mishchenkova O. V., and Chernova A. A. Some aspects in the numerical simulation of the aerodynamics of a NACA 0012 airfoil	29
Burmasheva N. V. and Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the navier–stokes equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field	41
Zuev L. B., Barannikova S. A., and Kolosov S. V. Macroscale plasticity parameter of metals and alloys	64
Kulak S. M., Pavlov P. V., and Maltsev V. S. Studying the magnetoelastic properties of a steel sheet under bending deformation	73

СОДЕРЖАНИЕ

Полторыхин Н. Н., Никифоров М. В. Методика определения оптимальных параметров работы установки для диагностирования двигателя внутреннего сгорания	6
Скалозуб С. Л. Расчет резонансных частот осесимметричных колебаний изотропных цилиндрических дисков	17
Митрюкова Е. А., Мищенко О. В., Чернова А. А. Некоторые аспекты численного моделирования аэродинамики плоского профиля NASA 0012	29
Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения уравнений Навье – Стокса однонаправленных течений микрополярных жидкостей в поле массовых сил	41
Зуев Л. Б., Баранникова С. А., Колосов С. В. Макромасштабный параметр пластичности металлов и сплавов	64
Кулак С. М., Павлов П. В., Мальцев В. С. Исследование магнитоупругого размагничивания стального листа при деформации изгибом	73

Received: 18.12.2023

Revised: 21.03.2024

Accepted: 24.05.2024

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.006-016

A METHOD FOR IDENTIFYING THE OPTIMAL OPERATING PARAMETERS OF AN INTERNAL COMBUSTION ENGINE DIAGNOSTIC DEVICE

N. N. Poltorykhin^{a, *} and M. V. Nikiforov^b

Tver State Agricultural Academy, 7 Marshala Vasilevskogo St. (Sakharovo), Tver, 170904, Russia

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-7249-3981>  nikitapoltoryhin@yandex.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-2359-8968>  mnikiforov@tvgsa.ru

*Corresponding author. E-mail: nikitapoltoryhin@yandex.ru

Address for correspondence: ul. Marshala Vasilevskogo, 7 (Sakharovo), Tver, 170904, Russia

Tel.: +7 (961) 014-0899

The paper discusses selecting the optimal operating parameters of a device for diagnosing internal combustion engines. A laboratory experiment procedure is developed, the experiment layout being approved. Mathematical planning is used to compile a planning matrix of a three-factor experiment 3^3 . The objects of the study are pneumatic valves, air pressure in a pneumatic system, and the compressed air supply interval in degrees of the crankshaft rotation. The experiment yields data on the camshaft angle after the termination of air supply to an internal combustion engine cylinder as dependent on the variation of the set device parameters. The data are statistically processed, with the calculation of the necessary values of the mean, variance, and coefficient of variation. The verification of the accuracy of the data testifies to the repeatability of the process. The results obtained from the experiment are statistically analyzed to generate regression equations. The study presents 3D surface plots and 2D plots showing the angle of camshaft rotation after the cessation of airflow to the engine cylinder as dependent on the values of variable factors. The analysis of the laboratory experiment results allows us to determine the most efficient design and process parameters of an internal combustion engine diagnostic device. The following parameters of the diagnostic device are determined: a pneumatic valve area of 29.5 to 34.5 mm², a system pressure of 0.48 to 0.62 MPa, and a compressed air supply interval (in crankshaft rotation degrees) of 140 to 180°, which allows for a camshaft rotation angle of 95 to 110 degrees.

Keywords: multifactorial experiment, internal combustion engine, complex diagnostic system

References

1. Livshits, V.M., Krashennnikov, S.V., and Pyatin, S.P. Perspective developments in the field of diagnosis of motor and tractor diesels. *Vestnik IrGSKHA*, 2010, 38, 77–81. (In Russian).
2. Zotov, S.V., Mezin, I.Yu., and Kasatkina, E.G. Analysis of modern methods for diagnosing internal combustion engines of automobiles. *Aktualnyye Problemy Sovremennoy Nauki, Tekhniki i Obrazovaniya*, 2016, 1, 247–250. (In Russian).
3. Poltorykhin, N.N., Nikiforov, M.V., and Panov, Yu.A. *Analysis of diagnostic tools in diesel engines. In: Obrazovanie, innovatsii, tsifrovizatsiya: vzglyad regionov* [Education, Innovations, Digitalization. A View of the Regions: Proceedings of the Russian (National) Scientific and Practical Conference]. Tver SAA Publ., Tver, 2022, 279–281. (In Russian).

4. Demakov, K.K. Methods of piston internal combustion engine diagnostics by analysis of crankcase gas-dynamic parameters. *Nauchno-Tekhnicheskoe i Ekonomicheskoe Sotrudnichestvo Stran ATR v XXI Veke*, 2021, 1, 16–21. (In Russian).
5. Prosvirov, Yu.E. and Basov, S.A. Reliability of operation and methods for preliminary treatment of cylinder - piston group of internal combustion engines. *Vestnik Rostovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Putey Soobshcheniya*, 2010, 2 (38), 40–45. (In Russian).
6. Danilov, I.K. and Popova, I.M. Analysis of methods, development and economic feasibility of a diagnostic device for a cylinder piston group of internal combustion engines. In: *Problemy tekhnicheskoy ekspluatatsii i avtoservisa podvizhnogo sostava avtomobilnogo transporta* [Problems of Technical Maintenance and Service of Motor Vehicles: Proceedings of the 75th MADI Conference]. Tekhpoltorgiztsentr Publ., 2017, 51–57. (In Russian).
7. Shevtsov, Yu.D. and Zhuravlev, M.M. Promising methods for diagnosing internal combustion engines. *Innovatsii. Nauka. Obrazovanie*, 2021, 36, 1603–1608. (In Russian).
8. Sivakov, V.V., Gryadunov, S.S., and Derevyagin, R.Yu. Improvement of car diagnostics by thermal imaging method. *Transport. Transportnyye Sooruzheniya. Ekologiya*, 2021, 3, 79–87. (In Russian). DOI: 10.15593/24111678.
9. Aksenov, A.A. and Khudyakova, M.V. Modern approaches to diagnosing diesel internal combustion engine. *Aktualnyye Napravleniya Nauchnykh Issledovaniy XXI Veka: Teoriya i Praktika*, 2015, 3 (5–3) (16–3), 7–10. (In Russian).
10. Koshevenko, A.V. Search of faults of a diesel engine. *Tekhnika i Oborudovaniye Dlya Sela*, 2008, 3, 44–45. (In Russian).
11. Nikiforov, M.V., Panov, Yu.A., and Poltorykhin, N.N. Methods for diagnosing internal combustion engines by forcibly supplying compressed air to an engine cylinder. In: *Razvitie nauchno-innovatsionnogo potentsiala agrarnogo proizvodstva: problemy, tendentsii, puti resheniya* [Development of the Scientific and Innovative Potential of Agricultural Production. Problems, Trends, Solutions: Proceedings of an International Scientific and Practical Conference]. Tver SAA Publ., Tver, 2022, 337–339. (In Russian).
12. Poltorykhin, N.N., Nikiforov, M.V., and Panov, Yu.A. Analysis of malfunctions and their causes in diesels. In: *Innovatsionnyye tekhnologii v APK: problemy i perspektivy* [Innovative Technologies in Agriculture. Problems and Prospects: Materials of International Scientific and Practical Conference]. Tver SAA Publ., Tver, 2021, 218–222. (In Russian).
13. Marley, C.J. and Woods, D.C. A comparison of design and model selection methods for supersaturated experiments. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2010, 54 (12), 3158–3167. DOI: 10.1016/j.csda.2010.02.017.
14. Pavlik, A.V., Dergachev, V.A., Saveliev, A.S., and Anikin, A.N. Automation of multifactorial experiment carrying out. *Sovremennaya Tekhnika i Tekhnologii*, 2014, 6 (34), 25. (In Russian).
15. Dzhasheyev, K.A.M. and Dzhasheyeva, Z.A.M. Nomogram method of the analysis of results of multifactorial experiment. *Sovremennyye Naukoyemkie Tekhnologii*, 2008, 8, 3. (In Russian).
16. Skvortsov, V.S. and Lazarenko, O.I. Methodology for constructing a static regression multifactor model from experimental data with factor scheduling of a fiber optic gyroscope. *Informatsionno-Tekhnologicheskii Vestnik*, 2021, 4 (30), 103–110. (In Russian).
17. Reznik, N.A. Multifactorial experiment (technology and results). *Obrazovatelnye Tekhnologii i Obshchestvo*, 2012, 15, 1, 436–452. (In Russian).

18. Denisov, V.I., Lisitsin, D.V., and Gavrilov, K.V. The design of an experiment in estimating the parameters of a multifactor model from nonhomogeneous observations. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2002, 5 (4), 14–28. (In Russian).
19. Koshevoy, N.D. and Sukhobrus, E.A. The comparative analysis of optimization methods of multilevel multifactor experiment plans. *Radioelektronika, Informatika, Upravleniye*, 2012, 1 (26), 53–58. (In Russian).
20. Suyunbaev, Sh., Sarsembekov, B., Suleyev, B., and Kukeshcheva, A. Establishment of the Reynolds criterion for ultrasonic cleaning of exhaust gases of internal combustion engines. *Proceedings of the University*, 2022, 1 (86), 175–181. DOI: 10.52209/1609-1825_2022_1_175.

Подана в журнал: 18.12.2023

УДК 51-74:621.43

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.006-016

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАБОТЫ УСТАНОВКИ ДЛЯ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯН. Н. Полторыхин^а *, М. В. Никифоров^б

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», ул. Маршала Василевского (Сахарово), 7, г. Тверь, 170904, Россия

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0001-7249-3981>  nikitapoltoryhin@yandex.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-2359-8968>  mnikiforov@tvgscha.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: nikitapoltoryhin@yandex.ru

Адрес для переписки: ул. Маршала Василевского (Сахарово), 7, г. Тверь, 170904, Россия

Тел.: +7 (961) 014-08-99

В работе рассмотрен вопрос выбора оптимальных параметров работы диагностической установки для двигателя внутреннего сгорания. Разработана методика и утверждена программа проведения лабораторного эксперимента. С применением метода математического планирования составлена план-матрица трехфакторного эксперимента 3^3 . Объектами исследования выбраны пневматические клапаны, давление воздуха в пневматической системе и интервал подачи сжатого воздуха в градусах поворота коленчатого вала. В результате проведенного эксперимента получены данные изменения угла поворота распределительного вала после прекращения подачи воздуха в цилиндр ДВС в зависимости от изменения заданных параметров работы установки. Проведена статистическая обработка значений с расчетом необходимых величин среднего значения, дисперсии и коэффициента вариации. Проверка на достоверность полученных данных подтвердила воспроизводимость процесса. Полученные при проведении эксперимента результаты обработаны статистически с получением регрессионных уравнений. Построены трехмерные графики поверхностей и двухмерные графики зависимости угла поворота распределительного вала после прекращения подачи воздуха в цилиндр ДВС от значений варьируемых факторов. Выполненный анализ результатов лабораторного эксперимента позволяет определить наиболее рациональные конструкторские и технологические параметры работы диагностической установки для двигателя внутреннего сгорания. Определены параметры диагностической установки для двигателя внутреннего сгорания: сечение пневматического клапана от 29,5 до 34,5 мм²; давление в системе от 0,48 до 0,62 МПа; интервал подачи сжатого воздуха в градусах поворота коленчатого вала от 140 до 180°, обеспечивающий угол поворота распределительного вала от 95 до 110°.

Ключевые слова: многофакторный эксперимент, двигатель внутреннего сгорания, комплексная система диагностирования

1. Введение

Развитие транспортных систем в сельском хозяйстве предъявляет новые требования к эксплуатации и техническому обслуживанию транспортных средств. Одной из частей поддержания технического состояния машинно-тракторного парка является диагностика. Она позволяет своевременно выявлять неисправности, сокращая расходы на ремонт и простой неисправных транспортных средств [1–3].

Одним из наиболее подверженных износу узлов транспортного средства является двигатель. Работоспособность поршневых двигателей внутреннего сгорания обеспечивает цилиндропоршневая группа и газораспределительный механизм [4–6]. С совершенствованием систем двигателя совершенствуются методы и средства их диагностики. Основное направление разработки новых и модернизации уже существующих диагностических систем – это универсальность и технологичность таких средств выявления неисправностей [7–9]. Систематизация поиска и проведение его в соответствии с определенной методикой позволяют сократить время простоя, которое составляет иногда более 50 % от всего времени ремонта транспортного средства [10].

С целью повышения точности определения неисправности и снижения трудоемкости работ была разработана диагностическая установка для двигателя внутреннего сгорания, позволяющая оценить состояние цилиндропоршневой группы и газораспределительного механизма. Она представляет собой комплект из пневматических клапанов и датчиков давления, соединенных посредством электрических проводов с микроконтроллером, подключенным к персональному компьютеру [11].

Целью проведения лабораторного эксперимента является выбор оптимальных параметров работы экспериментальной установки (параметров, при которых осуществляется поворот коленчатого вала на заданную величину), поскольку выбор правильных настроек диагностического оборудования повышает его надежность при эксплуатации и увеличивает точность получаемых данных.

2. Материалы и методы исследования

В качестве объектов исследования были выбраны пневматические клапаны, давление воздуха в пневматической системе и интервал подачи воздуха в цилиндр двигателя, выраженный в градусах угла поворота коленчатого вала. В экспериментальной установке (рис. 1) используется исправный серийный двигатель ВА3-21083 с впускным и выпускным коллекторами, в штатном исполнении (четырёхтактный, бензиновый, с рабочим объемом 1500 см³ и степенью сжатия 9,9). Номинальная мощность двигателя – 51,5 кВт при частоте вращения коленчатого вала 5600 мин⁻¹; максимальный крутящий момент – 106,4 Н·м при $n = 3400$ мин⁻¹.

Исследование проводится на базе лаборатории технического сервиса ФГБОУ ВО Тверская ГСХА.

Экспериментальная установка состоит из бензинового двигателя ВА3-21083, компрессора, переходника для подачи сжатого воздуха в двигатель, пневматических клапанов, пневматического распределителя, пневматических трубок, аппаратной платформы Arduino, персонального компьютера.

Рассмотрим принцип работы диагностического комплекса, показанного на рис. 1. От компрессора сжатый воздух поступает в распределительную магистраль повышенного давления через пневматическую трубку и распределяется по пневматическим клапанам на подачу сжатого воздуха в цилиндр двигателя. Сжатый воздух подается в цилиндр двигателя на такте рабочего хода. При открытии пневматического впускного клапана сжатый воздух поступает в пневматический распределитель и далее через пневматическую трубку и переходник – в цилиндр двигателя. Данный поток сжатого воздуха подается на такте рабочего хода и обеспечивает необходимое давление в цилиндре для совершения этого такта и поворота коленчатого вала на 180°. В это время в другом цилиндре двигателя, где проходит такт сжатия, увеличивается давление противодействия. Для компенсации данного противодействия и удаления воздуха из цилиндра создана обратная система. Воздух из цилиндра в момент такта сжатия проходит через переходник и пневматические трубки в пневматический распределитель и открытый пневматический выпускной клапан, через который удаляется в атмосферу. Управление пневматическими клапанами и сбор данных с датчиков осуществляется с помощью электронного

блока управления. Данная установка имитирует работу двигателя внутреннего сгорания. Во время имитации работы двигателя записываются диаграммы изменения давлений с помощью датчиков давлений. Анализ данных диаграмм позволяет выявить неисправность в цилиндропоршневой группе и газораспределительном механизме на основе сравнения давлений между цилиндрами и сопоставления с эталонными диаграммами.

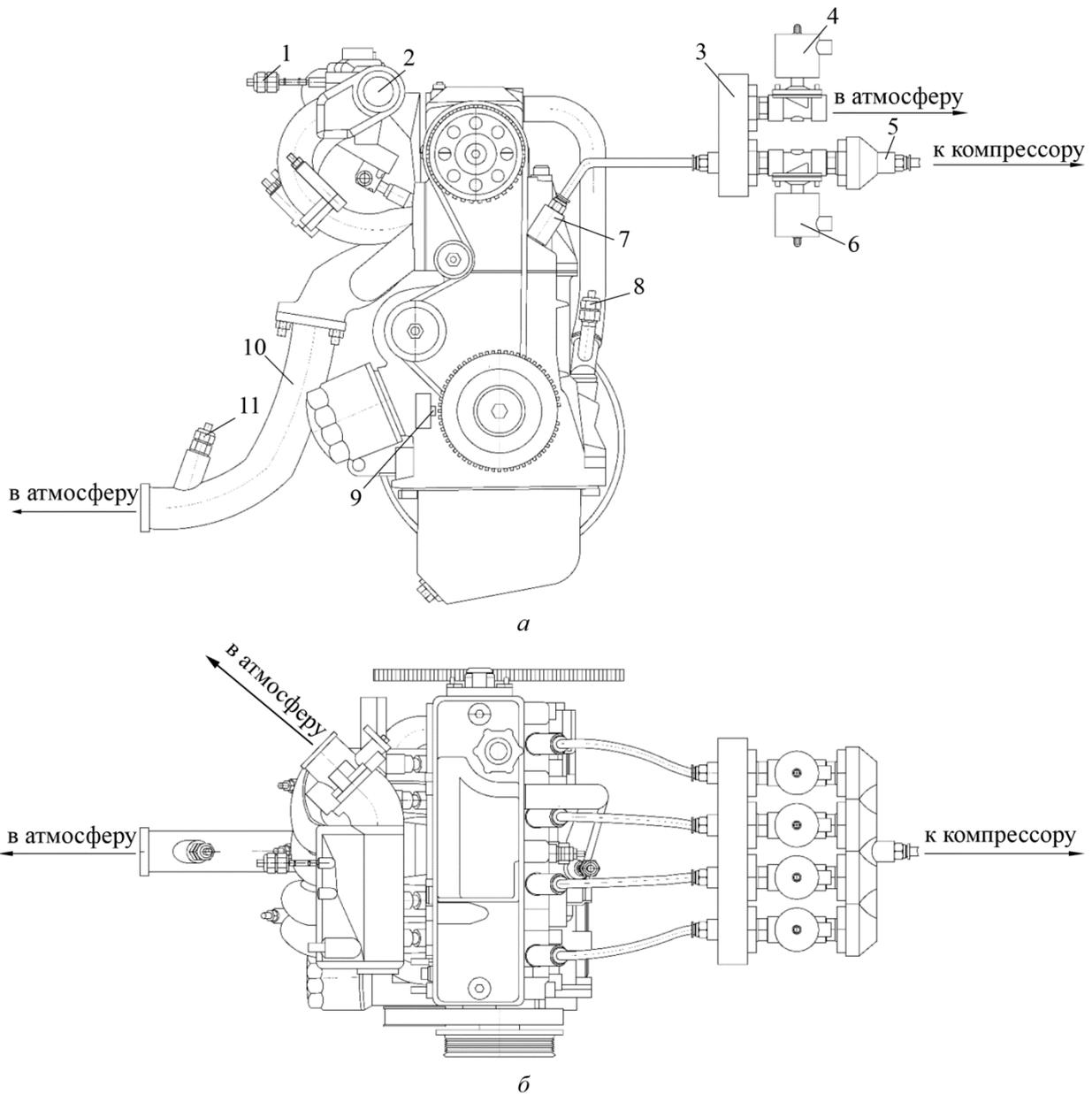


Рис. 1. Экспериментальная диагностическая установка (*а* – вид сбоку, *б* – вид сверху):
 1 – датчик давления во впускном коллекторе; 2 – впускной коллектор; 3 – пневматический распределитель; 4 – пневматические выпускные клапаны; 5 – пневматический распределитель высокого давления; 6 – пневматические впускные клапаны; 7 – переходник; 8 – датчик давления в картере двигателя; 9 – датчик положения коленчатого вала; 10 – выпускной коллектор; 11 – датчик давления в выпускном коллекторе

Для проведения лабораторного эксперимента был использован первый цилиндр для подачи сжатого воздуха в цилиндр двигателя и третий – для удаления воздуха из цилиндра. Задача эксперимента – подавать сжатый воздух в первый цилиндр в течение определенного интервала времени, который выражен в градусах поворота коленчатого вала, и фиксировать угол поворота распределительного вала после прекращения подачи воздуха в цилиндр двигателя.

Для разработки методики проведения многофакторного эксперимента и статистической обработки данных был проведен анализ научных литературных источников [13–20], позволивший сформировать модель проведения эксперимента и обработки полученных данных.

Методика исследования заключается в проведении многофакторного эксперимента с последующим анализом полученных данных. Матрица кодирования значений полнофакторного эксперимента показана в таблице 1.

Таблица 1

Матрица кодирования значений полнофакторного эксперимента типа 3^3

Исследуемые факторы	Уровни варьирования			Кодовое значение		
				минимальное	нулевое	максимальное
Диаметр проходного сечения клапана, мм ²	25	40	55	–1	0	1
Давление в системе, МПа	0,48	0,55	0,62	–1	0	1
Интервал подачи сжатого воздуха в градусах поворота коленчатого вала	60	120	180	–1	0	1

Первым фактором является диаметр сечения впускного пневматического клапана. Для проведения эксперимента было выбрано три пневматических клапана: 2W025-08, 2W040-10 и 2W160-15. Диаметр рабочего сечения для них равен 25, 40 и 160 мм² соответственно. Диаметр клапана 2W160-15 ограничен диаметром сечения пневматической трубки и составляет 55 мм².

Второй фактор – давление воздуха в пневматической системе. Это давление воздуха в пневматических трубках, которое поступает от компрессора к впускным пневматическим клапанам. Для проведения эксперимента выбраны следующие давления: 4,8; 5,5; 6,2 МПа. Диапазон давлений был взят из предварительных экспериментов.

Третьим фактором является угол поворота коленчатого вала, в течение которого подается сжатый воздух в двигатель. Были выбраны следующие углы: 60, 120 и 180°. Диапазон данных углов обусловлен тем, что подача сжатого воздуха после поворота коленчатого вала двигателя более чем на 180°, то есть после завершения цикла рабочего хода, будет влиять на изменение давления в выпускном коллекторе.

Последовательность проведения эксперимента включает в себя следующие этапы:

1. Подготовка двигателя к эксперименту.

1.1. Подключение пневматических переходников для подачи сжатого воздуха к двигателю внутреннего сгорания.

1.2. Подключение пневматических трубок к механизмам установки для диагностирования двигателя.

1.3. Подключение датчика Холла для измерения положения распределительного вала через платформу Arduino к персональному компьютеру.

2. Подготовка установки для первого замера.
 - 2.1. Подключается первый тип пневматического клапана.
 - 2.3. Задается давление в пневматической системе на уровне 0,48 МПа.
 - 2.4. В программе управления на персональном компьютере выбирается интервал поворота угла коленчатого вала в 60°. Данный угол контролируется датчиком Холла, установленным на место датчика поворота коленчатого *a*.
3. Проведение эксперимента.
 - 3.1. Первый цилиндр двигателя выставляется в верхнюю мертвую точку на такте рабочего хода.
 - 3.2. Производится поворот коленчатого вала двигателя путем подачи сжатого воздуха в первый цилиндр, при этом пневматический клапан на выпуск воздуха из цилиндра 3 открыт согласно схеме работы двигателя. Время подачи ограничено углом поворота коленчатого вала. Контроль угла производится с помощью датчика Холла, установленного на место датчика поворота коленчатого вала двигателя.
 - 3.3. Производится замер угла, на который повернулся распределительный вал после подачи воздуха.
 - 3.3. Согласно плану проведения эксперимента меняется диаметр проходного сечения пневматического клапана на впуск сжатого воздуха в цилиндр двигателя, давление в пневматической системе и угол поворота коленчатого вала, в течение которого подается сжатый воздух.
 - 3.5. Остальные замеры производятся от пункта 3.1 по плану эксперимента (таблица 2).
4. Анализ полученных данных.

Таблица 2

Матрица проведения полнофакторного эксперимента

Фактор	Номер эксперимента																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
2	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Результаты и обсуждение

На основании проведенного исследования получены данные об изменении угла поворота распределительного вала после прекращения подачи сжатого воздуха. В соответствии с методикой обработки экспериментальных данных с применением программного обеспечения проведена статистическая обработка с расчетом необходимых величин среднего значения, дисперсии и коэффициента вариации. Результаты обработки полученных значений необходимы для получения регрессионного уравнения зависимости угла поворота распределительного вала от исследуемых факторов.

Выполненная статистическая обработка данных указывает на достоверность полученных результатов, ошибка данных эксперимента не превышает 5,0 %. Проверка проведена по критерию Кохрена, который составил 0,15, что меньше табличного значения 0,237; следовательно, процесс воспроизводим. Значение критерия Стьюдента составило 2,778; показатель критерия Фишера неполного квадратного уравнения равен 3,58. Это меньше табличного значения 4,04, что свидетельствует об адекватности модели.

В результате обработки данных была установлена следующая регрессионная зависимость:

$$y = 123,778 + 35,815 \cdot x_1 + 20,778 \cdot x_3 - 10,209 \cdot x_1^2 - 7,913 \cdot x_2^2 - 6,209 \cdot x_3^2.$$

Значение x в данном уравнении имеет натуральное значение, привязанное к фактору исследования, а y является углом поворота распределительного вала после прекращения подачи сжатого воздуха.

Для того чтобы изобразить поверхности отклика и их сечения полученного уравнения регрессии, необходимо каждый из трех факторов зафиксировать на нулевом уровне: сечение пневматического клапана $z = 40 \text{ мм}^2$, что соответствует клапану 2W040-10; давление в системе $\nu = 5,5 \text{ МПа}$; интервал подачи сжатого воздуха в градусах поворота коленчатого вала $c = 120^\circ$. Подставив эти значения в раскодированное уравнение регрессии, получим три уравнения с двумя факторами.

Для факторов z и ν

$$y = -0,04 \cdot z^2 + 6,04 \cdot z - 16,1 \cdot \nu^2 + 177,51 \cdot \nu - 529,7.$$

Для факторов z и c

$$y = -0,04 \cdot z^2 + 6,04 \cdot z - 0,006 \cdot c^2 + 1,5 \cdot c - 108,82.$$

Для факторов ν и c

$$y = -16,1 \cdot \nu^2 + 177,51 \cdot \nu - 0,006 \cdot c^2 + 1,5 \cdot c - 420,5.$$

Анализ полученных регрессионных зависимостей показывает, что на угол поворота распределительного вала после прекращения подачи сжатого воздуха в меньшей степени оказывает влияние величина давления сжатого воздуха в системе.

Таким образом, наиболее значимыми факторами являются диаметр сечения пневматического клапана и интервал (в градусах поворота распределительного вала) подачи сжатого воздуха в цилиндр двигателя.

Регрессионные зависимости позволили построить трехмерные графики изменения угла поворота распределительного вала в зависимости от значений факторов (рис. 2).

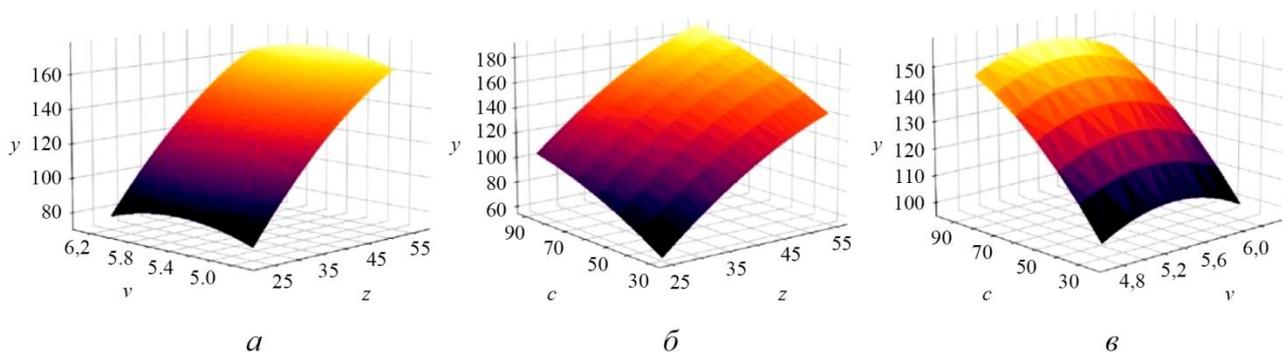


Рис. 2. Поверхности отклика угла поворота распределительного вала в зависимости от факторов z и ν (а); z и c (б); ν и c (в)

Анализ полученных поверхностей позволяет выделить параметры диагностической установки, при которых достигается угол поворота распределительного вала, обеспечивающий стабильную работу двигателя, в диапазоне от 95 до 110° . Данный диапазон угла поворота распределительного вала выбран для плавного вращения двигателя без избыточной подачи сжатого воздуха в цилиндр. В соответствии с трехмерными графиками были построены их сечения, на которых отмечены области работы диагностической установки (рис. 3).

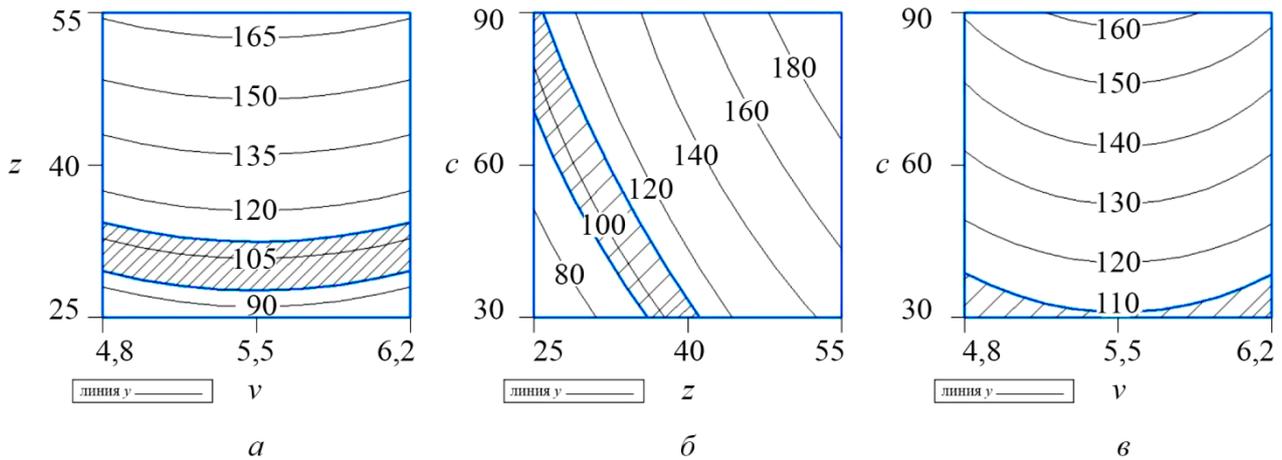


Рис. 3. Сечения отклика угла поворота распределительного вала в зависимости от факторов z и v (а); z и c (б); v и c (в)

4. Заключение

Таким образом, для достижения данного диапазона углов необходимы следующие параметры: сечение пневматического клапана от 29,5 до 34,5 мм², давление в системе от 0,48 до 0,62 МПа, интервал подачи сжатого воздуха в градусах поворота коленчатого вала от 140 до 180°.

Выбор наиболее рациональных режимов работы представленной установки позволит получить наиболее достоверные данные, что в конечном итоге даст возможность более точно диагностировать состояние двигателя. Данный диагностический комплекс является универсальным: он предназначен не только для двигателя ВАЗ-21083, но и для других бензиновых и дизельных двигателей внутреннего сгорания.

Литература

1. Лившиц В. М., Крашенинников С. В., Пятин С. П. Перспективные разработки в области диагностики автотракторных дизелей // Вестник ИрГСХА. – 2010. – № 38. – С. 77–81.
2. Зотов С. В., Мезин И. Ю., Касаткина Е. Г. Анализ современных методов диагностирования ДВС автомобилей // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. – 2016. – Т. 1. – С. 247–250.
3. Полторыхин Н. Н., Никифоров М. В., Панов Ю. А. Анализ средств диагностики в дизельных двигателях // Всероссийская (национальная) научно-практическая конференция «Образование, инновации, цифровизация: взгляд регионов», Тверь, 15 февраля 2022 г. : сборник научных трудов. – Тверь : ФГБОУ ВО Тверская ГСХА, 2022. – С. 279–281.
4. Демаков К. К. Методы диагностики поршневых двигателей внутреннего сгорания анализом газодинамических параметров картерных газов // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. – 2021. – Т. 1. – С. 16–21.
5. Просвиров Ю. Е., Басов С. А. Надежность работы и методы диагностики цилиндропоршневой группы двигателей внутреннего сгорания // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2010. – № 2 (38). – С. 40–45.
6. Данилов И. К., Попова И. М. Анализ методов, разработка и экономическое обоснование средства диагностирования цилиндропоршневой группы ДВС // Проблемы технической эксплуатации и автосервиса подвижного состава автомобильного транспорта, Москва, 01–06 февраля 2017 г. : сборник научных трудов по материалам 75-ой научно-методической и научно-исследовательской конференции МАДИ. – М. : Техполиграфцентр, 2017. – С. 51–57.
7. Шевцов Ю. Д., Журавлев М. М. Перспективные способы диагностирования двигателей внутреннего сгорания // Инновации. Наука. Образование. – 2021. – № 36. – С. 1603–1608.

8. Сиваков В. В., Грядунов С. С., Деревягин. Р. Ю. Совершенствование диагностирования автомобилей тепловизионным способом // *Транспорт. Транспортные сооружения. Экология.* – 2021. – № 3. – С. 79–87. – DOI: 10.15593/24111678.
9. Аксенов А. А., Худякова М. В. Современные подходы к диагностированию дизельных двигателей внутреннего сгорания // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.* – 2015. – Т. 3, № 5–3 (16–3). – С. 7–10.
10. Кошевенко А. В. Поиск неисправностей дизеля // *Техника и оборудование для села.* – 2008. – № 3. – С. 44–45.
11. Никифоров М. В., Панов Ю. А., Полторыхин Н. Н. Методика диагностирования ДВС путем принудительной подачи сжатого воздуха в цилиндр двигателя // *Развитие научно-инновационного потенциала аграрного производства: проблемы, тенденции, пути решения, Тверь, 25 октября 2022 г. : сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции.* – Тверь : Тверская государственная сельскохозяйственная академия, 2022. – С. 337–339.
12. Полторыхин Н. Н., Никифоров М. В., Панов Ю. А. Анализ неисправностей и их причины в дизелях // *Инновационные технологии в АПК: проблемы и перспективы, Тверь, 12–14 октября 2021 г. : материалы Международной научно-практической конференции.* – Тверь : Издательство Тверской ГСХАС. – С. 218–222.
13. Marley C. J., Woods D. C. A comparison of design methods and model selection for experiments with oversaturation // *Computational statistics and data analysis.* – 2010. – Vol. 54, iss. 12. – P. 3158–3167. – DOI: 10.1016/j.csda.2010.02.017.
14. Автоматизация проведения многофакторного эксперимента / А. В. Павлик, В. А. Дергачев, А. С. Савельев, А. Н. Аникин // *Современная техника и технологии.* – 2014. – № 6 (34). – С. 25.
15. Джашеев К. А. М., Джашеева З. А. М. Номограммный метод анализа результатов многофакторного эксперимента // *Современные наукоемкие технологии.* – 2008. – № 8. – С. 3.
16. Скворцов В. С., Лазаренко О. И. Методика построения статической регрессионной многофакторной модели по данным эксперимента с факторным планированием волоконно-оптического гироскопа // *Информационно-технологический вестник.* – 2021. – № 4 (30). – С. 103–110.
17. Резник Н. А. Многофакторный эксперимент (технология и результаты) // *Образовательные технологии и общество.* – 2012. – Т. 15 (1). – С. 436–452.
18. Денисов В. И., Лисицин Д. В., Гаврилов К. В. Планирование эксперимента при оценивании параметров многофакторной модели по неоднородным наблюдениям // *Сибирский журнал индустриальной математики.* – 2002. – Т. 5 (4). – С. 14–28.
19. Кошевой Н. Д., Сухобрус Е. А. Сравнительный анализ методов оптимизации многоуровневых планов многофакторного эксперимента // *Радиоэлектроника, информатика, управление.* – 2012. – № 1 (26). – С. 53–58.
20. Establishment of the Reynolds criterion for ultrasonic cleaning of exhaust gases of internal combustion engines / Sh. Suyunbayev, B. Sarsembekov, B. Suleyev, A. Kukeshva // *Proceedings of the University.* – 2022. – No. 1 (86). – P. 175–181. – DOI 10.52209/1609182520221175.

Received: 30.11.2023
Revised: 11.04.2024
Accepted: 24.05.2024
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.017-028

CALCULATING RESONANT FREQUENCIES OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL DISKS

S. L. Skalozub

77 Gerhart Hauptmann Ring, Frankfurt on the Main, 60439, Germany

 sem.sk@gmx.de

Address for correspondence: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland
Tel.: +49 (69) 7704 3346

Resonant axisymmetric oscillations of cylindrical disks made of isotropic materials are analytically considered in accordance with the Kog theory. Relationships of dimensionless resonant frequencies to the geometrical dimensions of the disks and the dynamic characteristics of the material (Poisson's ratio and shear wave velocity) are presented in a form convenient for calculations. Digital values of resonant frequencies are calculated and summarized in tables at different Poisson's ratios ranging between 0.20 and 0.45, with a step of 0.05, for a number of discrete thickness-to-diameter ratios ranging from 0 to 0.853145 and from 0 to 0.30 when oscillations of the first and second modes are excited, respectively. The estimation of method errors in resonant frequency calculations based on the comparison with the known results obtained by the Rayleigh–Ritz method has proved their high repeatability. Instrumental errors in determining the dynamic characteristics of the material are calculated in relation to experimental results obtained in a number of well-known studies.

Keywords: cylindrical disks, resonant oscillations, dynamic Poisson's ratio, shear wave velocity

Acknowledgment

I am grateful to R. S. Skalozub for his assistance in the search and delivery of the necessary literature and A. S. Skalozub for the computer support of the preparation and formatting of the manuscript.

References

1. Meleshko, V.V., Yakimenko, N.S., and Ulitko, A.F. Resonance method for determining the elastic constants of finite isotropic cylinders. *Akustichniy Visnyk*, 2008, 11 (3), 65–75. (In Russian).
2. Pochhammer, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1876, 81 (4), 324–336. (In German). DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Cree, C. Longitudinal vibrations of a circular bar. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1886, 21, 287–298.
4. Cree, C. On longitudinal vibrations. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1889, 23, 317–342.
5. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981, 282 p. (In Russian).
6. Hutchinson, J.R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, 51 (1B), 233–240. DOI: 10.1121/1.1912835.
7. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. High-frequency axisymmetric vibrations of circular disks. *Soviet Applied Mechanics*, 1976, 12, 1251–1258. DOI: 10.1007/BF00882700.

8. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length. *Soviet Physics. Acoustics*, 1978, 24 (6), 861–866.
9. Hutchinson, J.R. Vibrations of solid cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47 (4), 901–907. DOI: 10.1115/1.3153811.
10. Chernyshev, K.V. and Shegai, V.V. Natural vibrations of solid cylinders of finite length. *Akusticheskij Zhurnal*, 1977, 23, 4, 627–631. (In Russian).
11. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution. *Wave Motion*, 2003, 37, 191–206. DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
12. Puckett, A.D. and Peterson, M.L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides. *Ultrasonics*, 2005, 43 (3), 197–207. DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
13. Leissa, A.W. and So, J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, 98, 2122–2135. DOI: 10.1121/1.414331.
14. Leissa, A.W. and So, J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, 98, 2136–2141. DOI: 10.1121/1.414403.
15. Nieves, F.J., Bayón, A., and Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder. *J. Sound Vib.*, 2008, 311 (1–2), 588–596. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
16. Koga, I. Longitudinal vibrations of short circular cylinders. *J. Inst. Electr. Eng. Japan.*, 1930, 50 (508), 1209–1224.
17. Stupin, V.A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2000, 36, 896–899. DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Popov, A.L. and Sadovsky, S.A. On the correspondence of theoretical models of longitudinal vibrations of a rod with experimental data. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2021, 8 (2), 270–281. DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
19. Gadzhibekov, T.A. and Ilyashenko, A.V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio. *Mechanics of Solids*, 2021, 56, 702–714. DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov, V.V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range. *Acoustical Physics*, 2022, 68 (3), 206–214. DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Shibayama, K. Piezoceramic transducers as short rods. In: Y. Kikuchi, ed., *Ultrasonic transducers*, ch. 9, Corona Publishing Company, Tokyo, 1969, 406 p.
22. Ganopolskiy, V.V., Kasatkin, B.A., Legusha, F.F., Prudko, N.I., and Pugachev, S.I. *Pyezokeramicheskie preobrazovateli* [The Piezoceramic Transducers: The Handbook]. Sudostroenie Publ., Leningrad, 1984, 256 p. (In Russian).
23. Gaidukov, Yu.P., Danilova, N.P., and Sapozhnikov O. Vibration modes of an isotropic disk with a weak dependence on the disk thickness. *Acoustical Physics*, 1999, 45 (2), 163–171.
24. Available at: <https://calculate.co.nz/bessel-function-calculator.php>.
25. Nieves, F.J., Gascón, F., and Bayón, A. A multiple frequency in the two lowest axisymmetric vibration modes of a short cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 251 (4), 741–749. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3862.
26. Nieves, F.J.; Gascón, F., and Bayón, A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 115, 2928–2936. DOI: 10.1121/1.1739485.
27. McMahan, G.W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36 (1), 85–92. DOI: 10.1121/1.1918918.

Подана в журнал: 30.11.2023

УДК 534–1, 539–3

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.017-028

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДИСКОВ

С. Л. Скалозуб

ул. Герхарт-Гауптман-Ринг, 77, г. Франкфурт-на-Майне, 60439, Германия

 sem.sk@gmx.de

Адрес для переписки: Gerhart-Hauptmann-Ring 77, 60439, Frankfurt am Main, Deutschland
Тел.: +49 (69) 7704 3346

Аналитически рассмотрены резонансные осесимметричные колебания цилиндрических дисков из изотропных материалов в соответствии с теорией Кога. Представлены в удобном для расчетов виде соотношения, связывающие безразмерные резонансные частоты с геометрическими размерами дисков и динамическими характеристиками материала (коэффициентом Пуассона и скоростью сдвиговых волн). Вычислены и сведены в таблицы цифровые значения безразмерных резонансных частот при разных коэффициентах Пуассона в пределах 0,20–0,45 с шагом 0,05 для ряда дискретных отношений толщины к диаметру дисков в пределах от 0 до 0,853145 и от 0 до 0,30 при возбуждении колебаний первой и второй форм соответственно. Оценка методических погрешностей расчетов резонансных частот на основе сравнения с известными результатами, полученными методом Рэлея – Ритца, доказала их высокую сходимость. Рассчитаны инструментальные погрешности определения динамических характеристик материала применительно к экспериментальным результатам, полученным в ряде известных работ.

Ключевые слова: цилиндрические диски, резонансные колебания, динамический коэффициент Пуассона, скорость сдвиговых волн

1. Введение

Исследованию резонансных колебаний цилиндрических дисков и стержней посвящена обширная литература, краткий обзор которой содержится в работе [1]. Началом теоретических работ в этой области послужили статьи Похгаммера [2] и Кри [3, 4]. В общем случае использование теории Похгаммера – Кри для расчета резонансных частот продольно-поперечных колебаний цилиндрических дисков и стержней вызывает значительные математические трудности, поскольку не удается выполнить условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на торцевых и цилиндрической поверхностях [5]. Благодаря значительным усилиям многих исследователей было предложено несколько приближенных методов расчета упомянутых частот [1] (метод суперпозиции [6–9], метод однородных решений [10–12], метод Рэлея – Ритца [13–15]). Реализация этих методов связана с решением весьма сложных и громоздких систем алгебраических уравнений посредством компьютера с большими затратами машинного времени. Сравнительно несложный способ аналитического расчета резонансных частот первой формы осесимметричных колебаний цилиндрических дисков из изотропных материалов был предложен Кога в работе [16], опубликованной в 1930 году. Однако долгое время этот способ не использовался с этой целью, и только в 2000 году на основе принятых в работе [16] упрощающих предположений В. А. Ступиным были рассчитаны и сведены в таблицы значения дисперсионного коэффициента первой формы осесимметричных резонансных колебаний цилиндрических дисков в зависимости от коэффициента Пуассона ν в пределах $0,20 \geq \nu \geq 0,45$ с шагом 0,05 и от отношения толщины диска к

диаметру L/D в пределах $0,05 \leq L/D \leq 0,85$ с шагом $0,05$ [17]. Эти таблицы весьма неудобны в практических расчетах, так как требуются пересчеты значений дисперсионных коэффициентов в значения безразмерных частот. Следует отметить, что в ряде недавних известных работ [18–20], посвященных теоретическим аспектам применения волн Похгаммера – Кри и сравнению полученных теоретических и экспериментальных результатов, вопросы расчета резонансных частот продольно-поперечных колебаний цилиндрических дисков не рассматривались. Цели настоящей работы заключались в уточненном расчете по теории Кога безразмерных резонансных частот первой формы осесимметричных колебаний цилиндрических дисков в указанных выше интервалах изменений ν и L/D , в расчете безразмерных резонансных частот второй формы колебаний дисков в интервале изменения $0 \leq L/D \leq 0,30$, в оценке погрешностей расчета частот путем сопоставления с данными, полученными по методу Рэлея – Ритца, а также в оценке погрешностей определения динамических характеристик материала на основе использования рассчитанных резонансных частот и экспериментальных результатов, приведенных в известных литературных источниках.

2. Основные соотношения

Расчет безразмерных резонансных частот Ω осесимметричных колебаний цилиндрических дисков по теории Кога производился с использованием соотношений, заимствованных из работ [16] и [21]. Поскольку в работе [16] отсутствует ряд промежуточных зависимостей, важных при выводе окончательных формул для расчета Ω , в настоящей работе восполнен этот недостаток. Кроме того, ряд формул представлен в виде, более удобном для проведения вычислений.

Уравнение частот [21] (обозначение Ω в [21] заменено в настоящей работе на Ψ) имеет вид

$$\frac{\operatorname{tg}(n\Psi)}{\operatorname{th}\Psi} = \frac{4n(s+1)(s+2+n^2)}{(s+2-sn^2)^2}, \quad (1)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta-1/(s+2)}}, \quad (2)$$

$$s = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad (3)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{s+1}{s+2+n^2}} (ga) \frac{L}{D}. \quad (4)$$

В выражении (4) g – фазовая постоянная для радиального направления [21]; a – радиус диска.

Параметр (ga) является корнем уравнения

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(ga)J_1(ga)}{J_0(ga)}}, \quad (5)$$

где $J_0(ga)$, $J_1(ga)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков;

$$\Omega = \pi Df / c_2, \quad (6)$$

где f – резонансная частота. Параметр η связан с параметром (ga) в соответствии с зависимостью

$$\eta = \frac{(ga) J_0(ga)}{2 J_1(ga)}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует, что при известных значениях (ga) и η частота Ω может быть определена по формуле

$$\Omega = \frac{(ga)}{\sqrt{\eta}}. \quad (8)$$

2.1. Методика проведения расчетов

Для расчета безразмерной резонансной частоты Ω_{10} первой формы осесимметричных колебаний бесконечно тонкого цилиндрического диска в нулевом приближении использовались данные табл. 3.3 из работы [22]. В этой таблице приведены цифровые значения параметра $(ga)_{10}$ в зависимости от ν в пределах 0,24–0,40 с шагом 0,01. Значения $(ga)_{10}$ при $\nu = 0,20$ и при $\nu = 0,45$ рассчитывались методом линейной экстраполяции: при $\nu = 0,20$ $(ga)_{10} = 1,9844$; при $\nu = 0,45$ $(ga)_{10} = 2,1449$.

Для описания осесимметричных колебаний бесконечно тонкого изотропного цилиндрического диска в работе [23] выведена точная формула, из которой следует, что параметр η зависит от ν в соответствии с выражением

$$\eta = (1 - \nu) / 2. \quad (9)$$

Например, подставляя значение $\nu = 0,20$ в выражение (8), вычисляем $\eta = 0,4$. При известном значении $(ga)_{10}$ значение η_{10} в нулевом приближении рассчитываем, используя уравнение (7). Посредством калькулятора функций Бесселя [24] находим числовые значения функций $J_0(ga)_{10}$ и $J_1(ga)_{10}$. При этом значения функций выбираем с 9 цифрами после запятой. При $(ga)_{10} = 1,9844$ $J_0(ga)_{10} = 0,232895278$, $J_1(ga)_{10} = 0,577681801$, $\eta_{10} = 0,40001034$ (все необходимые вычисления выполнялись посредством калькулятора модели Sigma AK222, дисплей которого отображает 10 цифр). Поскольку $\eta_{10} > \eta$, значение $(ga)_{11}$ в первом приближении выбираем, учитывая неравенство $(ga)_{11} > (ga)_{10}$. При $(ga)_{11} = 1,98441$ $J_0(ga)_{11} = 0,232889501$, $J_1(ga)_{11} = 0,577681218$ и $\eta_{11} = 0,400002839$.

С целью ускорения подбора параметра (ga) , соответствующего наиболее точному удовлетворению уравнения (9), используем метод интерполяции (или экстраполяции) в 0 выражения

$$(\eta - 0,4) = F [(ga)_{m+1} - (ga)_m] \rightarrow 0, \quad (10)$$

где m – номер приближения. При $(m + 1) = 4$ $(ga)_{14} = 1,984413766$, $\eta_{14} = 0,400000012$. Искомое значение безразмерной частоты Ω_1 находим, используя выражение (8): $\Omega_1 = \frac{1,984413766}{\sqrt{0,4}} = 3,13763366 \cong 3,137634$.

Для расчета резонансной частоты Ω_1 второй формы осесимметричных колебаний диска нулевой толщины при заданном значении ν , например $\nu = 0,20$, вначале вычисляем значение параметра $(ga)_{20}$ в нулевом приближении по формуле

$$(ga)_{20} = \frac{f_{20}}{f_{10}} \Omega_1 \sqrt{\eta}, \quad (11)$$

где $\frac{f_{20}}{f_{10}}$ – приближенное значение отношения резонансных частот второй и первой форм колебаний для $\nu = 0,20$ по данным табл. 3.5, представленной в работе [22]. Вычисление Ω_2 производим по описанному выше алгоритму для расчета Ω_1 . $\Omega_2 = 8,490959814 \approx 8,490960$.

Для расчетов Ω_1 при $\frac{L}{D} \neq 0$ нулевые приближения Ω_{10} определяли по формуле

$$\Omega_{10} = \pi \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} K_1^{np} \frac{D}{L}, \quad (12)$$

где K_1^{np} – дисперсионный множитель, зависящий от ν и $\frac{D}{L}$. Значения K_1^{np} приведены в таблице, представленной в работе [17]. Например, при $\nu = 0,20$ $\frac{L}{D} = 0,05$, $K_1^{np} = 0,06446$ и $\Omega_{10} \approx 3,13772$. Значение параметра $(ga)_0$ в нулевом приближении определяем, используя формулу (5): $\Omega(1,984) = 3,136395$, $\Omega(1,985) = 3,140288$. Применив линейную интерполяцию, будем иметь $\Omega_{10}(1,98434) \approx 3,13772$. Значениям $(ga)_{10} \approx 1,98434$ и Ω_{10} соответствует значение $\eta_{10} = 0,400055359$, рассчитанное по формуле (8). Учитывая, что при $\nu = 0,20$ $s = 2 / 3$, по формуле (2) рассчитываем $n_{10}^2 = 23,94476331$ и $n_{10} = 4,893338667$, а затем по зависимости (4) находим $\Psi_{10} = 0,02489979$. Определяем значение функции F_{110} по левой части формулы (1):

$$F_{110} = \frac{\text{tg}(n_{10}\Psi_{10})}{\text{th}\Psi_{10}}, \quad (13)$$

$F_{110} = 4,918571765$. Находим значение функции F_{210} по правой части формулы (1): $F_{210} = 4,910288071$. Далее вычисляем разность $\Delta F_{10} = (F_{110} - F_{210}) = 0,08283694$. Задаемся значением параметра $(ga)_{11}$ в первом приближении, исходя из неравенства $(ga)_{111} < (ga)_{10}$; $(ga)_{111} = 1,98433 < 1,98434$. Используя калькулятор функций Бесселя [24], находим $J_{0(11)}(1,98433) = 0,232935715$, $J_{1(11)}(1,98433) = 0,577685875$. По аналогии с приведенными выше расчетами вычисляем последовательно $\eta_{111} = 0,40006286$, $n_{111}^2 = 23,93729766$, $n_{111} = 4,892575769$, $\Psi_{111} = 0,924833337$, $F_{111} = 4,917804198$, $F_{211} = 4,911821659$. Значение параметра $(ga)_{112}$ во втором приближении определяем по формуле линейной экстраполяции

$$(ga)_{112} = (ga)_{111} - \frac{\Delta F_{11}}{\Delta F_{10} - \Delta F_{11}} [(ga)_{110} - (ga)_{111}], \quad (14)$$

$(ga)_{112} = 1,984304002$. Затем находим значения $J_{0(12)} = 0,2329507$, $J_{1(12)} = 0,577687387$, $F_{112} = 4,915809769$, $F_{212} = 4,915811152$, $\Delta F_{12} = -0,000001383$. Значения (ga) в следующем приближении подбирают по описанному выше алгоритму поиска частоты Ω_1 для диска нулевой толщины, отличающемуся тем, что минимизируют приращения функции ΔF . При расчете Ω_2 в случае $\frac{L}{D} \neq 0$ значение параметра $(ga)_{20}$ в нулевом приближении выбиралось равным значению $(ga)_{20}$ при том же ν , но строкой выше для меньшего отношения $\frac{L}{D}$.

3. Результаты расчетов и их обсуждение

Значения безразмерных резонансных частот Ω_1 и Ω_2 , рассчитанных по изложенной выше методике для разных величин $\frac{L}{D}$ и ν , сведены в табл. 1 и 2. Значения $\Omega_1 = 2,603827$ (табл. 1) и $\Omega_2 = 7,539799$ (табл. 2), а также соответствующие им значения $(\frac{L}{D})_1 = 0,853145$ и $(\frac{L}{D})_2 = 0,294629$, приведенные в работе [1], определены с абсолютными погрешностями $\Delta\Omega \leq \pm 10^{-6}$ и $\Delta(L/D) \leq \pm 10^{-6}$ по точным формулам теории мод Кри – Лэмба. Эти моды характеризуются отсутствием сдвиговых напряжений во всем объеме цилиндрического диска.

Таблица 1

Значения резонансной частоты Ω_1 первой формы осесимметричных колебаний диска для разных значений $\frac{L}{D}$ и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	3,137639	3,294189	3,463189	3,647696	3,850851	4,076950
0,05	3,137137	3,293107	3,461597	3,645066	3,846616	4,070235
0,10	3,135625	3,290302	3,456757	3,637082	3,833816	4,050063
0,15	3,133025	3,285487	3,448470	3,623477	3,812175	4,016369
0,20	3,129210	3,278436	3,436386	3,603791	3,781244	3,969088
0,25	3,123982	3,268802	3,419986	3,577370	3,740436	3,908226
0,294629	3,118727	3,257448	3,400843	3,547013	3,694609	3,841954
0,30	3,117044	3,256082	3,398539	3,543360	3,689094	3,833978
0,35	3,107967	3,239565	3,371080	3,500738	3,626614	3,746884
0,40	3,096121	3,218268	3,336382	3,448408	3,552642	3,648004
0,45	3,080587	3,190857	3,292994	3,385385	3,467334	3,539048
0,50	3,060016	3,155603	3,239395	3,311116	3,371616	3,422390
0,55	3,032463	3,110444	3,174348	3,225874	3,287308	3,300865
0,60	2,995272	3,053344	3,097461	3,131044	3,157004	3,177484
0,65	2,945320	2,983081	3,009737	3,029116	3,043689	3,055014
0,70	2,880109	2,900243	2,913690	2,923199	2,930256	2,935710
0,75	2,799709	2,807640	2,812805	2,816428	2,819115	2,821197
0,80	2,707785	2,709503	2,710627	2,711421	2,712015	2,712479
0,85	2,610041	2,610046	2,610049	2,610051	2,610053	2,610054
0,853145	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827	2,603827

Таблица 2

Значения резонансной частоты Ω_2 второй формы осесимметричных колебаний диска для разных значений $\frac{L}{D}$ и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	8,490959	8,785132	9,109689	9,470346	9,874454	10,331651
0,05	8,484021	8,772390	9,087903	9,434742	9,817907	10,243375
0,10	8,460571	8,729628	9,015659	9,318816	9,638667	9,974030
0,15	8,409973	8,639286	8,867931	9,092475	9,309565	9,516359
0,20	8,300057	8,454717	8,589566	8,705187	8,803509	8,887058
0,25	8,031998	8,077202	8,109213	8,132806	8,150852	8,165114
0,294629	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799	7,539799
0,30	7,467986	7,468427	7,468739	7,468965	7,469138	7,469274

3.1. Оценка точности расчета резонансных частот

Источниками методических погрешностей при определении безразмерных резонансных частот с использованием таблиц их значений при разных дискретных величинах ν и $\frac{L}{D}$ являются неточности значений частот и математические операции линейной интерполяции или экстраполяции. Поскольку резонансные частоты рассчитывались с использованием 9 цифр после запятой, а итоговые значения частот округлялись до значений с 6 цифрами, можно полагать, что абсолютная погрешность приведенных в таблицах значений частот $\Delta \Omega \leq \pm 10^{-6}$. Однако следует отметить, что при выводе уравнений в теории Кога [16] использованы два следующих упрощающих предположения. Во-первых, не учитывались касательные напряжения на цилиндрической поверхности диска. Во-вторых, приравнялось к нулю интегральное значение нормальных напряжений на этой поверхности. Эти обстоятельства могли также повлиять на точность расчета. Для оценки методических погрешностей расчета частот, значения которых приведены в табл. 1 и 2, произведено их сравнение с результатами, полученными методом Рэлея – Ритца [15]. В табл. 4 работы [15] приведены результаты расчета резонансных частот первой формы Ω_{1R} и второй формы Ω_{2R} осесимметричных колебаний при $\nu = 0,286$ и $\frac{L}{D} = 0,30$ методом Рэлея – Ритца: $\Omega_{1R} = 3,358324$, $\Omega_{2R} = 7,468073$. Для этих значений ν и $\frac{L}{D}$ были рассчитаны соответствующие частоты Ω_1 и Ω_2 по теории Кога с использованием табл. 1 и 2: $\Omega_1 = 3,358360$, $\Omega_2 = 7,468652$. Расхождение $\frac{\Omega_{1R}}{\Omega_1} = \frac{3,358324}{3,358360} \approx 0,999988 = -0,0012 \%$. Расхождение $\frac{\Omega_{2R}}{\Omega_2} = \frac{7,468073}{7,468652} \approx 0,99922 = (-0,078 \%)$. С целью оценки методической погрешности, возникающей из-за линейной интерполяции при использовании значений резонансных частот, приведенных в табл. 1, была рассчитана также резонансная частота Ω_{1N} непосредственно по теории Кога для заданных значений $\nu = 0,286$ и $\frac{L}{D} = 0,30$: $\Omega_{1N} = 3,358651$. Расхождение составило $\frac{\Omega_{1N}}{\Omega_1} = \frac{3,358651}{3,358360} \approx 1,00009$ (0,009 %). Произведена также оценка погрешностей сопряжения зависимостей $\Omega_1 = F_1(L/D)$ и $\Omega_2 = F_2(L/D)$ при ν , равных 0,20; 0,30; 0,45, с точными значениями частот, соответствующих упомянутым выше модам Кри – Лэмба. Для первой формы колебаний при использовании метода линейной экстраполяции расхождения значений частот составили от 0,0025 до $-0,0083 \%$; для второй формы колебаний при использовании метода линейной интерполяции расхождения находились в пределах от $-0,015$ до $0,056 \%$.

4. Методика определения динамических характеристик материала c_2 и ν

Поскольку для образцов материала в виде дисков, для которых выполняется условие $0 \leq \frac{L}{D} \leq 0,30$, рассчитаны значения безразмерных резонансных частот (табл. 1, 2), имеется возможность определения характеристик ν и c_2 на одном образце известным обертоном способом [22]. Этот способ более удобен при проведении экспериментов и обладает повышенной точностью. Для повышения оперативности расчетов целесообразно использовать кроме таблицы 1 таблицу отношений резонансных частот второй и первой форм колебаний f_2/f_1 для разных L/D и ν (табл. 3). При использовании результатов экспериментов с образцами, для которых отношение L/D находится в указанных выше пределах, расчет ν и c_2 выполняются следующим образом. Вначале вычисляют отношение L_e/D_e по измеренным значениям толщины и диаметра образца. Затем, используя метод линейной интерполяции, по таблице 3 рассчитывают для этого отношения величины f_2/f_1 для всех значений ν , приведенных в таблице. Далее, линейно интерполируя и используя экспериментальное значение f_{2e}/f_{1e} , определяют искомое значение ν_e . Расчет c_2 производят на основе данных, приведенных в табл. 1. Применяя линейную интерполяцию, рассчитывают при L_e/D_e значения Ω_1 для всех величин

ν , приведенных в таблице. Далее находят два значения Ω_{11} и Ω_{12} , соответствующие двум табличным значениям ν_1 и ν_2 , наиболее близким к ν_e в интервале $\nu_1 < \nu_e < \nu_2$. Используя найденное ранее значение ν_e и линейно интерполируя, вычисляют частоту Ω_{1e} , а затем иско- мое значение c_{2e} находят по формуле

$$c_{2e} = \pi D f_{1e} / \Omega_{1e}. \quad (15)$$

Таблица 3

Отношения резонансных частот $\frac{f_2}{f_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ второй и первой форм колебаний диска в зависимости от значений L/D и ν

L/D	ν					
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,00	2,706162	2,666988	2,630434	2,596254	2,564226	2,534162
0,05	2,704383	2,663834	2,625350	2,588360	2,552349	2,516654
0,10	2,698209	2,653139	2,608142	2,562168	2,514118	2,462685
0,15	2,684298	2,629530	2,571555	2,509323	2,442061	2,369394
0,20	2,652445	2,578887	2,499593	2,415564	2,328204	2,239068
0,25	2,571077	2,470998	2,371124	2,273404	2,179118	2,089212
0,294629	2,417589	2,314634	2,217038	2,125676	2,040752	1,962491
0,30	2,395849	2,293685	2,197636	2,107876	2,024654	1,948179

В случаях использования образцов с отношениями $\frac{L}{D}$, находящимися в пределах $0,30 < \frac{L}{D} \leq 0,853145$, для определения характеристик ν и c_2 необходимы измерения резонансных частот первой формы колебаний двух образцов. Для уменьшения методических и инструментальных погрешностей определения ν и c_2 желательно, чтобы диаметры образцов были одинаковыми, а отношение $\frac{L_1}{D}$ одного из образцов находилось в пределах $0,85 \leq \frac{L_1}{D} < 0,853145$, а второго образца – в пределах $0,30 < \frac{L_2}{D} \leq 0,70$. Пользуясь табл. 1 и применяя линейную интерполяцию, для первого образца с отношением $\frac{L_1}{D}$ рассчитывают безразмерные резонансные частоты Ω_{11} для всех приведенных значений ν . Аналогично рассчитывают резонансные частоты Ω_{12} для второго образца с отношением $\frac{L_2}{D}$ для всех значений ν . Затем вычисляют отношения $\frac{\Omega_{11}}{\Omega_{12}} = \frac{f_1}{f_2}$. Исходя из отношения измеренных значений f_{1e}, f_{2e} и линейно интерполируя, вычисляют $\frac{\Omega_{11e}}{\Omega_{12e}}$ и ν_e . В значениях Ω_1 для разных величин ν находят Ω_{12} и Ω_{22} , для которых выполняются неравенства $\nu_{11} < \nu_e < \nu_{12}$. Методом линейной интерполяции, используя значение ν_e , вычисляют частоту Ω_{12e} . Скорость c_{2e} сдвиговых волн рассчитывают по формуле (15).

4.1. Оценка погрешностей определения характеристик c_2 и ν

Оценка погрешностей определения c_2 производилась с использованием экспериментальных результатов, приведенных в работах [26, 27].

Для дисков из алюминия диаметром $D = 39$ мм и толщиной $L = 31,2$ мм с известным коэффициентом Пуассона $\nu = 0,33$ измеренная резонансная частота первой формы колебаний $f_{s1} = 69975$ Гц [26]. Из табл. 1 для $\frac{L}{D} = 31,2/39 = 0,80$ при $\nu = 0,30$ $\Omega_{11} = 2,710627$, а при $\nu = 0,35$

$\Omega_{12} = 2,711421$. По формуле линейной интерполяции вычисляем частоту Ω_{13} , соответствующую $\nu = 0,33$: $\Omega_{13} = 2,710627 + \frac{0,3}{0,5}(2,711421 - 2,710627) = 2,711103$. Используя выражение (14), находим $c_{21} = 3162,36$ м/с.

По данным работы [27], для дисков из алюминия с $\nu = 0,33$, диаметром $D = 39$ мм и толщиной $L = 33,27$ мм, измеренная резонансная частота первой формы колебаний $f_{s1} = 67275$ Гц. Из табл. 1 для $\frac{L}{D} = 33,37/39 \approx 0,853077$ при $\nu = 0,30$ $\Omega_{11} = 2,610049$, а при $\nu = 0,35$ $\Omega_{12} = 2,610051$. Поскольку $\Omega_{11} \approx \Omega_{12}$, то $\Omega_{13} \approx 0,5(\Omega_{11} + \Omega_{12}) = 2,610050$. При $\frac{L}{D} = 0,853145$ $\Omega_{CL} = 2,603827$. Значение Ω_e вычисляется по формуле линейной интерполяции: $\Omega_e = 2,610050 - \frac{0,853077-0,85}{0,853145-0,85}(2,610050 - 2,603827) = 2,603962$. Подставив в (15) значения D, f_{s1} и Ω_e , находим $c_{22} = 3165,44$ м/с. Расхождение $\frac{c_{22}}{c_{21}} = 3165,44/3162,36 \approx 1,001$ (0,1 %).

Относительные инструментальные погрешности измерений, согласно данным работы [22], следующие: $\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{0,01 \text{ мм}}{39 \text{ мм}} = \pm 0,0256 \%$, $\frac{\Delta f_{s1}}{f_{s1}} = \pm 12,5/69975 = \pm 0,018 \%$. Без учета погрешности измерения толщины L образца средняя квадратичная инструментальная погрешность составляет приблизительно $\pm 0,03 \%$. Можно полагать, что примерно такая же погрешность соответствует данным работы [23], поскольку диаметры образцов совпадают, а резонансные частоты отличаются незначительно. Погрешность расхождения величин c_{22} и c_{21} будет в этом случае примерно равна $\pm \sqrt{2} \times 0,03 \% = \pm 0,042 \%$. Следовательно, неучет инструментальной погрешности измерения L и методических погрешностей линейной интерполяции увеличивает погрешность расхождения $\frac{c_{22}}{c_{21}}$ на $\pm \sqrt{0,1^2 - 0,042^2} \% \approx \pm 0,091\%$. Средняя квадратичная погрешность определения c_2 в одном эксперименте составит $\pm 0,091/\sqrt{2} \% \approx \pm 0,064 \%$.

Погрешности определения ν оценивались с привлечением экспериментальных данных, приведенных в работе [27]. В цилиндрических дисках и стержнях из алюминия марки 65ST возбуждались и измерялись резонансные частоты, в частности, осесимметричных продольно-поперечных колебаний при разных отношениях L/a в пределах от 0,201 до 3,29. Результаты экспериментов в работе [27] представлены на рис. 3 а в виде графиков для разных мод колебаний. Этот рисунок был увеличен на дисплее компьютера в 3,75 раза. При этом использовалась только часть рисунка до значения $L/a = 2$. Посредством штангенциркуля, обеспечивающего измерения длин с точностью до 0,05 мм, были измерены ординаты точек на кривой первой формы колебаний при $L/a = 1$ ($L/D = 0,5$) и $L/a = 1,70629$ ($L/D = 0,853145$). Значению абсциссы $L/a = 2$ соответствовало 180,5 мм, а значению ординаты Ω_0 в интервале от 1,2 до 2,4 – 217,5 мм. При $L/a = 1$ ($L/D = 0,5$) $\Omega_0 = \frac{152,5 \text{ мм}}{217,5 \text{ мм}} \times 1,2 + 1,2 = 2,041379$; при $L/a = 1,70629$ ($L/D = 0,853145$) $\Omega_{0CL} = \frac{75,8 \text{ мм}}{217,5 \text{ мм}} \times 1,2 + 1,2 = 1,618207$. В исследовании [27] рассматривались модифицированные безразмерные частоты, рассчитываемые по соотношению

$$\Omega_0 = \frac{\pi D f}{c_0}, \quad (16)$$

где c_0 – скорость волн в стержне, длина которого намного больше диаметра.

Чтобы получить значение Ω_1 , определяемое по формуле (6), необходим пересчет по зависимости

$$\Omega_1 = 2,603827 \Omega_0 / \Omega_{0CL}. \quad (17)$$

Таким образом, $\Omega_1 = \frac{2,041379}{1,618207} \times 2,603827 = 3,284745$. Это значение безразмерной частоты при $L/D = 0,5$ находится в табл. 1 между 3,239395 при $\nu = 0,30$ и 3,311116 при $\nu = 0,35$. Искомое значение

ние v_e вычисляем методом линейной интерполяции: $v_e = 0,30 + \frac{3,284745 - 3,239395}{3,311116 - 3,239395} \times 0,05 \approx 0,3316$. Расхождение со значением $v = 0,344$, указанным в работе [24], составляет $0,3316/0,344 \approx 0,964$ (–3,6 %).

В исследовании [27] приведены также данные измерений резонансных частот цилиндрических дисков и стержней из стали. В результате обработки этих данных по описанной выше методике было рассчитано значение коэффициента Пуассона $\nu_1 = 0,3015$, отличающееся от $\nu_0 = 0,293$ для стали на $0,3015/0,293 = 1,029$ (2,9 %).

5. Заключение

В удобном для выполнения расчетов виде представлены основные соотношения теории Кога для расчета безразмерных резонансных частот осесимметричных колебаний цилиндрических дисков из изотропных материалов. Предложена и обоснована числовыми примерами методика расчета безразмерных резонансных частот первой и второй форм колебаний дисков. Рассчитаны и сведены в таблицы цифровые значения этих частот для разных отношений толщин дисков к их диаметрам и разных значений коэффициента Пуассона. Произведена оценка основных методических погрешностей расчета резонансных частот по теории Кога путем их сравнения с известными расчетами методом Рэлея – Ритца. Изложена методика расчета скорости сдвиговых волн и динамического коэффициента Пуассона материала на основе использования измеряемых резонансных частот колебаний дисков. Оценены инструментальные и методические погрешности определения указанных характеристик применительно к экспериментальным результатам, приведенным в ряде известных работ.

Благодарность

Автор выражает благодарность Р. С. Скалозубу за помощь в поиске и доставке необходимой литературы и А. С. Скалозубу за компьютерное сопровождение при подготовке и оформлении рукописи статьи.

Литература

1. Мелешко В. В., Якименко Н. С., Улитко А. Ф. Резонансный метод определения упругих постоянных конечных изотропных цилиндров // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 65–75.
2. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1876. – 81 (4). – S. 324–336. – DOI: 10.1515/crll.1876.81.324.
3. Cree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1886. – Vol. 21. – P. 287–298.
4. Cree C. On longitudinal vibrations // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1889. – Vol. 23. – P. 317–342.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.
6. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – Vol. 51, iss. 1B – P. 233–240. – DOI: 10.1121/1.1912835.
7. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. High-frequency axisymmetric vibrations of circular disks // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12. – P. 1251–1258. – DOI: 10.1007/BF00882700.
8. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length // Soviet Physics. Acoustics. – 1978. – Vol. 24, No. 6. – P. 861–866.
9. Hutchinson J. R. Vibrations of solid cylinders // Journal of Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 47 (4). – P. 901–907. – DOI: 10.1115/1.3153811.
10. Чернышев К. В., Шегай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины // Акустический журнал. – 1977. – Т. 23, № 4. – С. 627–631.

11. Kari, L. Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution // *Wave Motion*. – 2003. – Vol. 37. – P. 191–206. – DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00070-7.
12. Puckett A. D., Peterson M. L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides // *Ultrasonics*. – 2005. – Vol. 43 (3). – P. 197–207. – DOI: 10.1016/j.ultras.2004.04.008.
13. Leissa A. W., So J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beam from one-dimensional and three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1995. – Vol. 98. – P. 2122–2135. – DOI: 10.1121/1.414331.
14. Leissa A. W., So J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1995. – Vol. 98. – P. 2136–2141. – DOI: 10.1121/1.414403.
15. Nieves F. J., Bayón A., Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinder // *J. Sound Vib.* – 2008. – Vol. 311 (1–2). – P. 588–596. – DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.010.
16. Koga I. Longitudinal vibrations of short circular cylinders // *J. Inst. Electr. Eng. Japan*. – 1930. – Vol. 50, No. 508. – P. 1209–1224.
17. Stupin V. A. Calculation of longitudinal oscillations in a cylinder of finite dimensions // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. – 2000. – Vol. 36. – P. 896–899. – DOI: 10.1023/A:1016722511722.
18. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. – 2021. – Т. 8 (2). – С. 270–281. – DOI: 10.21638/spbu01.2021.207.
19. Gadzhibekov T. A., Pyashenko A. V. Theoretical aspects of the application of Pochhammer–Chree waves to the problems of determining the dynamic Poisson’s ratio // *Mechanics of Solids*. – 2021. – Vol. 56. – P. 702–714. – DOI: 10.3103/S0025654421050095.
20. Mokryakov V. V. Stresses in Pochhammer–Chree axisymmetric waves in the medium-wavelength range // *Acoustical Physics*. – 2022. – Vol. 68 (3). – P. 206–214. – DOI: 10.1134/S1063771022030095.
21. Сибаяма К. Пьезокерамические преобразователи в виде коротких стержней // *Ультразвуковые преобразователи* / под ред. Е. Кикучи; пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – С. 310–352.
22. Пьезокерамические преобразователи. Методы измерения и расчет параметров : справочник / В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша, Н. И. Прудько, С. И. Пугачёв / под ред. С. И. Пугачёва. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
23. Gaidukov Yu. P., Danilova N. P., Sapozhnikov O. Vibration modes of an isotropic disk with a weak dependence on the disk thickness // *Acoustical Physics*. – 1999. – Vol. 45 (2). – P. 163–171.
24. URL: <https://calculate.co.nz/bessel-function-calculator.php>.
25. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. A multiple frequency in the two lowest axisymmetric vibration modes of a short cylinder // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 251 (4). – P. 741–749. – DOI: 10.1006/jsvi.2001.3862.
26. Nieves F. J.; Gascón F., Bayón A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2004. – Vol. 115. – P. 2928–2936. – DOI: 10.1121/1.1739485.
27. McMahon G. W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1964. – Vol. 36 (1). – P. 85–92. – DOI: 10.1121/1.1918918.

Received: 10.04.2024

Revised: 21.05.2024

Accepted: 31.05.2024

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.029-040

SOME ASPECTS IN THE NUMERICAL SIMULATION OF THE AERODYNAMICS OF A NACA 0012 AIRFOIL

E. A. Mitryukova^a, O. V. Mishchenkova^b, and A. A. Chernova^{c, *}

Kalashnikov Izhevsk State Technical University, 7 Studencheskaya St., Izhevsk, 426069, Russia

a)  <https://orcid.org/0000-0002-5350-5366>  mit_e_a@mail.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0002-8835-1184>  mov@istu.ru;

c)  <https://orcid.org/0000-0001-8579-6279>  alicaaa@gmail.com

*Corresponding author. Email: alicaaa@gmail.com

Address for correspondence: ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia

Tel.: +7 (912) 873-2582

The paper discusses the numerical simulation of the aerodynamics of an airfoil at different angles of attack. Two approaches to determining the angle of attack are considered: by changing the position of the velocity vector of the oncoming flow and by changing the relative position of the flat airfoil. The value of the angle of attack varies in the range from -5 to $+10^\circ$. Numerical simulation is performed with the openFoam package for solving continuum mechanics problems in the stationary setting based on finite volumes using the rhoSimpleFoam solver. The study results in the values of flow velocity and pressure, partially determined by the method of setting the angle of attack. A significant influence of the method of setting the angle of attack on the calculated aerodynamic coefficients is demonstrated. The mathematical correctness and numerical ambiguity of the considered approaches are assessed. A comparison among the drag coefficients, together with a qualitative analysis of the fields of physical quantities, shows incorrectness in determining the angle of attack by changing the position of the incoming flow velocity vector.

Keywords: numerical simulation, NACA 0012 airfoil, aerodynamics, angle of attack

References

1. Ladson, Ch.L. Effects of independent variation of Mach and Reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the NACA 0012 airfoil section. *NASA Technical Memorandum 4074*, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1988, 95 p.
2. Available at: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html (accessed 19.04.2024).
3. Thomas, J.L. and Salas, M.D. Far-field boundary conditions for transonic lifting solutions to the Euler equations. *AIAA Journal*, 1986, 24 (7), 1074–1080. DOI: 10.2514/3.9394.
4. Volkova, A.O. and Streltsov, E.V. Numerical study of jet perforated boundaries in the flow over the profile NACA-0012. *Trudy MFTI*, 2019, 11 (3), 116–125. (In Russian).
5. Isaev, S.A. Circular flow around a NACA 0012 profile at $Re = 40000$: paradoxes of modeling in unsteady aerodynamics. *Sovremennaya Nauka: Issledovaniya, Idei, Rezultaty, Tekhnologii*, 2012, 2 (10), 226–231. (In Russian).
6. Available at: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/index.html> (accessed at: 19.02.2024).
7. Available at: <https://help.sim-flow.com/tutorials/airfoil-naca-0012>
8. Salmanov, E.G. Research the lift of the double infinite-span wing with a NACA-0012 profile depending on the chord and the vertical interval using Ansys CFX. *Sovremennye Nauchnye Issledovaniya i Innovatsii*, 2016, 8. (In Russian). Available at: <https://web.snauka.ru/issues/2016/08/71052> (accessed 19.04.2024).

9. Chernova, A.A. Validation of rans turbulence models for the conjugate heat exchange problem. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, 18 (1), 61–82. DOI: 10.20537/nd220105.
10. Menter, F., Kuntz, M., and Langtry, R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. In: *Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 2003, 4, 625–632.
11. Galperin, V.G., Gorsky, I.P., Kovalev, A.P., and Khristianovich, S.A. The physical basis of transonic aerodynamics. *Uchenye Zapiski TsAGI*, 1974, 5 (5). (In Russian).

Подана в журнал: 10.04.2024

УДК 533

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.029-040

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АЭРОДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ПРОФИЛЯ НАСА 0012

Е. А. Митрюкова^а, О. В. Мищенко^б, А. А. Чернова^{в, *}

*Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,
ул. Студенческая, 7, г. Ижевск, 426069, Россия*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-5350-5366>  mit_e_a@mail.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-8835-1184>  mov@istu.ru;

^{в)}  <https://orcid.org/0000-0001-8579-6279>  alicaaa@gmail.com

*Ответственный автор. Электронная почта: alicaaa@gmail.com
Адрес для переписки: ул. Студенческая, 7, г. Ижевск, 426069, Россия
Тел.: +7 (912) 873-25-82

Работа посвящена вопросам численного моделирования аэродинамики профиля НАСА 0012 при различных углах атаки. Рассмотрено два подхода к определению угла атаки: за счет изменения положения вектора скорости набегающего потока и за счет изменения относительного положения плоского аэродинамического профиля. Величина угла атаки варьируется в диапазоне от -5 до $+10^\circ$. Численное моделирование проводилось с помощью пакета openFoam для решения задач механики сплошной среды в стационарной постановке на основе конечных объемов с использованием решателя rhoSimpleFoam. В результате исследования были получены значения скорости потока и давления, частично определяемые методом задания угла атаки. Показано существенное влияние метода задания угла атаки на расчетные аэродинамические коэффициенты. Дана оценка математической корректности и численной неоднозначности рассмотренных подходов. Сравнение коэффициентов сопротивления друг с другом в сочетании с качественным анализом полей физических величин показывает некорректность определения угла атаки путем изменения положения вектора скорости набегающего потока.

Ключевые слова: численное моделирование, аэродинамический профиль НАСА 0012, аэродинамика, угол атаки

1. Введение

Задачи об обтекании различных профилей НАСА [1–9] наиболее широко применяются в качестве тестовых для валидации и верификации различных подходов, численных схем и алгоритмов. Однако, несмотря на значительное количество работ по обдувке (численной и экспериментальной) плоских профилей НАСА [1–3], существуют некоторые расхождения как в выборе методов численного моделирования, так и в интерпретации его результатов [4–7, 9]. При этом значительное число работ направлено на валидацию конкретных численных схем и алгоритмов на известном экспериментальном материале [1, 3]. Вопросы исследования отдельных явлений, фиксируемых при численных и экспериментальных обдувках, рассмотрены недостаточно подробно [5]. В литературе встречается применение двух принципиально разных подходов к изменению аэродинамических углов при численных обдувках профилей:

1. Изменение угла атаки за счет корректировки направления вектора скорости набегающего потока. Данный подход широко применяется, среди прочего, для валидационных и тестовых расчетов [4, 6–8].

2. Изменение угла атаки за счет изменения положения обтекаемого тела [1, 5]. Этот подход характеризуется большей трудоемкостью.

Несмотря на значительное число работ, посвященных вопросам численного исследования особенностей аэродинамики различных тел для разных значений аэродинамических углов, обоснование корректности применения конкретного подхода к изменению аэродинамических углов (как и уточнение области применения подходов) в литературе отсутствует. Поэтому вопросы применимости каждого из вышеуказанных подходов требуют проведения новых исследований.

Таким образом, целью данной работы является исследование влияния метода задания угла атаки на аэродинамику плоского профиля. На основании проведенных исследований будут сформированы рекомендации и ограничения по применению рассматриваемых подходов к моделированию аэродинамики плоских профилей при изменении угла атаки в широком диапазоне.

2. Постановка задачи

Объектом исследования данной работы является плоский аэродинамический профиль NASA 0012, представленный на рис. 1 а. Профиль расположен в набегающем невозмущенном потоке вязкого газа. Рассматриваемая двумерная расчетная область представлена на рис. 1 б.

Геометрические характеристики рассматриваемого плоского аэродинамического профиля NASA 0012 представлены в табл. 1. Они полностью согласуются с характеристиками профилей, представленных в работах [1–3, 6–8].

Рабочей средой является воздух со следующими параметрами: динамическая вязкость $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5}$ Па·с; плотность $\rho = 1$ кг/м³; удельная теплоемкость $c_p = 1005$ Дж/(кг·К); молярная масса $M = 28,9$ кг/кмоль; число Прандтля $Pr = 0,7$. Скорость свободного потока газа при нормальных условиях соответствует числу Маха 0,15 и составляет 52,08 м/с.

При математическом описании задачи сделаны следующие допущения: не учитываются процессы теплопереноса, рабочая среда считается изотропной, шероховатость поверхностей профиля не учитывается.

Таблица 1

Геометрические характеристики профиля NASA 0012

x, мм	z, мм	x, мм	z, мм	x, мм	z, мм	x, мм	z, мм	x, мм	z, мм	x, мм	z, мм
0	0	69,02	40,63	257,01	59,58	512,08	52,16	763,82	30,15	942,73	9,02
0,58	4,26	81,77	43,44	278,4	59,91	536,22	50,52	784,03	27,98	953,44	7,61
2,33	8,43	95,49	46,05	300,32	60,02	560,27	48,76	803,58	25,83	963,09	6,32
5,25	12,5	110,16	48,46	322,7	59,9	584,18	46,91	822,42	23,71	971,66	5,17
9,32	16,47	125,75	50,65	345,49	59,58	607,89	44,98	840,51	21,63	979,12	4,15
14,53	20,33	142,2	52,63	368,65	59,04	631,35	42,98	857,80	19,61	985,47	3,28
20,88	24,07	159,49	54,37	39,21	58,32	654,51	40,92	874,26	17,64	990,69	2,56
28,34	27,68	177,58	55,89	415,82	57,4	677,30	38,81	889,84	15,74	994,75	1,99
36,91	31,16	196,42	57,16	439,73	56,32	699,68	36,67	904,51	13,91	997,67	1,59
46,56	34,48	215,97	58,21	463,78	55,08	721,60	34,51	918,24	12,18	999,42	1,34
57,27	37,64	236,18	59,01	487,92	53,69	742,99	32,33	930,98	10,55	1000,00	1,26

Таким образом, задача об аэродинамике профиля NASA 0012 может быть описана системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \mathbf{F} \mathbf{U} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathbf{q} \\ p = \rho R T \end{array} \right. , \quad (1)$$

где ρ – плотность газа; p – давление; \mathbf{U} – вектор скорости; \mathbf{P} – тензор напряжений; \mathbf{F} – объемная сила; T – температура; R – удельная газовая постоянная; c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме; \mathbf{q} – вектор теплового потока.

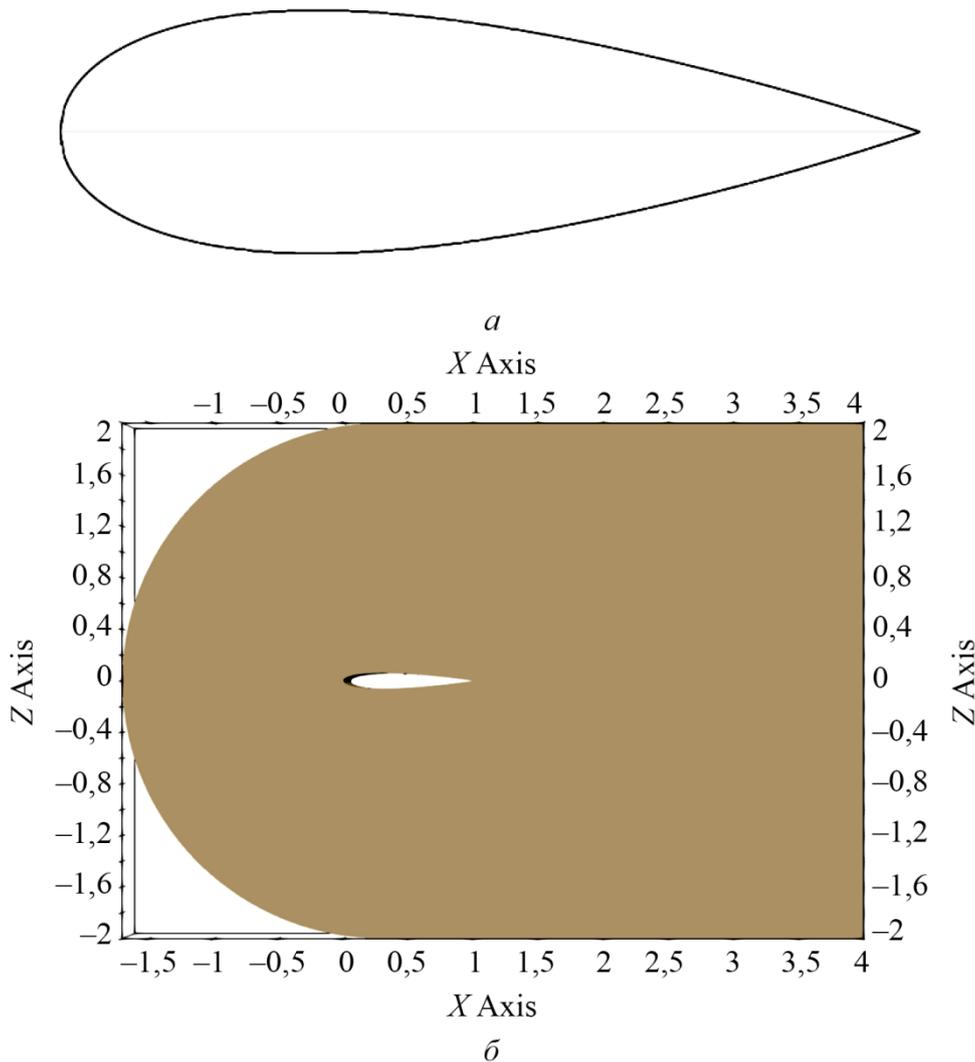


Рис. 1. Аэродинамический профиль в потоке: профиль NACA 0012 (а); расчетная область (б)

Характеристики профиля NACA 0012 подобраны таким образом, чтобы его длина, принятая за характерный размер, составляла 1 м. Таким образом, число Рейнольдса, соответствующее рассматриваемому числу Маха, при вышеуказанных параметрах среды достигает $Re = 6000000$ [1, 3, 6, 8], что соответствует турбулентному режиму течения. Поэтому система уравнения (1) в дивергентном виде осреднялась по Фавру и Рейнольдсу [3, 10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\tau}_{tij}) + \bar{F}_i \\ \frac{\partial \bar{p} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{E} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{u}_i (\tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\tau}_{tij})] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{q}_j + \bar{q}_{ti}) + \bar{F}_i \tilde{u}_j \\ \bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \end{array} \right. \quad (2)$$

В уравнении (2) $\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ – осредненный по Фавру вязкий тензор напряжений; $\tilde{\tau}_{tij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \bar{\rho} \delta_{ij}$ – осредненный по Фавру турбулентный тензор напряжений; μ_t – динамический коэффициент турбулентной вязкости; $k = \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2\bar{\rho}}$ – удельная кинетическая энергия турбулентного движения; ω – удельная турбулентная диссипация; $\varepsilon = C_\mu k \omega$ – турбулентная диссипация; $\bar{q}_{tj} = -\overline{\rho u_i'' h''}$ – турбулентный тепловой поток.

Турбулентная вязкость определяется по модели турбулентности Ментера (SST k - ω) [7, 11] следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} k \tilde{u}_j}{\partial x_j} = \tilde{P}_k - \beta \bar{p} k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{\partial \bar{p} \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \omega \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 2\alpha \bar{p} S_{ij} S_{ij} - \beta \bar{p} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \bar{p} \sigma_\omega^2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \\ P_k = \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow \tilde{P}_k = \min(P_k, 10\beta \bar{p} k \omega) \\ F_1 = \tanh \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\bar{p} \sigma_\omega^2 k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \\ CD_{k\omega} = \max \left(2\bar{p} \sigma_\omega^2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

где F_1 – первая функция сопряжения; y – расстояние до ближайшей стенки, $\mu_t = \frac{\bar{\rho} \alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \sqrt{2S_{ij} S_{ij}} F_2)}$ – коэффициент турбулентной вязкости; $F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\}$ – вторая функция сопряжения. Все константы модели в уравнениях (2), (3) определены согласно работе [9].

Граничные условия определены следующим образом: на непроницаемых стенках использовали условие прилипания и непротекания, на входной границе определяли скорость набегающего потока (табл. 2), задавали температуру и давление газа ($T = 300$ К, $P = 183133$ Па), на выходной границе применяли мягкие граничные условия.

Построенная таким образом на основе уравнений сохранения система уравнений решается приближенно на основе метода конечных объемов в рамках стационарной постановки. Численное моделирование проводится в пакете для решения задач механики сплошных сред openFOAM с применением решателя rhoSimpleFoam.

Расчет проводили методом установления с использованием итерационной процедуры сходимости по невязке скорости и давления 10^{-6} . Для разрешения невязких потоков применяли противопоточную схему Гаусса 2-го порядка с ограничителем, а для вязких потоков – схема Гаусса 2-го порядка точности.

Таблица 2

Определение скорости набегающего потока газа на входной границе

Угол атаки	u , м/с	v , м/с	w , м/с
определение угла атаки путем изменения положения аэродинамического профиля			
$\alpha = (-5 \div 10)^\circ$	52,08	0	0
определение угла атаки путем изменения положения вектора скорости набегающего потока			
$\alpha = -5^\circ$	51,88181988	0	-4,539071082
$\alpha = -4^\circ$	51,95313574	0	-3,632917153
$\alpha = -3^\circ$	52,00862617	0	-2,725656601
$\alpha = -2^\circ$	52,04827427	0	-1,817565788
$\alpha = -1^\circ$	52,07206796	0	-0,908921327
$\alpha = -0^\circ$	52,08	0	0
$\alpha = 1^\circ$	52,07206796	0	0,908921327
$\alpha = 2^\circ$	52,04827427	0	1,817565788
$\alpha = 3^\circ$	52,00862617	0	2,725656601
$\alpha = 4^\circ$	51,95313574	0	3,632917153
$\alpha = 5^\circ$	51,88181988	0	4,539071082
$\alpha = 6^\circ$	51,79470031	0	5,443842367
$\alpha = 7^\circ$	51,69180358	0	6,346955405
$\alpha = 8^\circ$	51,57316102	0	7,248135098
$\alpha = 9^\circ$	51,43880878	0	8,147106939
$\alpha = 10^\circ$	51,28878778	0	9,043597093

Дискретизацию расчетной области по пространству (рис. 2) производили с помощью шестигранных элементов.

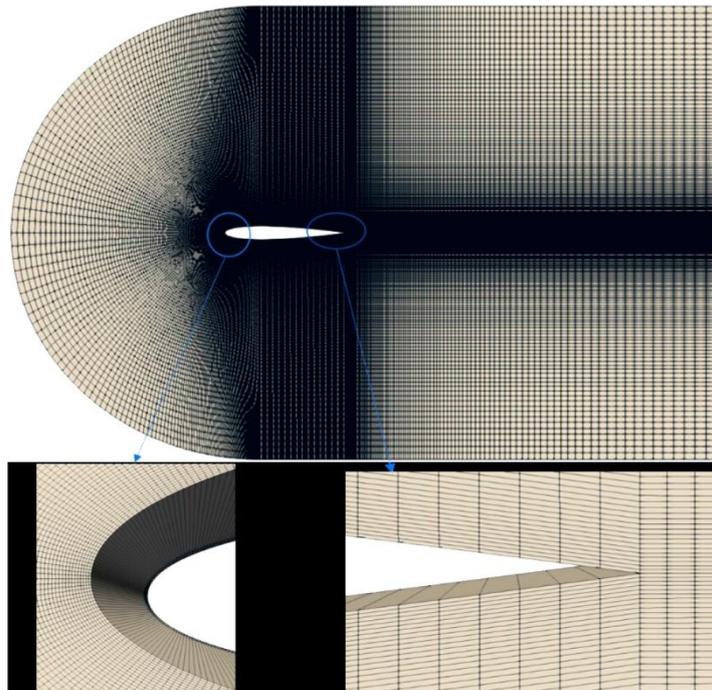


Рис. 2. Дискретизация расчетной области по пространству

Общее количество элементов, выбранное по результатам исследований на сеточную сходимость (влияние точности разрешения профиля на величину аэродинамических коэффициентов), составляет 90 000 шестигранников для псевдоплоской расчетной области (рис. 1), максимальная скошенность ячеек составляет 0,785 при средней неортогональности сетки 5,7, $y^+ = 0,4$.

3. Результаты численного моделирования

В результате расчетов были получены распределения полей давлений, скоростей, температур, а также оценены интегральные характеристики потока, силы аэродинамического сопротивления, и построены аэродинамические коэффициенты для всех рассмотренных значений угла атаки, определенных как за счет изменения угла наклона профиля, так и ориентацией вектора скорости набегающего потока.

На рис. 3 приведено сопоставление полей статических давлений в расчетной области для углов атаки -5° , -1° , 5° и 10° , заданных двумя рассматриваемыми подходами. Анализ полей давлений позволяет сделать вывод о согласованности геометрического положения областей локальных экстремумов давлений относительно положения профиля, рассчитанных в рамках разных подходов определения угла атаки. Необходимо отметить, что области локализации экстремумов давлений согласуются с физическими особенностями дозвукового обтекания аэродинамического профиля и не противоречат данным, представленным в работе [12].

Однако, поскольку положение точек торможения, как и линий уровня давлений, определяется в том числе и геометрией профиля (включая и его расположение относительно набегающего потока), пространственное положение областей торможения и отрыва потока, как и их геометрические характеристики, при углах атаки более 1° имеют ряд характерных отличий. Так, на рис. 3 ($\alpha = -5^\circ$) видно, что расположение профиля под углом к набегающему потоку, в отличие от изменения угла вектора набегающего потока, приводит к ориентации области сжатия газа вблизи тупого носика профиля по нормали к S-образной средней линии профиля, то есть к развороту области сжатия на угол, равный углу атаки. Кроме того, необходимо отметить изменение топологии линий уровня: при стандартном расположении аэродинамического профиля (с сохранением параллельности его хорды условному горизонту) область сжатия ограничивается окружными линиями уровня со значениями давления 183000 Па, форма ограничивающих область сжатия линий уровня при повороте профиля изменяется на секторальную (рис. 3 а при $\alpha = -5^\circ$) скачкообразного вида. Также необходимо отметить изменение ориентации аэродинамического следа в спутном потоке газа за профилем. Поскольку наблюдается ориентация следа по хорде профиля, при изменении угла атаки путем отклонения профиля аэродинамический след формируется под углом к горизонту, а при задании угла атаки за счет изменения вектора скорости набегающего потока след остается параллельным горизонту.

Аналогичные изменения, дополнительно сопряженные с уменьшением линейных размеров, можно выделить для хвостовой части и нижней поверхности профиля (рис. 3). Совокупность обозначенных выше отличий связана с изменением распределения давлений по поверхности профиля и, как следствие, приводит к рассогласованию расчетных значений аэродинамических коэффициентов.

График изменения коэффициента момента тангажа в зависимости от величины угла атаки для двух рассмотренных подходов представлен на рис. 4 а. Зависимость аэродинамического сопротивления от величины угла атаки для двух рассмотренных подходов приведена на рис. 4 б. А сопоставление влияния угла атаки на значения коэффициента подъемной силы, полученные в рамках двух рассматриваемых подходов, показано на рисунке 4 в.

Сопоставление значений коэффициента подъемной силы (рис. 4 в), полученных в рамках двух рассмотренных подходов, показывает хорошее согласование данных, с одной стороны, и отсутствие влияния метода задания угла атаки на коэффициент подъемной силы – с другой.

Из рис. 4 *a, б* видно, что коэффициент момента тангажа и коэффициент сопротивления существенным образом зависят от метода начального определения (задания) угла атаки.

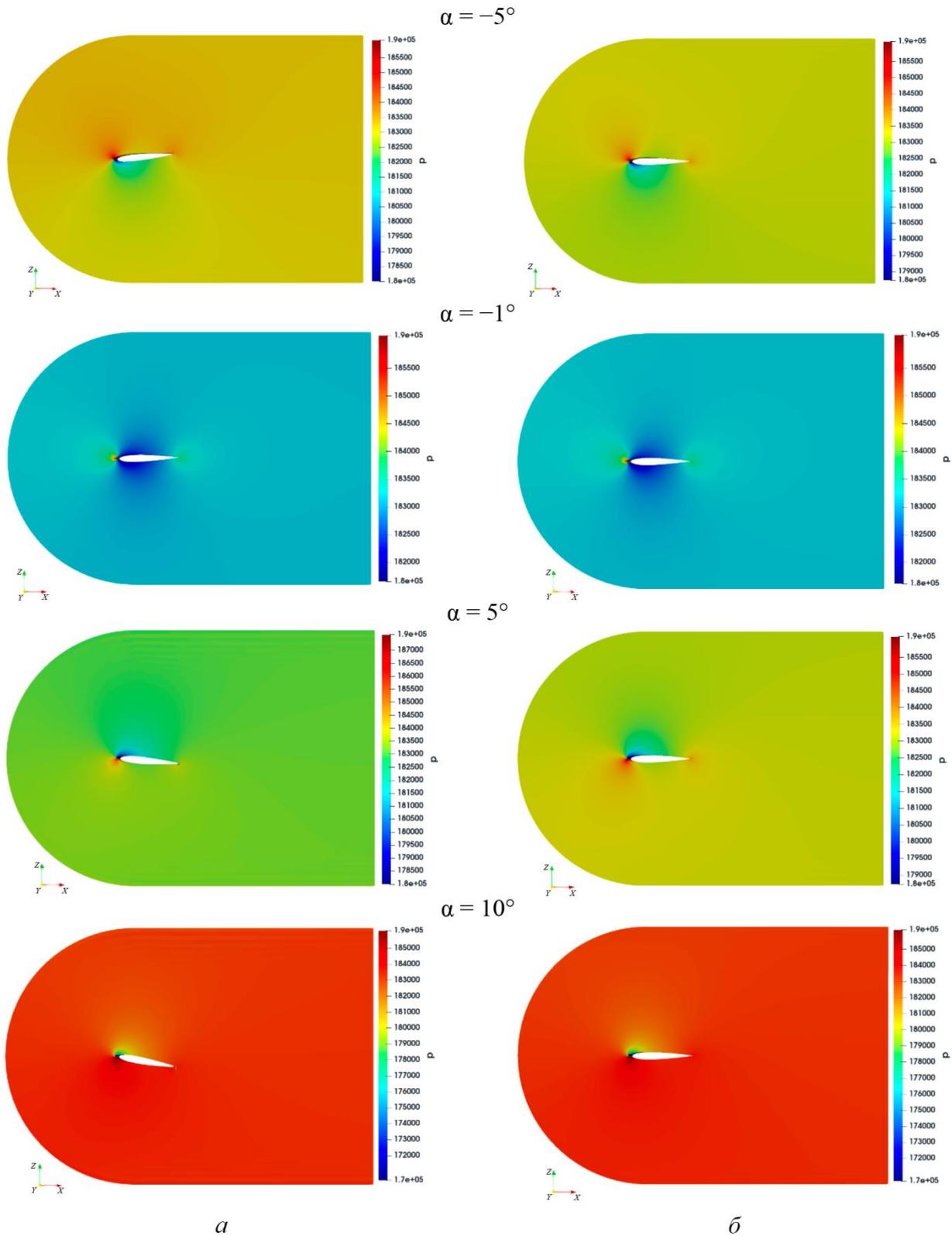


Рис. 3. Поле давления для различных углов атаки аэродинамического профиля при его повороте на заданный угол (*a*) и изменении направления вектора набегающего потока (*б*)

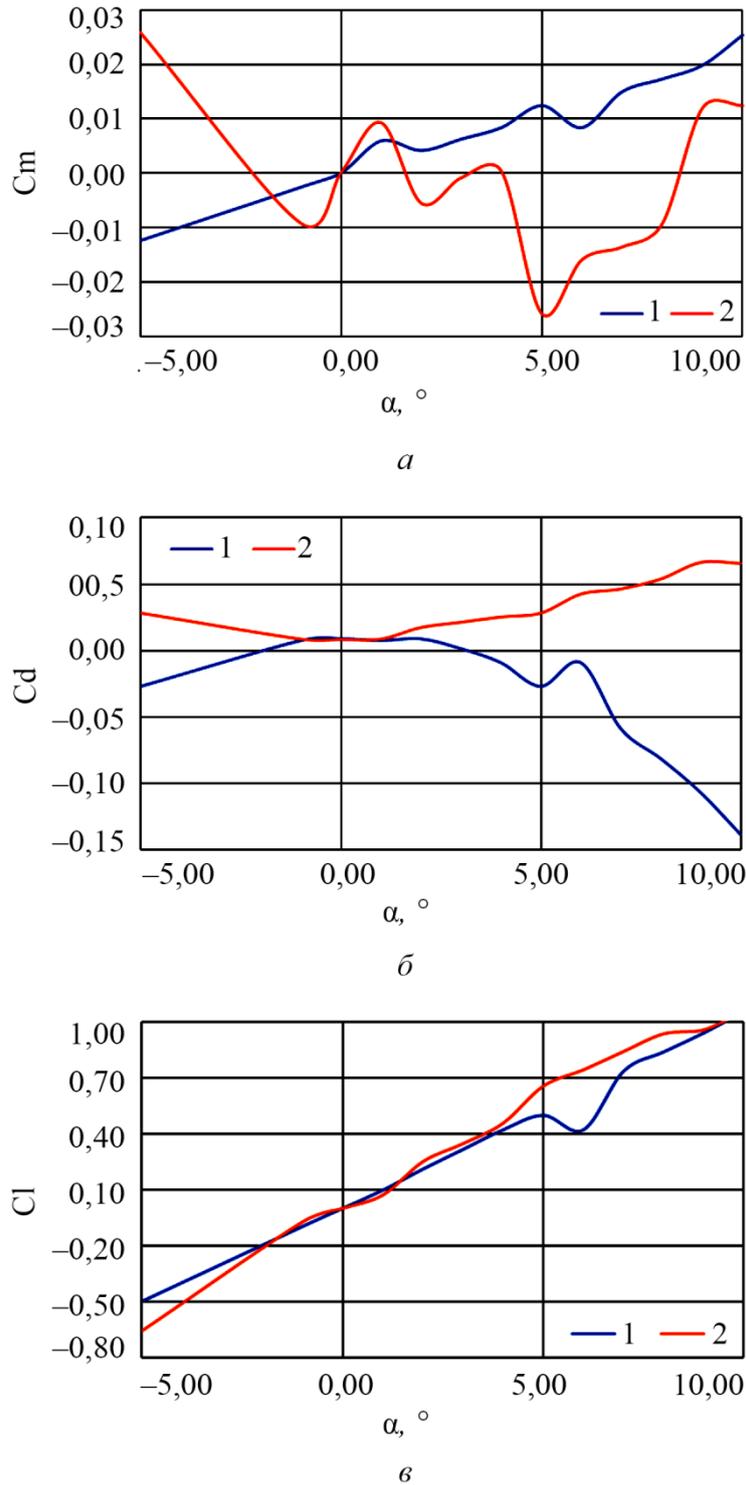


Рис. 4. Зависимость коэффициента момента тангажа (а), аэродинамического сопротивления (б) и коэффициента подъемной силы (в) от угла атаки за счет ориентации: 1 – вектора скорости набегающего потока; 2 – плоского профиля в пространстве

Отметим, что выявленные расхождения коэффициентов момента тангажа и сопротивления обусловлены как перестройкой эпюр давления, трансформацией линий уровня давления, так и изменением площади поверхности интегрирования при построении коэффициентов. Оценка диапазона рассогласования расчетных данных, полученных в рамках рассмотренных подходов, приведена в табл. 3.

Таблица 3

Диапазон отклонения аэродинамических коэффициентов профиля при разных методах задания угла атаки

Параметр	Cm	Cd	Cl
Минимальные расхождения коэффициентов	0,003279	0,001602	0,000724
$\alpha, ^\circ$	1	1	2
Максимальные расхождения коэффициентов	0,038284	0,204238	0,191147
$\alpha, ^\circ$	-5	10	10

Минимальные расхождения всех рассматриваемых аэродинамических коэффициентов зафиксированы при малых углах атаки $\alpha = (0 \div 2)^\circ$. При этом максимальные отклонения для коэффициентов сопротивления и подъемной силы достигаются при максимальных положительных значениях углов атаки.

4. Заключение

В работе рассмотрены вопросы численного моделирования аэродинамики плоского профиля NASA 0012 с использованием инструментов пакета с открытым исходным кодом OpenFOAM. Исследовано влияние метода задания угла атаки на аэродинамику плоского профиля. Показано согласование геометрического положения областей локальных экстремумов давлений относительно положения профиля, рассчитанных в рамках разных подходов определения угла атаки с физическими особенностями дозвукового обтекания, а также изменение ориентации области сжатия газа вблизи тупого носика профиля, изменение топологии линий уровня давлений и переориентация аэродинамического следа в спутном потоке газа за профилем. Выявлено рассогласование расчетных значений аэродинамических коэффициентов. Показано, что обтекание плоского профиля при малых величинах угла атаки ($\pm 2^\circ$) практически не зависит от метода задания угла атаки. Для значений углов атаки более $\pm 2^\circ$, с учетом описанных особенностей формирования аэродинамического следа, корректней применение подхода, предполагающего геометрическое ориентирование профиля на заданный угол относительно набегающего потока воздуха.

Литература

- Ladson Ch. L. Effects of independent variation of Mach and Reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the NASA 0012 airfoil section // NASA Technical Memorandum 4074. – Hampton, Virginia : Langley Research Center, 1988. – 95 p.
- URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html (accessed 19.04.2024).
- Thomas J. L., Salas M. D. Far-field boundary conditions for transonic lifting solutions to the Euler equations // AIAA Journal. – 1986. – Vol. 24 (7). – P. 1074–1080. – DOI: 10.2514/3.9394. 10.2514/3.9394.
- Волкова А. О., Стрельцов Е. В. Численное моделирование обтекания профиля naca-0012 в струйно-перфорированных границах // Труды МФТИ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 116–125.
- Исаев С. А. Круговая обдувка профиля NASA0012 при $Re = 40000$: парадоксы моделирования в нестационарной аэродинамике // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2012. – № 2 (10). – С. 226–231.
- URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/index.html> (accessed 19.02.2024).
- URL: <https://help.sim-flow.com/tutorials/airfoil-naca-0012>
- Салманов Э. Г. Исследование подъемной силы двойного крыла бесконечного размаха с профилем NASA-0012 в зависимости от хорды и вертикального интервала в пакете Ansys CFX // Современные научные исследования и инновации. – 2016. – № 8. – URL: <https://web.snauka.ru/issues/2016/08/71052> (дата обращения: 19.04.2024).

9. Chernova A. A. Validation of RANS turbulence models for the conjugate heat exchange problem // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol. 18, No. 1. – P. 61–82. – DOI: 10.20537/nd220105.
10. Menter F., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // The Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, 12–17 October, 2003 : Proceedings. – 2003. – Vol. 4. – P. 625–632.
11. Физические основы околзвучковой аэродинамики / В. Г. Гальперин, И. П. Горский, А. П. Ковалев, С. А. Христианович // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Vol. 5, No. 5.

Received: 23.01.2024

Revised: 11.04.2024

Accepted: 24.05.2024

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063

EXACT SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR UNIDIRECTIONAL FLOWS OF MICROPOLAR FLUIDS IN A MASS FORCE FIELD

N. V. Burmasheva^a and E. Yu. Prosviryakov^{b, *}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The paper presents a family of exact solutions to the Navier-Stokes equation system used to describe inhomogeneous unidirectional flows of a viscous fluid taking into account couple stresses. Despite the presence of only one non-zero component of the velocity vector, this component depends on time and two spatial coordinates. In view of the incompressibility equation, which is a special case of the mass conservation law, there is no dependence on the third spatial coordinate. The resulting redefined system of equations is considered in a non-stationary formulation. The construction of a family of exact solutions for the resulting redefined equation system begins with the analysis of the homogeneous Couette-type solution as the simplest in this class. Further, the structure of the solution gradually becomes more complicated, i.e. the profile of the only non-zero component of the velocity vector is represented as a polynomial depending on one variable (horizontal coordinate). The polynomial coefficients functionally depend on the second (vertical) coordinate and time. It is shown that, due to the strong nonlinearity and heterogeneity of the equation under study, the sum of its individual solutions is not a solution. It is also shown that, in the linearly independent basis of the power functions of the horizontal coordinate, which determine the above-mentioned polynomial, the equation in question decomposes into a chain of the simplest homogeneous and inhomogeneous parabolic partial differential equations. These equations are integrated sequentially, the order of integration being described separately. The results reported in this study extend the family of previously presented exact solutions to describing unidirectional unsteady flows.

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, inhomogeneous unidirectional flow, couple stresses, micropolar fluids

References

1. Couette, M. Etudes sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, 21, 433–510.
2. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1840, 11, 961–967.
3. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1840, 11, 1041–1048.

4. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (suite). *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1841, 12, 112–115.
5. Stokes, G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Camb. Philo. Trans.*, 1851, 9, 8–106.
6. Nußelt, W. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1910, 54, 1154–1158.
7. Nagel, Yu.A. Plane one-dimensional stationary flow of an ideal charged gas in its own electric field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, 12, 19–26. DOI: 10.1007/BF00853977.
8. Faskheev, I.O. One-dimensional flow of a fluid through a porous skeleton with consideration of the Darcy and frontal pressure interaction forces. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2013, 68, 21–24. DOI: 10.3103/S0027133013010044.
9. Wallis, G. *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, 1969, 408 p.
10. Borzenko, E.I. and Shrager, G.R. *Techeniya nenyutonovskoy zhidkosti so svobodnoy pov-erkhnostyu* [Flows of a Non-Newtonian Liquid With a Free Surface]. Izd-vo Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta Publ., Tomsk, 2022, 210 p. (In Russian).
11. Prokudin, S.V., Sofyin, A.S., and Agapov, A.A. Analytical solution of the problem of one-dimensional stationary flowing of the compressed liquid and gas. *Bezopasnost Truda v Promyshlennosti*, 2017, 5, 36–41. (In Russian). DOI: 10.24000/0409-2961-2017-5-36-41.
12. Valiyev, Kh.F., Kraiko, A.N., and Tillyayeva, N.I. Stability of one-dimensional steady flows with detonation wave in a channel of variable cross-sectional area. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, 60 (4), 697–710. DOI: 10.1134/S096554252004017X.
13. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, 5, 23–39. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039. Available at: http://dream-journal.org/issues/2019-5/2019-5_259.html
14. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 2, pp. 61–75. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. Available at: http://dream-journal.org/issues/2020-2/2020-2_288.html
15. Bhaskar, B.S. and Chaudhary, S.K. Review of fluid flow and heat transfer through porous media heat exchangers. *International Journal of New Innovations in Engineering and Technology*, 2016, 6 (2), 28–42.
16. Singh, H. and Myong, R.S. Critical review of fluid flow physics at micro- to nano-scale porous media applications in the energy sector. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2018, 2018, 9565240. DOI: 10.1155/2018/9565240.
17. Coussot, P. Yield stress fluid flows: a review of experimental data. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, 211, 31–49. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2014.05.006.
18. Kiselev, A. Diffusion and mixing in fluid flow: a review. In: Ed., V. Sidoravičius, *New Trends in Mathematical Physics*, Springer, Dordrecht, 2009. DOI: 10.1007/978-90-481-2810-5_24.
19. Taira, K., Brunton, S.L., Dawson, S.T.M., Rowley, C.W., Colonius, T., McKeon, B.J., Schmidt, O.T., Gordeyev, S., Theofilis, V., and Ukeiley, L.S. Modal analysis of fluid flows: an overview. *AIAA JOURNAL*, 2017, 55 (12), 4013–4041. DOI: 10.2514/1.J056060.
20. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.

21. Smagorinsky, J. History and progress. In: *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program*, National Academy of Sciences, 1978, 4–12.
22. Smagorinsky, J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: Early recollections. In: Ed., B. Zaltzman, *Advances in Geophysics, Theory of Climate*, vol. 25, Academic Press, 1983, 3–37.
23. Smagorinsky, J., Phillips, N.A. Scientific problems of the global weather experiment. In: *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*, National Academy of Science, 1978, 13–21.
24. Burmasheva, N.V., Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
25. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. A class of exact solutions for two–dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, 32, 33–48. (In Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
26. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, 3, 29–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046. Available at: http://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_291.html
27. Zyryanov, V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techeniy* [The Theory of Steady Ocean Currents]. Gidrometeoizdat Publ., Leningrad, 1985, 248 p. (In Russian).
28. Korotaev, G.K., Mikhailova, E.N., and Shapiro, N.B. *Teoriya ekvatorialnykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World's Oceans]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1986, 208 p. (In Russian).
29. Monin, A.S. *Teoreticheskie osnovy geofizicheskoy gidromekhaniki* [Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics]. Gidrometeoizdat Publ., Leningrad, 1988, 424 p. (In Russian).
30. Pedlosky, J. *Geophysical fluid dynamics*, Springer–Verlag, Berlin, New York, 1987, 710 p.
31. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
32. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7 (3), 43–44. DOI: 10.1007/BF00914697.
33. Burmasheva, N.V., Larina, E.A., and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176, 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
34. Aristov, S.N. and Nycander, J. Convective flow in baroclinic vortices. *Journal Physical Oceanography*, 1994, 24 (9), 1841–1849. DOI: 10.1007/BF00914697.
35. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
36. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
37. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, 54 (1), 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
38. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, 23 (2), 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.

39. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyinin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15, 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
41. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56 (5), 662–668. DOI: 10.1134/S0040579522050207.
42. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of the Couette–Poiseuille type for steady concentration flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, 164 (4), 285–301. (In Russian). DOI: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301.
43. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows. *Dynamics*, 2022, 2 (4), 367–379. DOI: 10.3390/dynamics2040021.
44. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial acceleration. *Russian Mathematics*, 2021, 65 (7), 8–16. DOI: 10.3103/S1066369X21070021.
45. Burmasheva, N.V., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sādhanā*, 2021, 46, 55. DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
46. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*, 2020, 32 (8), 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
47. Bekezhanova, V.B. and Goncharova, O.N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, 894, 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012023.
48. Bekezhanova, V. and Goncharova, O. Problems of evaporative convection (review). *Fluid Dynamics*, 2018, 53, S69–S102. DOI:10.1134/S001546281804016X.
49. Bekezhanova, V. and Goncharova, O. Theoretical analysis of the gravity impact on the parameters of flow regimes with inhomogeneous evaporation based on an exact solution of convection equations. *Microgravity Science and Technology*, 2022, 34, 88. DOI: 10.1007/s12217-022-10006-z.
50. Dikanskii, Yu.I., Bedzhanyan, M.A., Kolesnikova, A.A., Gora, A.Yu., and Chernyshev, A.V. Dynamic effects in a magnetic fluid with microdrops of concentrated phase in a rotating magnetic field. *Technical Physics*, 2019, 64 (3), 337–341. DOI: 10.1134/S1063784219030113.
51. Polunin, V.M., Ryapolov, P.A., Platonov, V.B., Sheldeshova, E.V., Karpova, G.V., and Arefev, I.M. Elasticity of a magnetic fluid in a strong magnetic field. *Acoustical Physics*, 2017, 63 (4), 416–423. DOI: 10.1134/S1063771017040108.
52. Pivovarov, D.E. Numerical investigation of natural convection in slope longitudinal air layer. *Trudy MAI*, 2013, 68. (In Russian). Available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
53. Shablovsky, O.N. Spherical flow of an ideal fluid in a spatially nonuniform field of force. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2020, 64, 146–155. (In Russian). DOI 10.17223/19988621/64/11.
54. Kozlov, V.G., Kozlov, N.V., and Subbotin, S.V. Motion of fluid and a solid core in a spherical cavity rotating in an external force field. *Doklady Physics*, 2014, 59, 40–44. DOI: 10.1134/S1028335814010078.
55. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html

56. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176, 030002. DOI: 10.1063/1.5135126.
57. Burmasheva, N.V., Larina, E.A., and Prosviryakov, E.Yu. A layered unidirectional flow of a viscous incompressible fluid induced in a closed layer by a nonuniform distribution of temperature and pressure fields, with allowance for the perfect slip condition. *AIP Conference Proceedings*, 2020, 2315, 020011. DOI: 10.1063/5.0036715.
58. Burmasheva, N. and Prosviryakov, E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2 (2), 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
59. Burmasheva, N.V., Dyachkova, A.V., and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Poiseuille flow. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2022, 77, 68–85. (In Russian). DOI: 10.17223/19988621/77/6.
60. Dinariyev, O.Yu. and Nikolayevskii, V.N. Defining relations for a viscoelastic medium with microrotation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 61 (6), 987–994. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00127-5.
61. DeSilva, C.N. and Kline, K.A. Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1968, 19 (1), 128–139. DOI: 10.1007/BF0160328419.
62. Allen, S.J., DeSilva, C.N., and Kline, K.A. Theory of simple deformable directed fluids. *Phys. Fluids*, 1967, 10 (12), 2551–2555. DOI: 10.1063/1.1762075.
63. Eringen, A.C. Linear theory of micropolar viscoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 5, 191–204, DOI: 10.1016/0020-7225(67)90004-3.
64. Stokes, V.K. Couple stresses in fluids. *Phys. Fluids*, 1966, 9 (9), 1709–1715. DOI: 10.1063/1.1761925.
65. Stokes, V.K. *Theories of Fluids with Microstructure. An Introduction*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 212 p. DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0.
66. Stokes, V.K. Effects of couple stresses in fluids on hydromagnetic channel flows. *Physics of Fluids*, 1968, 11, 1131–1133. DOI: 10.1063/1.1692056.
67. Stokes, V.K. On some effects of couple stresses in fluids on heat transfer. *J. Heat Transfer*, 1969, 91 (1), 182–184. DOI: 10.1115/1.3580094.
68. Asibor, R.E., Omokhuale, E. Micropolar fluid behavior with constant pressure, permeability, heat and mass transfer. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 2017, 6 (12), 36–43.
69. Bég, O.A., Zueco, J., Takhar, H.S. Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann–Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ionslip, viscous and Joule heating effects: network numerical solutions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14 (4), 1082–1097. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.03.015.
70. Kocić, M., Stamenković, Ž., Petrović, J., and Bogdanović-Jovanović, J. Control of MHD flow and heat transfer of a micropolar fluid through porous media in a horizontal channel. *Fluids*, 2023, 8 (3), 93 (1–19). DOI: 10.3390/fluids8030093.
71. El-Kabeir, S.M.M., Modather, M., Mansour, M.A. Effect of heat and mass transfer on free convection flow over a cone with uniform suction or injection in micropolar fluids. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 11 (1), 15–35.
72. Rafique, Kh., Ibrar, N., Munir, A., Khalid A., Ijaz, A., and Asghar, A. Numerical analysis for energy transfer analysis of micropolar nanofluid by Keller box scheme. *Acta Scientific Applied Physics*, 2023, 3 (3), 36–44.
73. Xu, Q., Zhong, X. Strong solutions to the three-dimensional barotropic compressible magneto-micropolar fluid equations with vacuum. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2021, 73 (1), 14. DOI: 10.1007/s00033-021-01642-3.

74. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13, 1355 (1–12). DOI: 10.3390/sym13081355.
75. Cosserat, E. and Cosserat, F. *Théorie des Corps déformables*, A. Hermann et Fils, Paris, 1909, 226.
76. Aero, E.L., Bulygin, A.N. and Kuvshinski, E.V. Asymmetric hydromechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, 29, 333–346. DOI: 10.1016/0021-8928(65)90035-3.
77. Eringen, A.C. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 1966, 16 (1), 1–18.
78. Korn, G.A. and Korn, T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, Courier Corporation, North Chelmsford, 2013, 1152 p.

Подана в журнал: 23.01.2024

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

Н. В. Бурмашева^a, Е. Ю. Просвиряков^{b, *}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002, Россия*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: +7 (343) 374-53-30

В статье представлено семейство точных решений системы уравнений Навье – Стокса, используемой для описания неоднородных однонаправленных течений вязкой жидкости с учетом моментных напряжений. Несмотря на наличие только одной ненулевой компоненты вектора скорости, эта самая компонента зависит от времени и двух пространственных координат. Зависимость от третьей пространственной координаты отсутствует ввиду уравнения несжимаемости, являющегося частным случаем закона сохранения массы. Получающаяся переопределенная система уравнений рассматривается в нестационарной постановке. Построение семейства точных решений полученной переопределенной системы начинается с анализа однородного решения типа Куэтта как наиболее простого в этом классе. Далее структура решения постепенно усложняется: профиль единственной ненулевой компоненты вектора скорости представлен в виде полинома, зависящего от одной переменной (горизонтальной координаты). Коэффициенты полинома функционально зависят от второй (вертикальной) координаты и времени. Показано, что, ввиду сильной нелинейности и неоднородности исследуемого уравнения, сумма отдельных его решений не является решением. Также показано, что в линейно независимом базисе степенных функций горизонтальной координаты, определяющих вышеупомянутый полином, рассматриваемое уравнение распадается на цепочку простейших однородных и неоднородных уравнений в частных производных параболического типа. Данные уравнения интегрируются последовательно, порядок интегрирования отдельно описан. Результаты, изложенные в данной статье, обобщают ранее представленное авторами семейство точных решений для описания однонаправленных нестационарных течений.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье – Стокса, неоднородное однонаправленное течение, моментные напряжения, микрополярные жидкости

1. Введение

При изучении несжимаемых течений вязких жидкостей для первоначальных исследований используют одномерное представление потока [1–14]. К однонаправленным течениям относятся многочисленные движения жидкости, сформировавшие классическое гидродинамическое представление о поперечной структуре течения [15–20]. Точное решение Куэтта,

точное решение Пуазейля, первая и вторая задачи Стокса, точное решение Нуссельта и ряд других аналитических результатов одномерной гидродинамики описываются для понимания механизмов переноса импульса в жидкости при постоянной температуре [1–6].

Профиль скорости Куэтта – Стокса – Пуазейля – Нуссельта $\mathbf{V} = (V_x(z, t), 0, 0)$ был использован для построения точного решения Экмана $\mathbf{V} = (V_x(z, t), V_y(z, t), 0)$, являющегося базовым для исследований в геофизической гидродинамике [21–30]. Выражение для поля скорости $\mathbf{V} = (V_x(z, t), 0, 0)$ использовалось для построения первых точных решений для описания однонаправленных конвективных течений различной природы [31–36]. К первым семействам точных решений относятся классы Остроумова – Бириха и Шлиомиса. Эти два класса точных решений описывают конвекцию в тепловом, диффузионном и термодиффузионном полях [37–46], а также конвективный перенос жидкой фазы с учетом испарения [47–49]. Пионерские результаты, полученные для описания одномерных потоков ньютоновских жидкостей, были обобщены для двумерных, плоских, сдвиговых и трехмерных потоков жидкостей, движущихся в различных силовых полях [41, 50–54]. В последнее время были получены точные решения уравнений Навье – Стокса для описания неоднородных однонаправленных течений [55–59].

Заметим, что подавляющее большинство исследований течений диссипативных жидкостей основано на применении общепринятых уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением непрерывности (несжимаемости) [13, 14, 20, 27–30]. Вывод уравнений Навье – Стокса основан на постулатах (гипотезах) ньютоновской механики континуальных сред, где каждая жидкая частица рассматривается как материальная («жирная») точка. Заменяя представительный объем сплошной среды материальной точкой, по умолчанию считают, что он имеет три степени свободы (трансляционные степени свободы, описывающие поступательное движение).

Использование такого подхода накладывает ограничения на исследования изменений вязкости жидкости, коэффициентов трения и других поверхностных эффектов [60–63]. Упомянутые в пионерских статьях [64–67] отличия, полученные в экспериментальных и теоретических исследованиях, обусловлены игнорированием вращательных (ориентационных) степеней свободы представительного объема сплошной среды.

Учет дополнительных степеней свободы элементарного объема деформируемых сред (континуумов) приводит к тому, что напряжения Коши не уравниваются друг друга. В этом случае тензор вязких напряжений становится несимметричным, поскольку появляются добавочные напряжения из-за учета деформационных свойств скоростей завихренности элементарных объемов жидкости. В настоящее время такие среды называют микрополярными [68–74]. Применительно к упругим телам среды с дополнительными касательными напряжениями впервые были описаны в монографии [75]. Можно констатировать, что микрополярные жидкости начали изучать только с середины шестидесятых годов прошлого столетия [76, 77].

В работе [76] были не только выведены уравнения Навье – Стокса для описания жидкостей с представительным объемом, имеющим шесть степеней свободы, но и построены и исследованы первые точные решения. С момента публикации работы [76] исследовались установившиеся и неустановившиеся течения микрополярных вязких несжимаемых жидкостей в точной постановке для однонаправленных потоков. Обобщение точных решений для ньютоновских жидкостей на микрополярные среды было проведено для течения Куэтта, первой и второй задач Стокса, течения Пуазейля и их комбинаций и модификаций.

В данной статье осуществляется построение классов точных решений для неоднородных однонаправленных течений жидкостей типа Коссера в трехмерном силовом поле. Показана важность учета нелинейных слагаемых по части координат для профиля скорости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в поле сил $\rho \mathbf{f}$. Согласно теореме Гельмгольца, векторное поле $\rho \mathbf{f}$ может быть представлено в виде аддитивной комбинации соленоидального и потенциального полей: $\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{F} - \nabla \Phi$ [78]. Система определяющих соотношений для описания движения сплошной среды состоит из векторного уравнения Навье – Стокса, в котором элементарная жидкая частица описывается симметричным и антисимметричным тензорами касательных напряжений, и уравнения несжимаемости (непрерывности):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} - \mu \Delta \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Здесь в системе уравнений (1) введены обозначения: $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – вектор массовых сил, нормированных на постоянную плотность; P – нормированное на плотность жидкости давление, к которому добавлен потенциал консервативных сил; ν – кинематическая вязкость; μ – вязкость, обусловленная наличием моментных напряжений для представительного объема среды; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – трехмерный оператор Гамильтона;

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа; $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – дивергенция вектора; $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}$ – бигармонический оператор.

Перепишем систему уравнений (1) в координатной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_y + F_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_z - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_z + F_z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

В случае однонаправленных течений $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), 0, 0)$ система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \\ & -\mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = F_y, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = F_z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Требование, предъявляемое уравнением (6), приводит к уточнению структуры искомого решения:

$$V_x = V_x(y, z, t). \quad (7)$$

Учет вида (7) искомой скорости позволяет упростить уравнение (3):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x. \quad (8)$$

Частный случай системы (4)–(8) – изобарические течения без учета массовых сил в бесконечном горизонтальном слое – был рассмотрен ранее [55].

3. Точное решение

Одна из наиболее простых форм, отвечающих условию (7), – это представление скорости в форме нестационарного однородного течения Куэтта [1]:

$$V_x = U(z, t). \quad (9)$$

Учет выражения (9) в уравнении (8) приводит к следующей редукции:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + F_x. \quad (10)$$

Уравнение (10) для определения скорости течения представляет собой неоднородное линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x. \quad (11)$$

Помимо этого, течение Куэтта подразумевает отсутствие перепада давления в слое жидкости, поэтому давление описывается следующей зависимостью:

$$P = P_0(z, t). \quad (12)$$

Подстановка выражения (12) в уравнение (11) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = F_x. \quad (13)$$

При этом заметим, что решение уравнения (13) имеет место, только если проекция вектора массовых сил не зависит от продольных координат:

$$F_x = F_x(z, t).$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^4 U}{dz^4} - \frac{\nu}{\mu} \frac{d^2 U}{dz^2} = 0. \quad (14)$$

Данное уравнение является частным случаем уравнения (13), который имеет место при описании установившихся течений с массовыми силами, действующими перпендикулярно к направлению оси Ox (например, строго вертикально).

Характеристическое уравнение, отвечающее однородному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами (14), имеет вид

$$\left(\lambda^2 - \frac{\nu}{\mu} \right) \lambda^2 = 0.$$

Значит, общее решение представимо в виде

$$U = c_1 z + c_2 + c_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + c_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right). \quad (15)$$

Заметим, что так просто получить решение, как это было при выводе выражения (15), не получится, если в жидкости присутствует горизонтальный перепад давления, то есть когда структура давления не отвечает представлению (12). Другими словами, при учете перепада давления при рассмотрении поля скорости (9) (то есть течения Куэтта – Пуазейля) необходимо знать распределение градиента давления, чтобы построить точное решение для поля скорости.

Рассмотрим теперь другое частное решение уравнения (8) для поля скорости:

$$V_x = u_1(z, t). \quad (16)$$

С учетом того факта, что скорость (16) линейно зависит от переменной y , а в уравнении (8) присутствуют производные минимум второго порядка по этой переменной, несложно показать, что для решения (16) уравнение (8) сводится к уравнению вида (10):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + F_x. \quad (17)$$

Очевидно, что вид решения уравнения (17) зависит от функционального представления силы и давления, определяющих структуру неоднородности в уравнении (17).

Рассмотрим сумму решений (9) и (16), т. е. решение вида

$$V_x = U(z, t) + yu_1(z, t). \quad (18)$$

Решение вида (18) описывает течение типа неоднородного течения Куэтта. Ввиду линейной зависимости выражения (18) от продольной координаты y , уравнение (8) для выражения (17), так же как и для выражений (9) и (16), сводится к виду (10) или (17):

$$\frac{\partial (U + yu_1)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 (U + yu_1)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 (U + yu_1)}{\partial z^4} + F_x. \quad (19)$$

Но сама сумма (17) как решение уравнения (19) не является суммой решений вида (9) и (16) ввиду неоднородности самого уравнения, к которому сводится уравнение (8) (т. е. к уравнению вида (10), (17) или (19)).

Рассмотрим еще более сложное по структуре решение уравнения (8):

$$V_x = \frac{y^2}{2} u_2(z, t). \quad (20)$$

Подставим решение (20) в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right)}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right) - \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right) + F_x, \\ \frac{y^2}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(u_2 + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) - \mu \left(2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} \right) + F_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, что уравнение (21) имеет структуру, отличную от уравнений вида (10):

$$\frac{\partial \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 \left(\frac{y^2}{2} u_2 \right)}{\partial z^4} + F_x + \nu u_2 - 2\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Соответственно, подстановка в уравнение (8) суммы вида

$$V_x = U(z, t) + yu_1(z, t) + \frac{y^2}{2} u_2(z, t) \quad (22)$$

будет приводить к необходимости решения уравнения вида, отличного от уравнения типа (10). Та же тенденция будет сохраняться и при повышении степени полинома.

Рассмотрим более общее решение [55, 74]:

$$V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} u_k(z, t). \quad (23)$$

В формуле (23) $k!$ обозначает взятие факториала от натурального числа k .

Посчитаем отдельно частные производные, необходимые для подстановки в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} &= \sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k = u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} u_{k+2}, \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x &= u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}, \\ 2 \frac{\partial^4 V_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= 2 \sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^4 V_x}{\partial z^4} &= \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4}, \\ \frac{\partial^4 V_x}{\partial y^4} &= \sum_{k=4}^n \frac{y^{k-4}}{(k-4)!} u_k = u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} u_{k+4}, \\ \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) V_x &= u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} u_{k+4} + 2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} = \\ &= \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \\ &+ \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4}. \end{aligned}$$

Подставим вычисленные производные в уравнение (8):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} \right). \quad (24)$$

В частности, для решения системы (20) уравнение (24) принимает вид

$$\frac{y^2}{2!} \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + v \left(u_2 + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) - \mu \left(2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} \right),$$

что явно совпадает с ранее полученным уравнением (21).

Также заметим, что ввиду линейной независимости базисных функций y, y^2, \dots, y^n уравнение (24) можно было бы разделить на систему уравнений, если структура функций $\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \right)$ подразумевала подобное деление по степеням переменной y .

Пусть разность $\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \right)$ в соответствии с решением (23) представима в виде полинома n -ой степени по переменной y :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x = S(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t). \quad (25)$$

Подставим выражение (25) в полученное уравнение (24):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} = S + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) \right) - \mu \left(\frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} \right).$$

Данное уравнение распадается на систему уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной y в левой и правой частях данного уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} &= s_k + \nu \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + u_{k+2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + u_{k+4} \right), \quad k = 1, \dots, n-4, \\ \frac{\partial u_{n-3}}{\partial t} &= s_{n-3} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_{n-3}}{\partial z^2} + u_{n-1} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_{n-2}}{\partial t} &= s_{n-2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial z^2} + u_n \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} &= s_{n-1} + \nu \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= s_n + \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Посмотрим теперь на структуру выражения (25) как на дифференциальное уравнение для определения давления:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x &= S(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t), \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= F_x - S(z, t) - \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t), \\ P &= \int F_x dx - \left(S + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k \right) x. \end{aligned} \quad (27)$$

Строго говоря, функция F_x может зависеть от всех пространственных координат:

$$F_x = F_x(x, y, z, t). \quad (28)$$

Поэтому при вычислении неопределенного интеграла в правой части выражения (27) в качестве констант интегрирования появится некоторая функция $\varphi(y, z, t)$, не зависящая от координаты x . Для определения структуры функции φ подставим выражение (27) в уравнения (4), (5):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = F_z.$$

Таким образом, по заданному распределению объемных сил F находим решение рассматриваемой системы.

4. Течение жидкости по наклонной поверхности

В качестве примера рассмотрим однонаправленное течение Нуссельта (рис. 1) [41].

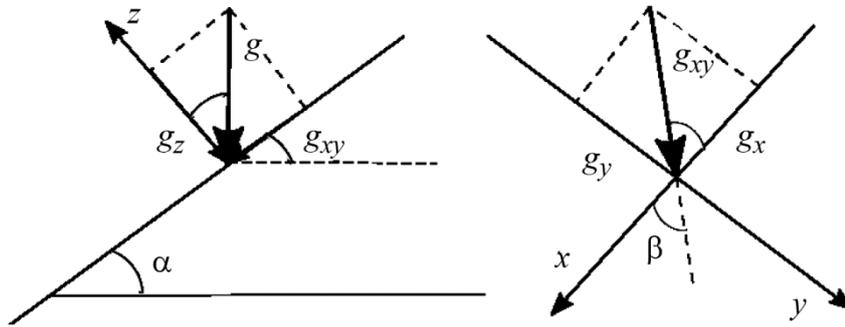


Рис. 1. Схема течения жидкости

Распределение объемных сил в этом случае имеет вид

$$F_x = g \sin \alpha \cos \beta, \quad F_y = g \sin \alpha \sin \beta, \quad F_z = g \cos \alpha. \quad (29)$$

Поле скоростей будем искать в виде полинома первой степени:

$$V_x = U(z) + u_1(z)y. \quad (30)$$

Для решения типа (30) система (26) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = s_1 + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}. \quad (31)$$

Для решения системы (31) нужно найти компоненты S, s_1 . Для их нахождения используем сначала формулу (25) и ее следствие (27):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x = S + s_1 y, \quad (32)$$

$$P = \int F_x dx - (S + s_1 y)x = g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + \varphi(y, z, t). \quad (33)$$

Далее подставим выражение (33) для давления сначала в уравнение (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + \varphi(y, z, t))}{\partial y} &= g \sin \alpha \sin \beta, \\ -s_1 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= g \sin \alpha \sin \beta, \\ \varphi &= s_1 xy + g \sin \alpha \sin \beta y + \psi(z, t). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим выражение (34) в формулу (33) для давления:

$$P = g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + s_1 xy + g \sin \alpha \sin \beta y + \psi(z, t),$$

$$P = g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + \psi(z, t). \quad (35)$$

Теперь подставим уточненную структуру поля давления (35) в оставшееся уравнение (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + \psi(z, t))}{\partial z} &= g \cos \alpha, \\ -\frac{\partial S}{\partial z} x + \frac{\partial \psi}{\partial z} &= g \cos \alpha, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial S}{\partial z} x + g \cos \alpha, \\ \psi &= Sx + g \cos \alpha z + \zeta(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Перепишем выражение решение (35) с учетом полученной связи (36):

$$\begin{aligned} P &= g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + (Sx + g \cos \alpha z + \zeta(t)), \\ P &= g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y + g \cos \alpha z + \zeta(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Осталось определить структуру функций S, s_1 , чтобы решить систему (31) и найти тем самым решение для поля скорости. Для этого подставим в выражение (32) найденное решение (37) и выражения (29):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y + g \cos \alpha z + \zeta(t))}{\partial x} + g \sin \alpha \cos \beta &= S + s_1 y, \\ S + s_1 y &= 0. \end{aligned}$$

Значит, $S = s_1 = 0$. Тогда система (31) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}. \quad (38)$$

Заметим, что если отбросить дополнительную степень свободы, связанную с возможностью вращения элементарного объема жидкости (положить $\mu = 0$), то в случае установившихся течений система (38) примет вид системы (9), приведенной в работе [41].

Уравнения системы (38) имеют одинаковую структуру:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 f}{\partial z^4}. \quad (39)$$

Найдем решение уравнения (39) в классе функций вида $f = Z(z) \cdot T(t)$. В этом случае уравнение (39) примет вид

$$ZT' = (\nu Z'' - \mu Z^{(4)})T. \quad (40)$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{T'}{T} = \frac{\nu Z'' - \mu Z^{(4)}}{Z}. \quad (41)$$

Отметим что переход от уравнения (40) к уравнению (41) справедлив только при $Z(z) \cdot T(t) \neq 0$. В противном случае имеем тривиальное (нулевое) решение, удовлетворяющее уравнению (40).

Уравнение (41) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} = 0, \quad \frac{\nu Z'' - \mu Z^{(4)}}{Z} = 0, \\ T' = 0, \quad Z^{(4)} - \frac{\nu}{\mu} Z'' = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы (с применением характеристического уравнения) имеет вид

$$T = \text{const}, \quad Z = c_1 z + c_2 + c_3 \exp\left(z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + c_4 \exp\left(-z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right).$$

Следовательно, решение уравнения (39) описывается следующей функцией:

$$Z = \bar{c}_1 z + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \exp\left(z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + \bar{c}_4 \exp\left(-z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right).$$

На основе полученного выражения легко строится решение для компонент поля скорости:

$$\begin{aligned} U &= A_1 z + A_2 + A_3 \exp\left(z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + A_4 \exp\left(-z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right), \\ u_1 &= B_1 z + B_2 + B_3 \exp\left(z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + B_4 \exp\left(-z\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, полностью построено решение для описания однонаправленных течений в наклонном слое в классе скоростей, линейных по части координат.

5. Заключение

В работе построены классы точных решений для описания неоднородных однонаправленных течений жидкости с учетом моментных напряжений (течений типа Коссера) в трехмерном силовом поле произвольной структуры. Показано, насколько важно учитывать нелинейные слагаемые в представлении профиля скорости, поскольку в большинстве случаев они влияют на структуру определяющих уравнений модели течения. Показана связь с ранее опубликованными результатами, в том числе с решениями конкретных прикладных задач типа течения вязких жидкостей в наклонном протяженном слое в консервативном поле массовых сил.

Литература

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
2. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 961–967.
3. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres // Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 1041–1048.
4. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (suite) // Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. – 1841. – Vol. 12. – P. 112–115.
5. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.
6. Nußelt W. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. – 1910. – Vol. 54. – P. 1154–1158.
7. Nagel Yu. A. Plane one-dimensional stationary flow of an ideal charged gas in its own electric field // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1971. – Vol. 12. – P. 19–26. – DOI: 10.1007/BF00853977.
8. Faskheev I. O. One-dimensional flow of a fluid through a porous skeleton with consideration of the Darcy and frontal pressure interaction forces // Moscow University Mechanics Bulletin. – 2013. – Vol. 68. – P. 21–24. – DOI: 10.3103/S0027133013010044.
9. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения / пер. с англ. – М. : Мир, 1972. – 440 с.
10. Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р. Течения неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 210 с.
11. Прокудин С. В., Софьин А. С., Агапов А. А. Аналитическое решение задачи одномерного стационарного течения сжимаемой жидкости и газа // Безопасность труда в промышленности. – 2017. – № 5. – С. 36–41. – DOI: 10.24000/0409-2961-2017-5-36-41.
12. Valiyev Kh. F., Kraiko A. N., Tillyayeva N. I. Stability of one-dimensional steady flows with detonation wave in a channel of variable cross-sectional area // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 60 (4). – P. 697–710. – DOI: 10.1134/S096554252004017X.
13. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 23–39. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039. – URL: http://dream-journal.org/issues/2019-5/2019-5_259.html
14. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 2. – P. 61–75. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. – URL: http://dream-journal.org/issues/2020-2/2020-2_288.html
15. Bhaskar B. S., Chaudhary S. K. Review of fluid flow and heat transfer through porous media heat exchangers // International Journal of New Innovations in Engineering and Technology. – 2016. – Vol. 6 (2). – P. 28–42.
16. Singh H., Myong R. S. Critical review of fluid flow physics at micro- to nano-scale porous media applications in the energy sector // Advances in Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 2018. – P. 9565240. – DOI: 10.1155/2018/9565240.
17. Coussot P. Yield stress fluid flows: a review of experimental data // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 211. – P. 31–49. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2014.05.006.

18. Kiselev A. Diffusion and mixing in fluid flow: a review // *New Trends in Mathematical Physics* / ed by V. Sidoravičius. – Dordrecht : Springer, 2009. – DOI: 10.1007/978-90-481-2810-5_24.
19. Modal analysis of fluid flows: an overview / K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon, O. T. Schmidt, S. Gordeyev, V. Theofilis, L. S. Ukeiley // *AIAA JOURNAL*. – 2017. – Vol. 55 (12). – P. 4013–4041. – DOI: 10.2514/1.J056060.
20. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53 (4). – P. 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Smagorinsky J. History and progress // *The Global Weather Experiment—Perspective on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*. – National Academy of Science, 1978. – P. 4–12.
22. Smagorinsky, J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: early recollections // *Advances in Geophysics*. Vol. 25 : *Theory of Climate* / ed. by B. Zaltzman. – Academic Press, 1983. – P. 3–37.
23. Smagorinsky J., Phillips N. A. Scientific problems of the global weather experiment // *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*. – National Academy of Science, 1978. – P. 13–21.
24. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
25. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 3. – P. 29–46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046. – URL: http://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_291.html
27. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений: Сращиваемые асимптотич. разложения: основы теории и приложения к задачам динамики океана. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1985. – 248 с.
28. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. – Киев : Наукова думка, 1986. – 208 с.
29. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1988. – 424 с.
30. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2 т. – М. : Мир, 1984. – 398 с.
31. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. – 256 с.
32. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1966. – № 3. – С. 69–72.
33. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. – *AIP Conference Proceedings*. – 2019. – Vol. 2176. – P. 030023. – DOI: 10.1063/1.5135147.
34. Aristov S. N., Nycander J. Convective flow in baroclinic vortices // *Journal Physical Oceanography*. – 1994. – Vol. 24, No. 9. – С. 1841–1849.

35. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 1989. – Vol. 30 (2). – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
36. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Владивосток, 1990.
37. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2020. – Vol. 54 (1). – P. 230–239. – DOI: 10.1134/S0040579519060034.
38. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* – 2019. – Vol. 23 (2). – P. 341–360. – DOI: 10.14498/vsgtu1670.
39. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // *Symmetry.* – 2023. – Vol. 15. – P. 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
41. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2022. – Vol. 56 (5). – P. 662–668. – DOI: 10.1134/S0040579522050207.
42. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение типа Куэтта–Пуазейля для установившихся концентрационных течений // *Ученые записки Казанского университета. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 285–301. – DOI: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301.
43. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows // *Dynamics.* – 2022. – Vol. 2, No. 4. – P. 367–379. – DOI: 10.3390/dynamics2040021.
44. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial // *Russian Mathematics.* – 2021. – Vol. 65 (7). – P. 8–16. – DOI: 10.3103/S1066369X21070021.
45. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov, E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition // *Sādhanā.* – 2021. – Vol. 46. – Art. No. 55. – DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
46. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // *Journal of King Saud University – Science.* – 2020. – Vol. 32, iss. 8. – P. 3364–3371. – DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
47. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2017. – Vol. 894. – DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012023.
48. Bekezhanova V., Goncharova O. Problems of evaporative convection (review) // *Fluid Dynamics.* – 2018. – Vol. 53. – P. S69–S102. – DOI: 10.1134/S001546281804016X.
49. Bekezhanova V., Goncharova O. Theoretical analysis of the gravity impact on the parameters of flow regimes with inhomogeneous evaporation based on an exact solution of convection equations // *Microgravity Science and Technology.* – 2022. – Vol. 34. – P. 88. – DOI: 10.1007/s12217-022-10006-z.
50. Dynamic effects in a magnetic fluid with microdrops of concentrated phase in a rotating magnetic field / Y. I. Dikanskii, M. A. Bedzhanyan, A. A. Kolesnikova, A. Yu. Gora, A. V. Chernyshev // *Technical Physics.* – 2019. – Vol. 64 (3). – P. 337–341. – DOI: 10.1134/S1063784219030113.
51. Elasticity of a magnetic fluid in a strong magnetic field / V. M. Polunin, P. A. Ryapolov, V. B. Platonov, E. V. Sheldeshova, G. V. Karpova, I. M. Arefyev // *Acoustical Physics.* – 2017. – Vol. 63 (4). – P. 416–423. – DOI: 10.1134/S1063771017040108.

52. Пивоваров Д. Е. Численное исследование конвективного теплообмена в наклонном продольном слое воздуха // Труды МАИ. – 2013. – № 68. – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
53. Шабловский О. Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственно-неоднородном силовом поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 64. – С. 146–155. – DOI 10.17223/19988621/64/11.
54. Kozlov V. G., Kozlov N. V., Subbotin S. V. Motion of fluid and a solid core in a spherical cavity rotating in an external force field // *Doklady Physics*. – 2014. – Vol. 59. – P. 40–44. – DOI: 10.1134/S1028335814010078.
55. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html
56. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition // *AIP Conference Proceedings*. – 2019. – Vol. 2176. – 030002. – DOI: 10.1063/1.5135126.
57. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. A layered unidirectional flow of a viscous incompressible fluid induced in a closed layer by a nonuniform distribution of temperature and pressure fields, with allowance for the perfect slip condition // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315. – 020011. – DOI: 10.1063/5.0036715.
58. Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // *Dynamics*. – 2022. – Vol. 2, No. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
59. Бурмашева Н. В., Дьячкова А. В., Просвирыков Е. Ю. Неоднородное течение Пуазейля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – Т. 77. – С. 68–85. – DOI: 10.17223/19988621/77/6.
60. Динариев О. Ю., Николаевский В. Н. Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями // *Прикладная математика и механика*. – 1997. – Т. 61, № 6. – С. 1023–1030.
61. DeSilva C. N., Kline K. A. Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. – 1968. – Vol. 19 (1). – P. 128–139. – DOI: 10.1007/BF0160328419.
62. Allen S. J., DeSilva C. N., Kline K. A. Theory of simple deformable directed fluids // *Phys. Fluids*. – 1967. – Vol. 10 (12). – P. 551–2555. – DOI: 10.1063/1.1762075.
63. Eringen A. C. Linear theory of micropolar viscoelasticity // *International Journal of Engineering Science*. – Vol. 5. – P. 191–204. – DOI: 10.1016/0020-7225(67)90004-3.
64. Stokes V. K. Couple stresses in fluids // *Phys. Fluids*. – 1966. – Vol. 9, iss. 9. – P. 1709–1715. DOI: 10.1063/1.1761925.
65. Stokes V. K. *Theories of Fluids with Microstructure. An Introduction*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – 212 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0.
66. Stokes V. K. Effects of couple stresses in fluids on hydromagnetic channel flows // *Physics of Fluids*. – 1968. – Vol. 11. – P. 1131–1133. – DOI: 10.1063/1.1692056.
67. Stokes V. K. On some effects of couple stresses in fluids on heat transfer // *J. Heat Transfer*. – 1969. – Vol. 91 (1). – P. 182–184. – DOI: 10.1115/1.3580094.
68. Asibor R. E., Omokhuale E. Micropolar fluid behavior with constant pressure, permeability, heat and mass transfer // *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*. – 2017. – Vol. 6 (12). – P. 36–43.
69. Bég O. A., Zueco J., Takhar H. S. Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann–Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ionslip, viscous and Joule heating effects: network numerical solutions // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2009. – Vol. 14 (4). – P. 1082–1097. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.03.015.

70. Control of MHD Flow and heat transfer of a micropolar fluid through porous media in a horizontal channel / M. Kocić, Ž. Stamenković, J. Petrović, J. Bogdanović-Jovanović // *Fluids*. – 2023. – Vol. 8, iss. 3. – P. 93. – DOI: 10.3390/fluids8030093.
71. El-Kabeir S. M. M., Modather M., Mansour M. A. Effect of heat and mass transfer on free convection flow over a cone with uniform suction or injection in micropolar fluids // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 11, No.1. – P. 15–35.
72. Numerical analysis for energy transfer analysis of micropolar nanofluid by Keller box scheme / Kh. Rafique, N. Ibrar, A. Munir, A. Khalid, A. Ijaz, A. Asghar // *Acta Scientific Applied Physics*. – 2023. – Vol. 3 (3). – P. 36–44.
73. Xu Q., Zhong X. Strong solutions to the three-dimensional barotropic compressible magneto-micropolar fluid equations with vacuum // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. – 2021. – Vol. 73 (1). – Art. No. 14. – DOI: 10.1007/s00033-021-01642-3.
74. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13. – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
75. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. – Paris : A. Hermann et Fils, 1909. – P. 226.
76. Aero E. L., Bulygin A. N., Kuvshinski E. V. Asymmetric hydromechanics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1965. – Vol. 29. – P. 333–346. – DOI: 10.1016/0021-8928(65)90035-3.
77. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids // *J. Math. Mech.* – 1966. – Vol. 16 (1). – P. 1–18.
78. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы / пер. с англ. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2003. – 831 с.

Received: 12.02.2024
Revised: 06.05.2024
Accepted: 24.05.2024
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.064-072

MACROSCALE PLASTICITY PARAMETER OF METALS AND ALLOYS

L. B. Zuev^a, S. A. Barannikova^b, and S. V. Kolosov^{c, *}

*Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
2/4 Akademicheskoy Ave., Tomsk, 634055, Russia*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-3991-0207>  lbz@ispms.ru
^{b)}  <https://orcid.org/0000-0001-5010-9969>  bsa@ispms.ru
^{c)}  <https://orcid.org/0000-0002-5599-9152>  svk@ispms.ru

*Corresponding author. E-mail: svk@ispms.ru
Address for correspondence: pr. Akademicheskoy, 2/4, Tomsk, 634055, Russia
Tel: +7 (382) 228-6804; fax: +7 (382) 249-2576

It is shown that plastic flow in solids emerges in a localized manner at a macroscopic scale of $\sim 10^{-2}$ m. Localized plastic flow zones form patterns of localized strain, which are the projection of the autowave processes of plastic flow, developing in the bulk of the material, onto the specimen surface under study. The speckle photography method was chosen as a source of information about the kinetics of plastic deformation. A common feature of localized plastic flow in solids is the elastic-plastic invariant of deformation, which combines the typical characteristics of localized plastic flow autowaves with those of elastic waves in a crystal lattice. The invariant ratio is defined for nearly forty various materials (BCC, FCC, and HCP metals and alloys, alkali-halide crystals, ceramics, and rocks) under active tension and compression in a temperature range of 143 to 420 K. The origin of the invariant and its relation to other physical characteristics of the crystal lattice, e.g. the Debye temperature, is discussed in physical terms. Besides, numerous corollaries of the elastoplastic invariant are derived, enabling one to describe adequately the regularities of plastic flow. This, in turn, makes it possible to consider the elastic-plastic invariant of deformation as the main equation of the currently developing autowave approach to the physical theory of plastic deformation.

Keywords: plasticity, deformation, elasticity, defects, crystal lattice, autowaves, structure, metals

Acknowledgment

This work was supported within the framework of the state assignment for the ISPMS SB RAS, project No. FWRW-2021-0011.

References

1. Friedel, J. *Dislocations*, Pergamon Press, Oxford, 1964, 512 p.
2. Hull, D. and Bacon, D.J. *Introduction in Dislocations*, Elsevier, Oxford, 2011, 257 p. DOI: 10.1016/C2009-0-64358-0.
3. Seeger, A. and Frank, W. Structure formation by dissipative processes in crystals with high defect densities. *Solid State Phenomena*, 1988, 3–4, 125–138 DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.3-4.125.
4. Haken, H. *Information and Self-Organization*, Springer, Berlin, 2006, 258 p. DOI: 10.1007/3-540-33023-2.
5. Nicolis, G. and Prigogine, I. *Exploring Complexity: An Introduction*, W.H. Freeman & Company, New York, 1989, 328 p.

6. Egorushkin, V.E. and Panin, V.E. Scale invariance of plastic deformation of the planar and crystal subsystems of solids under superplastic conditions. *Physical Mesomechanics*, 2017, 20 (1), 5–13. DOI: 10.1134/s1029959917010015.
7. Zuev, L.B. Autowave plasticity. Localization and collective modes. In: *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, Taylor & Francis Group, Cambridge, 2020, 318–321. DOI: 10.1007/978-3-319-91989-8_65.
8. Zuev, L.B. and Barannikova, S.A. Autowave physics of material plasticity. *Crystals*, 2019, 9 (458), 1–30. DOI: 10.3390/cryst9090458.
9. Zuev, L.B. and Barannikova, S.A. Quasi-particle approach to the autowave physics of metal plasticity. *Metals*, 2020, 10 (11), 1–15. DOI: 10.3390/met10111446.
10. Vildeman, V.E., Lomakin, E.V. and Tretiakova, T.V. Yield delay and space-time inhomogeneity of plastic deformation of carbon steel. *Mechanics of Solids*, 2015, 50 (4), 412–420. DOI: 10.3103/S002565441504007X.
11. Hähner, P. Theory of solitary plastic waves. *Applied Physics A*, 1994, A58 (1), 41–58. DOI: 10.1007/BF00331516.
12. Plekhov, O.A., Naimark, O.B., Saintier, N., and Palin-Luc, T. Elastic-plastic transition in iron: structure and thermodynamic features. *Technical Physics*, 2009, 54 (8), 1141–1146. DOI: 10.1134/S1063784209080088.
13. Reyne, B., Manach, P.-Y., and Moes, N., Macroscopic consequences of Poibert–Luders and Portevin–Le Chatelier bands during tensile deformation in Al–Mg alloys. *Materials Science and Engineering: A*, 2019, 746 (8), 187–196. DOI: 10.1016/j.msea.2019.01.009.
14. Kobelev, N.P., Lebyodkin, M.A., and Lebedkina, T.A. Role of self-organization of dislocations in the onset and kinetics of macroscopic plastic instability. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2017, 48 (3), 965–974. DOI: 10.1007/s11661-016-3912-x.
15. Taupin, V., Chevy, J., and Fressengeas, C. Effects of grain-to-grain interactions on shear strain localization in Al–C–Li rolled sheets. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, 99, 71–81. DOI: 10.1016/j.ijstr.2016.07.023.
16. Tretyakova, T. and Wildemann, V. Study of spatial-time inhomogeneity of inelastic deformation and failure in bodies with concentrators by using the digital image correlation and infrared analysis. *Procedia Structural Integrity*, 2017, 5, 318–324. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.07.177.
17. Lebyodkin, M.A., Zhemchuzhnikova, D.A., Lebedkina, T.A., and Aifantis, E.C. Kinematics of formation and cessation of type B deformation bands during the Portevin–Le Chatelier effect in an AlMg alloy. *Results in Physics*, 2019, 12, 867–869. DOI: 10.1016/j.rinp.2018.12.067.
18. Shibkov, A.A., Gasanov, M.F., Zheltov, M.A., Zolotov, A.E., and Ivolgin, V.I. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an AlMg polycrystal. *International Journal of Plasticity*, 2016, 86, 37–55. DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.07.014.
19. Müller, A., Segel, C., Linderov, M., Vinogradov, A., Weidner, A., and Biermann, H. The Portevin–Le Châtelier effect in a metastable austenitic stainless steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2016, 47, 59–74. DOI: 10.1007/s11661-015-2953-x.
20. Efstathiou, C. and Sehitoglu, H. Strain hardening and heterogeneous deformation during twinning in Hadfield steel. *Acta Materialia*, 2010, 58 (5), 1479–1488. DOI: 10.1016/j.actamat.2009.10.054.
21. Hudson, D.J. Lectures on Elementary Statistics and Probability, 1963, CERN Report 63–29, CERN, Geneva, 1963.
22. Newnham, R.E., *Properties of Materials Anisotropy, Symmetry, Structure*, University Press, Oxford, 2004, 390 p. DOI: 10.1093/oso/9780198520757.001.0001.
23. Zuev, L.B., Barannikova, S.A., Kolosov, S.V., and Nikonova, A.V. Temperature dependence of autowave characteristics of localized plasticity. *Physics of the Solid State*, 2021, 63, 47–53. DOI: 10.1134/S1063783421010236.

Подана в журнал: 12.02.2024

УДК 538.951

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.064-072

МАКРОМАСШТАБНЫЙ ПАРАМЕТР ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Л. Б. Зуев^а, С. А. Баранникова^б, С. В. Колосов^{в, *}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук,
пр-кт Академический, 2/4, г. Томск, 634055, Россия*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0003-3991-0207>  lbz@ispms.ru

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0001-5010-9969>  bsa@ispms.ru

^{в)}  <https://orcid.org/0000-0002-5599-9152>  svk@ispms.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: svk@ispms.ru

Адрес для переписки: ИФПМ СО РАН, пр-кт Академический, 2/4, Томск, 634055, Россия

Телефон: +7 (382) 249-18-81; факс: +7 (382) 249-25-76

Показано, что пластическое течение в твердых телах возникает локализованно на макроскопическом уровне $\sim 10^{-2}$ м. Зоны локализованного пластического течения формируют картины локализованной деформации, представляющие собой проекцию автоволновых процессов пластического течения, развивающихся в объеме материала, на наблюдаемую поверхность образца. В качестве источника информации о кинетике пластической деформации выбран метод спекл-фотографии. Общей особенностью локализованного пластического течения в твердых телах является упругопластический инвариант деформации, сочетающий типичные характеристики автоволн локализованного пластического течения с характеристиками упругих волн в кристаллической решетке. Инвариант определен почти для сорока различных материалов (ОЦК-, ГЦК- и ГПУ-металлов и сплавов с решетками, щелочно-галоидных кристаллов, керамики и горных пород) в условиях активного растяжения и сжатия в интервале температур 143–420 К. С физической точки зрения обсуждается происхождение инварианта и его связь с другими физическими характеристиками кристаллической решетки, в частности с температурой Дебая. Выведены также многочисленные следствия упругопластического инварианта, позволяющие адекватно описывать закономерности пластического течения. Это, в свою очередь, позволяет рассматривать упругопластический инвариант деформирования как основное уравнение развивающегося в настоящее время автоволнового подхода к физической теории пластического деформирования.

Ключевые слова: пластичность, деформация, упругость, дефекты, кристаллическая решетка, автоволны, структура, металлы

1. Введение

С 1930-х годов и по настоящее время жизнеспособные методы описания пластичности традиционно базируются на теории дислокаций [1, 2]. Между тем, несмотря на многочисленные дислокационные модели, предложенные в этот период, отсутствовала строгая и полная физическая теория пластичности твердых тел. Это породило обоснованные сомнения в достоверности электронно-микроскопического анализа тонких металлических фольг как методологической основы дислокационных исследований. Дефицит дислокационных моделей привел к развитию подходов, предложенных авторами A. Seeger, W. Frank, которые рассматривали увеличение плотности дислокаций при деформации как процесс структурообразования [3].

Впоследствии эту идею поддержал Н. Haken, который утверждал, что система считается самоорганизующейся, если она приобретает некоторую пространственную, временную или функциональную структуру без какого-либо специфического внешнего воздействия [4]. На основании этого различные исследователи пришли к выводу, что при пластическом течении возможна самоорганизация дефектной структуры. В то же время G. Nicolis и I. Prigogine четко заявили о невозможности исследования пластичности на чисто механической основе и предложили рассматривать пластичность как часть общей проблемы нелинейных динамических систем, находящихся вдали от равновесия [5]. Это открыло заманчивые перспективы применения понятийного и формального аппаратов теории неравновесных систем (синергетики) при создании и развитии новой механики деформируемого твердого тела.

В результате появилось новое направление в физике пластичности, позволяющее изучать влияние пластического течения в среде со структурными дефектами, а также был достигнут прогресс в понимании сложных аспектов пластического течения. Таким образом, плодотворная концепция многомасштабного явления пластичности позволила прояснить и объяснить ряд проблем, касающихся деформируемых твердых тел [6]. В частности, ранее было показано, что пластическая деформация всегда макроскопически локализована, а закономерности ее локализации на разных стадиях пластического течения принимают форму различных автоволновых процессов [7–9]. В свою очередь, автоволны являются решением реакционно-диффузионной системы параболических уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = f(\varepsilon) + D_{\varepsilon\varepsilon}\ddot{\varepsilon}, \\ \dot{\sigma} = g(\sigma) + D_{\sigma\sigma}\ddot{\sigma} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

для деформации ε и напряжения σ соответственно. Для соотношений (1) и (2) ε и σ – условные деформация и напряжение и соответствующие им производные; D – коэффициент диффузии; $f(\varepsilon)$ и $g(\sigma)$ – N -образные функции. Автоволновые эффекты при пластическом деформировании наблюдались и обсуждались также в работах [10–20].

Существование локализованных автоволн пластичности доказано с помощью специально модифицированной для этих целей методики спекл-фотографии [7], позволяющей определять поля векторов смещений точек на поверхности образца и на этой основе рассчитывать компоненты тензора пластической дисторсии. Экспериментально установлено, что локализация пластического течения ведет себя как самопроизвольное разбиение деформируемой среды на чередующиеся в пространстве образца макроскопические деформирующиеся и недеформирующиеся объемы [7]. Сочетание этих объемов образует автоволновую картину локализованной деформации, то есть паттерн локализованной пластичности. Автоволны локализованной пластичности характеризуются длиной $\lambda \approx 10^{-2}$ м и скоростью распространения V_{aw} (м/с), обратно пропорциональной коэффициенту деформационного упрочнения $V_{aw} = V_0 + \Xi/\theta$. Закон дисперсии автоволн выражается как $\omega = 1 + k^2$. В этих соотношениях V_0 и Ξ – константы, ω – частота, а $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

В новом подходе были предприняты попытки учесть, что пластическая деформация происходит в открытой системе. Также было обращено внимание на нелинейность деформируемой среды, обусловленную сложным видом зависимости напряжения от деформации $\sigma(\varepsilon)$, а также ее активность и неравновесность, связанные с наличием локальных источников потенциальной энергии, распределенных по объему (упругие поля возникающих и релаксирующих концентраторов напряжений) [4].

Таким образом, целью настоящей работы является анализ роли макроскопических эффектов пластической деформации в развитии пластического течения и установление их функциональной связи с решеточными характеристиками деформируемой среды.

2. Результаты и обсуждение

2.1. Упруго-пластический инвариант автоволновой пластичности

В соответствии с представлениями, сформулированными в работе [7], деформацию твердого тела будем рассматривать как результат взаимодействия упругой и пластической составляющих. Каждый компонент контролируется процессами, происходящими в соответствующих масштабах. Можно предположить, что развитие локализованного пластического течения характеризуется экспериментально определенной длиной автоволны λ и соответствующей скоростью V_{aw} . Для упругого деформирования такими характеристиками могут быть межплоскостное расстояние χ и скорость распространения поперечных ультразвуковых волн V_t , определяемые по справочной литературе.

2.2. Введение упруго-пластического инварианта деформации

Видно, что отношения пространственного и скоростного масштабов процессов пластического и упругого деформирования $\lambda/\chi \approx V_t/V_{aw} \approx 10^7$ имеют один и тот же порядок величины. Следовательно, произведения λV_{aw} и χV_t , имеющие размерности кинематической вязкости m^2s^{-1} , которые совпадают с соответствующими размерностями коэффициентов $D_{\epsilon\epsilon}$ и $D_{\sigma\sigma}$ в уравнениях (1) и (2), будем считать характерными для этих процессов. Таким образом, представляется целесообразным проанализировать соотношение величин λV_{aw} и χV_t для различных материалов. Основа для обобщения такого рода данных приведена в таблице, включающей обновленные и дополненные экспериментальные результаты из работ [7–9]. На рис. 1 а приведены основные корреляционные зависимости произведения λV_{aw} от температуры Θ_D/T , где Θ_D – температура Дебая, и атомного номера элемента Z , а на рис. 1 б – основные корреляционные зависимости между произведениями λV_{aw} и χV_t и атомным номером элемента Z .

Экспериментальные значения инварианта

$$\hat{Z} = \lambda V_{aw} / \chi V_t \quad (3)$$

подвергались статистическому анализу по методу, описанному в работе [21]. Для этого данные были преобразованы в вариационный ряд. В качестве нулевой гипотезы предполагалось, что распределение \hat{Z} является нормальным. Это предположение было проверено с использованием критерия Колмогорова – Смирнова с использованием программного обеспечения Statistica.

Таблица

Условия испытаний для определения характеристик автоволновой пластичности

Вид испытания, материал	Количество измерений
Испытания металлических образцов на растяжение (линейное деформационное упрочнение)	24
Испытания металлических образцов на растяжение (легкое скольжение)	5
Сжатие монокристаллов щелочно-галоидных кристаллов	3
Сжатие горных пород	2
Путь отдельных дислокаций	4

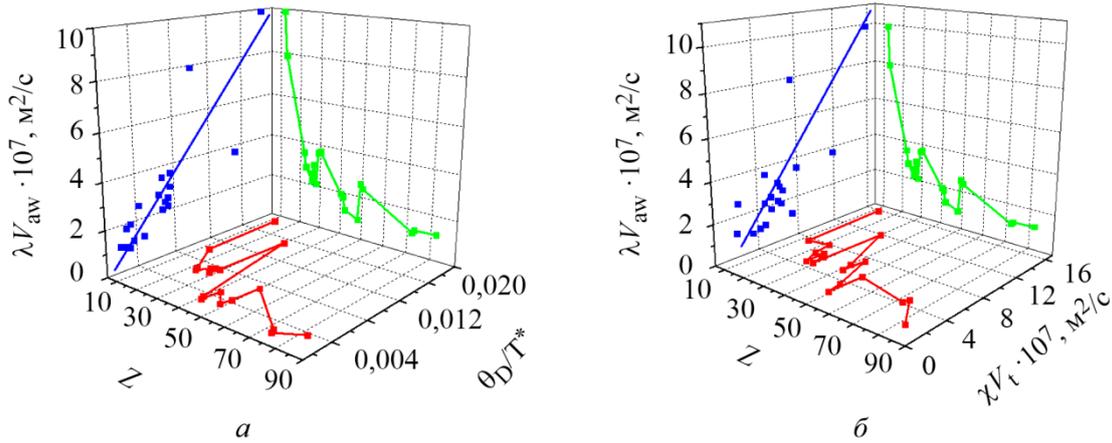


Рис. 1. Зависимости произведения λV_{aw} от температуры и атомного номера Z (а); корреляционные зависимости между произведениями λV_{aw} и χV_t и атомным номером Z (б)

Стандартное нормальное распределение z_j для j -го ранга переменной при количестве измерений $N = 38$ рассчитывалось как $z_j = F^{-1}[(3j - 1)/(3N + 1)]$, где F^{-1} – обратная функция стандартного нормального распределения, преобразующая нормальную вероятность p в нормальное значение z .

Согласно рис. 2 распределение \hat{Z} действительно является нормальным и характеризуется следующими параметрами: $\hat{Z}_{min} = 0,2$; $\hat{Z}_{max} = 1,1$; $\sigma^2 = 0,040$.

На основе этих результатов можно получить безразмерное соотношение

$$\left\langle \frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} \right\rangle = \hat{Z} = 0,46 \pm 0,03 \approx 1/2, \quad (4)$$

которое здесь и далее называется инвариантом упруго-пластической деформации. Он связывает параметры упругой (χ и V_t) и пластической (λ и V_{aw}) деформации. Соотношение (4) справедливо для стадий линейного деформационного упрочнения материалов, когда $\sigma \sim \epsilon$. На этой стадии формируется фазовая автоволна, для которой $\omega t - kx = \text{const}$.

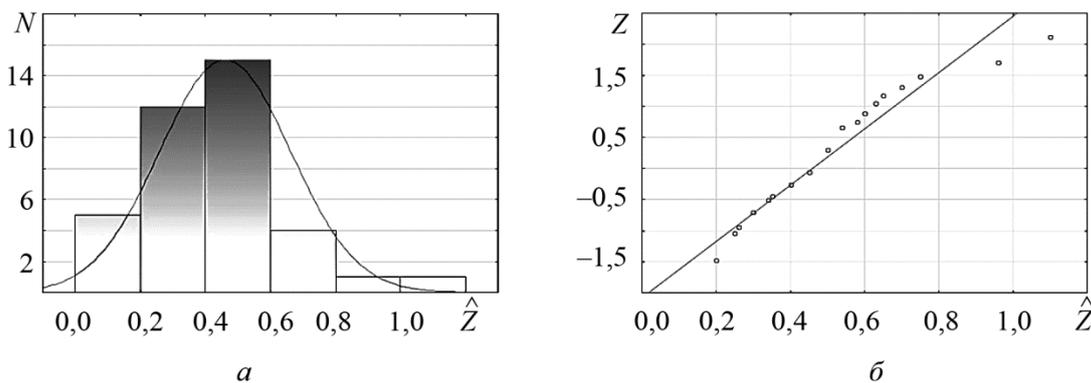


Рис. 2. Нормальное распределение: N – количество наблюдений, \hat{Z} – значения инварианта (а); график нормальной вероятности: Z – значения стандартного нормального распределения, \hat{Z} – значения инварианта (б)

Графическая интерпретация данных представлена на рис. 3.

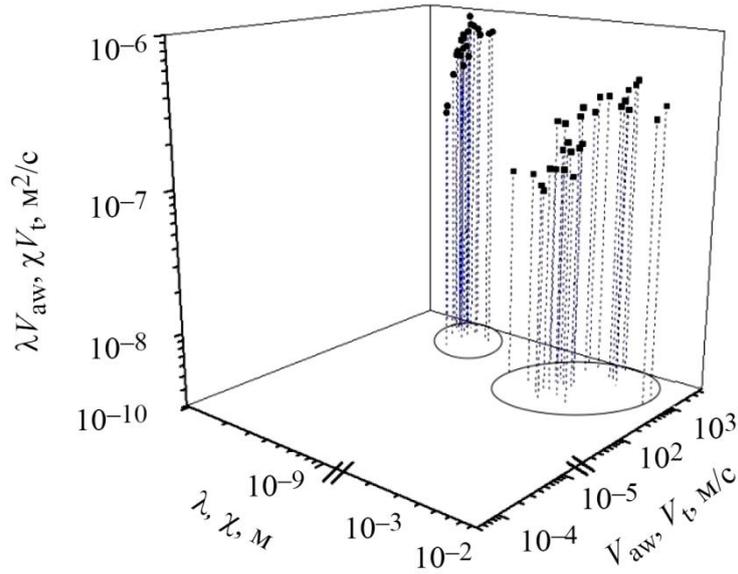


Рис. 3. Сравнение произведений λV_{aw} и χV_t , входящих в упругопластический инвариант (3)

2.3. Упруго-пластический инвариант и характеристики среды

Обсуждая физический смысл инварианта (3), целесообразно найти его корреляцию с другими решеточными характеристиками деформируемых сред. В качестве первого шага можно рассмотреть известные соотношения для модуля сдвига $G \approx \chi^{-1} \cdot d^2W/du^2$ и скорости $V_t^2 \approx G/\rho \approx \chi^2 \omega_D^2$, где W – межчастичный потенциал, u – малое смещение, ρ – плотность среды, ω_D – дебаевская частота [22]. В этом случае

$$\lambda V_{aw} \approx \hat{Z} \cdot \frac{d^2W/du^2}{(\omega_D \chi) \rho} \approx \hat{Z} \frac{d^2W/du^2}{\xi_1} \quad (5)$$

где $\xi_1 = (\omega_D \chi) \rho = V_t \rho$ – акустическое сопротивление среды.

Инвариант (3), записанный в виде

$$\frac{\lambda}{V_t} \approx \hat{Z} \cdot \frac{\chi}{V_{aw}} \approx \hat{Z} \vartheta \approx 10^{-5} \text{ s}, \quad (6)$$

указывает на равенство характерных времен упругой и пластической деформации ϑ . Полагая, что пластическая деформация термически активирована [1, 2], можно утверждать, что она имеет вид $\vartheta \approx \omega_D^{-1} \exp(U/k_B T)$, где k_B – постоянная Больцмана, а U – энергия активации. При $T = 300$ К значение U составляет приблизительно 0,5 эВ, что характерно для серии элементарных актов пластического течения [1, 2].

Наконец, переписав уравнение (3) при $\lambda V_{aw} = \hat{Z} \chi V_t = \hat{Z} \chi^2 \omega_D$ и применив соотношения $k_B \theta_D = \hbar \omega_D \approx \hbar (V_t/\chi)$, где \hbar – постоянная Планка, а θ_D – температура Дебая, получаем

$$\lambda V_{aw} \approx \hat{Z} \chi V_t \approx \hat{Z} \chi^2 \frac{k_B \theta_D}{\hbar} \approx \hat{Z} \frac{k_B}{\hbar} \chi^2 \theta_D(T). \quad (7)$$

Таким образом, оказывается, что локализованное пластическое течение λV_{aw} является функцией температуры Дебая $\theta_D(T)$ [22]. Уравнение (7) качественно описывает экспериментально наблюдаемые температурные зависимости автоволновых характеристик [23].

Определенная универсальность упругопластического инварианта (3) и его связь с решеточными характеристиками деформируемой среды возводят его в ранг важной закономерности локализованного пластического течения.

3. Заключение

При описании развития локализованной пластичности на стадии линейного деформационного упрочнения материалов можно ввести упругопластический инвариант деформации, связывающий характеристики упругой и пластической составляющих полной деформации. Взаимосвязь этих составляющих определяется тем, что формирование автоволновой структуры локализованного пластического течения является упорядочением (самоорганизацией) деформируемой среды, и оно должно протекать с уменьшением энтропии системы.

Инвариант играет роль основного уравнения автоволновой теории пластичности. Отсюда следует ряд факторов, правильно описывающих основные закономерности автоволнового процесса локализованного пластического течения, в частности скорость и дисперсия локализованных автоволн пластичности, обстоятельства, вызывающие явления локализации при деформации, масштабные эффекты, зависимость длины автоволны от размера зерна и т. д.

Таким образом, экспериментальное исследование закономерностей локализованного пластического течения, а также представления о пластическом течении как о структурообразовании позволили объяснить различные важные закономерности пластичности твердых тел с единой точки зрения, что ранее было возможно лишь с помощью внедрения множества конкретных моделей.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН (проект № FWRW-2021-0011).

Литература

1. Friedel J. Dislocations. – Oxford : Pergamon Press, 1964. – 512 p.
2. Hull D., Bacon D. J. Introduction in Dislocations. – Oxford : Elsevier, 2011. – 257 p. – DOI: 10.1016/C2009-0-64358-0.
3. Seeger A., Frank W. Structure formation by dissipative processes in crystals with high defect densities // Solid State Phenomena. – 1988. – Vols. 3–4. – P. 125–138. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.3-4.125.
4. Haken H. Information and Self-Organization. – Berlin : Springer, 2006. – 258 p. – DOI: 10.1007/3-540-33023-2.
5. Nicolis G., Prigogine I. Exploring Complexity: An Introduction. – New York : W. H. Freeman & Company, 1989. – 328 p.
6. Egorushkin V. E., Panin V. E. Scale invariance of plastic deformation of the planar and crystal subsystems of solids under superplastic conditions // Physical Mesomechanics. – 2017. – Vol. 20, No. 1. – P. 5–13. – DOI: 10.1134/s1029959917010015.
7. Zuev L. B. Autowave plasticity. Localization and collective modes // Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. – Cambridge : Taylor & Francis Group, 2020. – P. 318–321. – DOI: 10.1007/978-3-319-91989-8_65.
8. Zuev L. B., Barannikova S. A. Autowave physics of material plasticity // Crystals. – 2019. – Vol. 9, No. 458. – P. 1–30. – DOI: 10.3390/cryst9090458.
9. Zuev L. B., Barannikova S. A. Quasi-particle approach to the autowave physics of metal plasticity // Metals. – 2020. – Vol. 10 (11). – P. 1–15. – DOI: 10.3390/met10111446.
10. Vildeman V. E., Lomakin E. V., Tretiakova T. V. Yield delay and space-time inhomogeneity of plastic deformation of carbon steel // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50, No. 4. – P. 412–420. – DOI: 10.3103/S002565441504007X.
11. Hähner P. Theory of solitary plastic waves // Applied Physics A. – 1994. – Vol. A58, No. 1. – P. 41–58. – DOI: 10.1007/BF00331516.

12. Elastic-plastic transition in iron: structure and thermodynamic features / O. A. Plekhov, O. B. Naimark, N. Saintier, T. Palin-Luc // *Technical Physics*. – 2009. – Vol. 54. – P. 1141–1146. – DOI: 10.1134/S1063784209080088.
13. Reyne B., Manach P.-Y., Moes N. Macroscopic consequences of Poibert–Luders and Portevin–Le Chatelier bands during tensile deformation in Al–Mg alloys // *Materials Science and Engineering: A*. – 2019. – Vol. 746. – P. 187–196. – DOI: 10.1016/j.msea.2019.01.009.
14. Kobelev N. P., Lebyodkin M. A., Lebedkina T. A. Role of self-organization of dislocations in the onset and kinetics of macroscopic plastic instability // *Metallurgical and Materials Transactions A*. – 2017. – Vol. 48, No. 3. – P. 965–974. – DOI: 10.1007/s11661-016-3912-x.
15. Taupin V., Chevy J., Fressengeas C. Effects of grain-to-grain interactions on shear strain localization in Al–Cu–Li rolled sheets // *International Journal of Solids and Structures*. – 2016. – Vol. 99. – P. 71–81. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.023.
16. Tretyakova T., Wildemann V. Study of spatial-time inhomogeneity of inelastic deformation and failure in bodies with concentrators by using the digital image correlation and infrared analysis // *Procedia Structural Integrity*. – 2017. – Vol. 5. – P. 318–324. – DOI: 10.1016/j.prostr.2017.07.177.
17. Kinematics of formation and cessation of type B deformation bands during the Portevin–Le Chatelier effect in an AlMg alloy / M. A. Lebyodkin, D. A. Zhemchuzhnikova, T. A. Lebedkina, E. C. Aifantis // *Results in Physics*. – 2019. – Vol. 12. – P. 867–869. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.12.067>.
18. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an AlMg polycrystal / A. A. Shibkov, M. F. Gasanov, M. A. Zheltov, A. E. Zolotov, V. I. Ivolgin // *International Journal of Plasticity*. – 2016. – Vol. 86. – P. 37–55. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.07.014>.
19. The Portevin–Le Châtelier effect in a metastable austenitic stainless steel / A. Müller, C. Segel, M. Linderov, A. Vinogradov, A. Weidner, H. Biermann // *Metallurgical and Materials Transactions A*. – 2016. – Vol. 47. – P. 59–74. – DOI: 10.1007/s11661-015-2953-x.
20. Efstathiou C., Sehitoglu H. Strain hardening and heterogeneous deformation during twinning in Hadfield steel // *Acta Materialia*. – 2010. – Vol. 58, iss. 5. – P. 1479–1488. – DOI: 10.1016/j.actamat.2009.10.054.
21. Hudson D.J. *Lectures on Elementary Statistics and Probability*. – Geneva : CERN, 1963. – 101 p. – DOI: 10.5170/CERN-1963-029.
22. Newnham R. E. *Properties of Materials: Anisotropy. Symmetry. Structure*. – Oxford : University Press, 2004. – 390 p. – DOI: 10.1093/oso/9780198520757.001.0001.
23. Temperature dependence of autowave characteristics of localized plasticity / L. B. Zuev, S. A. Barannikova, S. V. Kolosov, A. V. Nikonova // *Physics of the Solid State*. – 2021. – Vol. 63. – P. 47–53. – DOI: 10.1134/S1063783421010236.

Received: 02.02.2024

Revised: 24.04.2024

Accepted: 24.05.2024

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.073-086

STUDYING THE MAGNETOELASTIC PROPERTIES OF A STEEL SHEET UNDER BENDING DEFORMATION

S. M. Kulak^{a,*}, P. V. Pavlov^b, and V. S. Maltsev^c

Industrial University of Tyumen, 38 Volodarsky St., Tyumen, 625000, Russia

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-5970-8893>  kulaksm@tyuiu.ru

^{b)}  pavel.pavlov.2.0.0.2@mail.ru

^{c)}  <https://orcid.org/0009-0005-5711-701X>  coreboxe@gmail.com

*Corresponding author. Email: kulaksm@tyuiu.ru

Address for correspondence: ul. Melnikaite, 70, room 317, Tyumen, 625000, Russia

The possibility of using the method of magnetoelastic demagnetization (magnetoelastic memory) of ferromagnets to control mechanical stresses of extended steel structures is considered. For this purpose, the paper studies the magnetoelastic demagnetization of a large plate sample, previously locally magnetized in the form of an N-S stripe, under pure bending deformation. Under these deformation conditions, zones of tension and compression alternate along the sheet length; consequently, a locally magnetized steel stripe experiences stresses of different magnitudes and signs along its length. It has been revealed that the highest decrease δH in the stray field strength of local remanent magnetization in the form of an N-S stripe is found in steel sheet areas at the apex of the bend, where tensile stresses do not exceed 100 MPa. In the other parts of the sheet, a periodic distribution of lower δH with a wavelength of 20 to 30 cm was revealed, this being comparable to the size of half of its zone with stresses of the same type created during bending. The obtained results of changes in δH were calibrated according to the level of stresses they experienced, and their distribution along the entire length of the bent sheet was obtained. A conclusion is drawn about the applicability of the magnetoelastic memory method to monitoring the stress state of extended steel structures in the memory mode.

Keywords: magnetoelastic memory of metal, mechanical stress, steel structure

References

1. Gorkunov, E.S. and Mushnikov, A.N. Magnetic methods for assessing elastic stresses in ferromagnetic steels (review). *Kontrol. Diagnostika*, 2020, 23 (12), 4–23. (In Russian). DOI: 10.14489/td.2020.12.pp.004-023.
2. Kostin, V.N., Tsarkova, T.P., Nichipuruk, A.P., Loskutov, V.E., Lopatin, V.V., and Kostin, K.V. Irreversible changes in the magnetization as indicators of stress-strain state of ferromagnetic objects. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2009, 45 (11), 786–798. DOI: 10.1134/S1061830909110059.
3. Kuleev, V.G., Tsarkova, T.P., and Nichipuruk, A.P. Effect of tensile plastic deformations on the residual magnetization and initial permeability of low-carbon steels. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2006, 42 (4), 261–271. DOI: 10.1134/S1061830906040073.
4. Mushnikov, A.N. and Mitropolskaya, S.Yu. Influence of mechanical loading on the magnetic characteristics of pipe steels of different classes. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, 4, 57–70. DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.057-070. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-4/2016-4_89.htmlv

5. Gorkunov, E.S., Zadvorkin, S.M., Smirnov, S.V., Mitropol'skaya, S.Yu., and Vichuzhanin, D.I. Correlation between the stress-strain state parameters and magnetic characteristics of carbon steels. *The Physics of Metals and Metallography*, 2007, 103, 311–316. DOI: 10.1134/S0031918X07030131.
6. Novikov, V.F., Vazhenin, Yu.I., Bakharev, M.S., Kulak, S.M., and Muratov, K.R. *Diagnostika mest povyshennoy razrushaemosti truboprovoda* [Diagnostics of Places of Increased Destruction of the Pipeline]. OOO Nedra–Biznes–Tsentr Publ., Moscow, 2009, 200 p. (In Russian).
7. Kulak, S.M., Novikov, V.F., and Baranov, A.V. Control of mechanical stresses of high-pressure container walls by magnetoelastic method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, 154, 012004. DOI: 10.1088/1757-899X/154/1/012004.
8. Novikov, V.F., Ustinov, V.P., Radchenko, A.V., Muratov, K.R., Kulak, S.M., and Sorokina, S.V. On controlling stresses in a complexly loaded steel construction by magnetoelastic demagnetization. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2016, 52, 357–361. DOI: 10.1134/S1061830916060073.
9. Novikov, V.F., Kulak, S.M., and Andreev, V.O. On the control of the stress-strain state of steel bridge structures by the method of magnetoelastic demagnetization. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, 2020, 4 (291), 3–7. (In Russian).
10. Novikov, V.F., Kulak, S.M., and Parakhin, A.S. Determination of axial stresses of steel in memory mode according to the exponential law of magnetoelastic demagnetization. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2021, 87 (6), 54–62. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-6-54-62. (In Russian).
11. Vonsovsky, S.V. and Shur, Ya.S. *Ferromagnetism* [Ferromagnetism]. GITTL Publ., Moscow–Leningrad, 1948, 816 p. (In Russian).
12. Novikov, V.F. and Bakharev, M.S. *Magnitnaya diagnostika mekhanicheskikh napryazhenii v ferromagnetikakh* [Magnetic Testing of Mechanical Stresses in Ferromagnets]. Vektor Buk Publ., Tyumen, 2001, 220 p. (In Russian).
13. Novikov, V.F., Bakharev, M.S., and Sorokina, S.V. Non-destructive control of snow and wind loads in the mode of magnetoelastic memory. *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy*, 2008, 3, 51–54. (In Russian).
14. Ponomarev, V.N., Travush, V.I., Bondarenko, V.M., and Eremin, K.I. On the need for a systematic approach to research in the field of integrated safety and prevention of accidents of buildings and structures. *Predotvrashchenie Avariyy Zdanii i Sooruzheniy: Elektronnyi Zhurnal*, 2013, 1–9. (In Russian). Available at: http://www.pamag.ru/prensa/necessiy_sys-appro (accessed 2013–11–25).
15. Lipanov, I.D., Molodkin, I.A., and Khomonenko, A.D. Development and prospects of the information system for monitoring the condition of bridges. *Intellektualnye Tekhnologii na Transporte*, 2021, 3 (27), 11–16. (In Russian). DOI: 10.24412/2413-2527-2021-327-11-16.
16. Horokhov, E., Vasylev, V., Mironov, A., and Shcherbina, A. Tensely-deformed state of metallic ellipse beam. *Vestnik Donbasskoy Natsionalnoy Akademii Stroitelstva i Arhitektury*, 2020, 4 (104), 65–68. (In Russian).
17. Bozhkov, V.I., Dizenko, S.I., Pedan, O.A., and Khoroshev, A.A. Test of the bridge across the Sochi river. *Nauchnye Trudy KubGTU*, 2017, 3, 83–89. (In Russian). Available at: <https://ntk.kubstu.ru/data/mc/0040/1542.pdf>
18. Kulak, S.M., Novikov, V.F., and Maltsev, V.S. Testing mechanical stresses of bearing steel I-beams of automobile overpass using magnetic and tensometric methods. *Russian Journal of Non-destructive Testing*, 2022, 58, 186–194. DOI: 10.1134/S1061830922030044.
19. Kurilenko, E.Yu., Ogorodnova, Yu.V., and Shaptala, I.V. *Soprotivlenie materialov: uchebnoe posobie po tekhnicheskoi mekhanike i soprotivleniyu materialov* [Strength of Materials: Study Guide on Technical Mechanics and Strength of Materials]. RIO Tyumen GASU Publ., Tyumen, 2014, 163 p. (In Russian).
20. Mamchenko, V.O. *Raschet balok na prochnost i gestkost pri priyamom i ploskom izgibe* [Calculating Structural Integrity and Rigidity of Beams Under Straight Flat Bending: Teaching Aid]. NIU ITMO, St. Petersburg, 2014, 48 p. (In Russian).

21. Vodopyanov, V.I., Savkin, A.N., and Kondratyev, O.V. *Kurs soprotivleniya materialov s primerami i zadachami. Uchebnoe posobie* [The Course of Resistance of Materials with Examples and Tasks. Textbook]. VolgSTU Publ., Volgograd, 2012, 136 p. (In Russian).
22. Krapivsky, E.I. and Nekuchaev, V.O. *Distsionnaya magnitometriya gazonefteprovodov* [Remote Magnetometry of Gas and Oil Pipelines: Textbook]. UGTU Publ., Ukhta, 2011, 142 p. (In Russian).
23. Venkova, Yu.A. *Monitoring tekhnicheskogo sostoyaniya neftegazoprovodov po induktivnoy i ostatochnoy namagnichennosti* [Monitoring the Technical Condition of Oil and Gas Pipelines by Induced and Residual Magnetization: Cand. Thesis]. St. Petersburg, 2016, 149 p. (In Russian).

Подана в журнал: 02.02.2024

УДК 620.179.14

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.073-086

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГОГО РАЗМАГНИЧИВАНИЯ СТАЛЬНОГО ЛИСТА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБОМ

С. М. Кулак^{а, *}, П. В. Павлов^б, В. С. Мальцев^в

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тюменский индустриальный университет»,
ул. Володарского, 38, г. Тюмень, 625000, Россия*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-5970-8893>  kulaksm@tyuiu.ru;

^{б)}  pavel.pavlov.2.0.0.2@mail.ru

^{в)}  <https://orcid.org/0009-0005-5711-701X>  coreboxe@gmail.com

*Ответственный автор. Электронная почта: kulaksm@tyuiu.ru

Адрес для переписки: ул. Мельникайте, 70, ауд. 317, г. Тюмень, 625000, Россия

Рассматривается возможность применения метода магнитоупругого размагничивания (магнитоупругой памяти) ферромагнетиков для контроля механических напряжений протяженных стальных конструкций. Для этого исследовано магнитоупругое размагничивание пластинчатого образца больших размеров, предварительно локально намагниченного в виде полосы N-S, при его деформации простым изгибом. При этих условиях деформации листа по его длине будут чередоваться зоны растяжения и сжатия, а следовательно, локально намагниченная полоса стали по своей длине будет испытывать напряжения разного уровня и знака. Установлено, что наибольшее значение убыли δH напряженности магнитного поля рассеяния локальной остаточной намагниченности в виде полосы N-S имеют области стального листа в вершине изгиба, где напряжения растяжения не превышают 100 МПа. В остальных участках листа выявлено периодическое распределение δH меньшего уровня с длиной волны 20–30 см, что сопоставимо с размером половины его зоны с однотипными напряжениями, создаваемыми при изгибе. Проведена калибровка полученных результатов изменения δH по уровню испытываемых напряжений, и получено их распределение вдоль всей длины изгибаемого листа. Сделан вывод о применимости метода магнитоупругой памяти для контроля напряженного состояния протяженных стальных конструкций в режиме памяти.

Ключевые слова: магнитоупругая память металла, механические напряжения, стальная конструкция

1. Введение

Механические напряжения в ферромагнитном материале, создаваемые внешними воздействиями или термической деформацией, вызывают изменения доменной структуры, а следовательно, и его магнитоупругих свойств [1–5]. В частности, остаточная намагниченность ферромагнетика необратимо изменяется под действием механических напряжений растяжения и сжатия. Этот эффект магнитоупругого размагничивания (магнитоупругой памяти МУП) ферромагнитных материалов может быть использован для контроля их напряженного состояния [6–10]. Для этого необходимо измерить напряженность магнитного поля рассеяния H остаточного намагниченного элемента контролируемой конструкции до и после его деформации и сопоставить ее изменения с уровнем испытываемых напряжений. При контроле напряжений металлоконструкции магнитоупругим методом после ее локального намагничивания (ЛН) над намагниченным участком индуцируется магнитное поле, напряженность H которого определяется магнитным моментом локальной намагниченности M_r .

Метод МУП заключается в необратимом уменьшении напряженности магнитного поля рассеяния локальной остаточной намагниченности M_r ферромагнитного материала (стали) при силовом воздействии на него [6–10]. Под действием напряжений магнитная система (домены и их границы) ферромагнетика (стали), предварительно находящегося в остаточной намагниченном состоянии, перестраивается для достижения им минимума магнитоупругой энергии [11]. Убыль намагниченности M_r , а следовательно, и H стали, испытывавшей механические напряжения σ , будет тем больше, чем больше изменение ее магнитоупругой энергии $\Delta W_{му}$ и чем больше величина магнитоэластической энергии, и она зависит от подвижности доменных границ [12]. Применение метода МУП для контроля механических напряжений в стальной конструкции не требует подготовки ее поверхности, размещения на ней датчиков и регистрирующей аппаратуры. Роль запоминающего датчика в методе МУП выполняет сама контролируемая конструкция, а именно ее локально намагниченная область (магнитная метка). Физическая природа эффекта МУП, а именно необратимость изменений контролируемого магнитного параметра (остаточная намагниченность, напряженность H магнитного поля рассеяния локальной остаточной намагниченности), делает возможным его применение для контроля амплитуды механических напряжений в конструкциях, испытывающих не только статические, но и периодические разноуровневые нагрузки. К таким нагрузкам можно отнести, например, нагрузки, создаваемые в конструкциях порывами ветра в степных или северных районах, снеговые нагрузки [13], которые могут составлять до 30 % от расчетных значений статических напряжений. В работах [14, 15] показано, что одной из причин аварийного разрушения мостов являются динамические нагрузки, которые они испытывают в процессе эксплуатации. Поэтому важным направлением научных исследований по обеспечению безопасности таких транспортных сооружений является исследование изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) в опасных зонах и узлах, а также создание необходимых для этого новых приборов и методик [16, 17].

В работах [18, 9] изложены результаты исследования магнитоупругого размагничивания несущих балок моста после их локального намагничивания и динамического воздействия проезжающего по нему транспорта. По результатам этих исследований проведена оценка максимальных механических напряжений, создаваемых в средней части балок деформацией изгиба после динамического воздействия на них проезжающего транспорта. Протяженность исследуемых балок составляет ~42 м, и при их поперечном изгибе от проезжающего транспорта все точки балки будут также испытывать напряжения разной величины и знака. Поэтому возникла необходимость в исследовании возможностей метода магнитоупругого размагничивания при контроле механических напряжений протяженных стальных конструкций, например элементов мостовых сооружений, в режиме сканирования по всей их длине.

Цель работы – исследование магнитоупругого размагничивания протяженного стального образца при его деформации изгибом.

В ходе выполнения работы решались следующие задачи:

- разработка и изготовление стенда для намагничивания и деформации изгибом стального протяженного образца;
- исследование магнитоупругого размагничивания стального образца после его простого изгиба различного уровня;
- изучение распределения механических напряжений в стальном образце при деформации изгибом по результатам исследований его магнитоупругого размагничивания.

2. Материал и методика

Исследования проводили на стальном листе размером $2,5 \times 1,25$ м и толщиной 3 мм из стали 08пс. Согласно сертификату качества, выданному заводом-изготовителем, сталь 08пс имеет следующий уровень механических свойств: $\sigma_b = 340$ Н/мм²; $\delta = 35$ %; $\sigma_T = 196$ МПа.

Если рассматривать исследуемый образец в качестве простой балки, то допускаемая величина изгибающей силы при коэффициенте запаса прочности 1,5 не должна превышать 3,5 кН [19].

Для исследования магнитоупругих свойств протяженного стального образца при его деформации изгибом изготовлен стенд из немагнитных материалов, состоящий из платформы с подъемным механизмом и устройства для протяженного полосового намагничивания и измерения напряженности магнитного поля рассеяния локальной остаточной намагниченности (ЛОН) в виде полосы N-S вдоль листа после каждого этапа его изгиба (рис. 1).



Рис. 1. Стенд для исследования магнитоупругих свойств стального листа при простом поперечном изгибе: 1 – исследуемый стальной лист (образец); 2 – платформа с подъемным механизмом, расположенным внизу под листом в его центральной части; 3 – устройство для полосового намагничивания и сканирования листа стали

Платформа 2 с установленным снизу (под листом) подъемным механизмом и свободно лежащим на ее поверхности листом 1 располагалась горизонтально. В средней части платформы поперек листа внизу находился деревянный брусок длиной, равной ширине листа. Брусок плотно прилегал снизу к поверхности листа и свободно перемещался в вертикальной плоскости на фиксируемую высоту с помощью подъемного механизма, тем самым создавая изгибные деформации разного знака в плоскости исследуемого образца по всей его длине. Сверху, на поверхности исследуемого листа, располагалось устройство 3 для его полосового намагничивания и сканирования. Это устройство состояло из направляющих рельсов, расположенных параллельно друг другу и сторонам листа, намагничивающего устройства П-образной формы (рис. 2 а) и сканирующего устройства с датчиками феррозондового магнитометра ИКНМ-9М-12 (рис. 2 б). Намагничивающее и сканирующее устройства приводились в равномерное прямолинейное движение вдоль поверхности листа посредством веревки, наматываемой на барабан при его равномерном вращении. Направляющие рельсы устройства 3 позволяли производить намагничивание листа в виде строго параллельной полосы N-S поперек оси создаваемых в нем изгибом деформаций и сканировать магнитное поле рассеяния полученной локально остаточной намагниченности при строгом расположении датчиков магнитометра в местах максимумов нормальной и тангенциальной составляющих напряженности магнитного поля рассеяния создаваемой ЛОН.

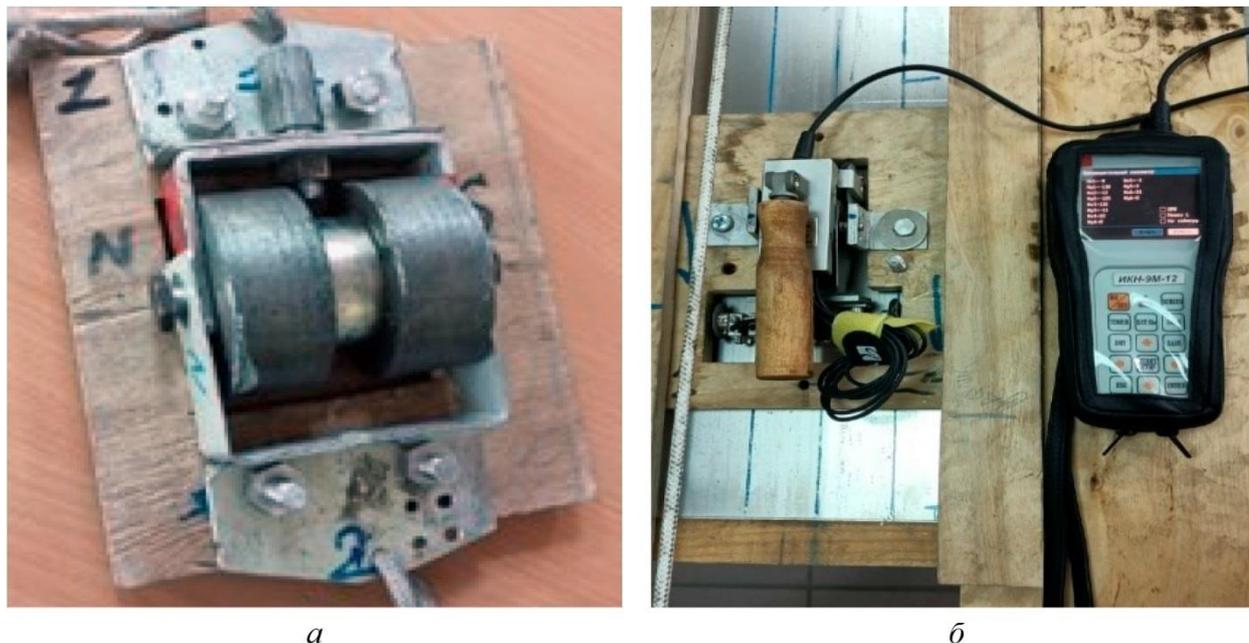


Рис. 2. Намагничивающее устройство П-образной формы (а) и сканирующее устройство с датчиками магнитометра ИКН-9М-12 (б)

Профиль создаваемой намагничивающим устройством ЛОН в виде полосы N-S и точки расположения феррозондовых датчиков на ней показаны на рис. 3.

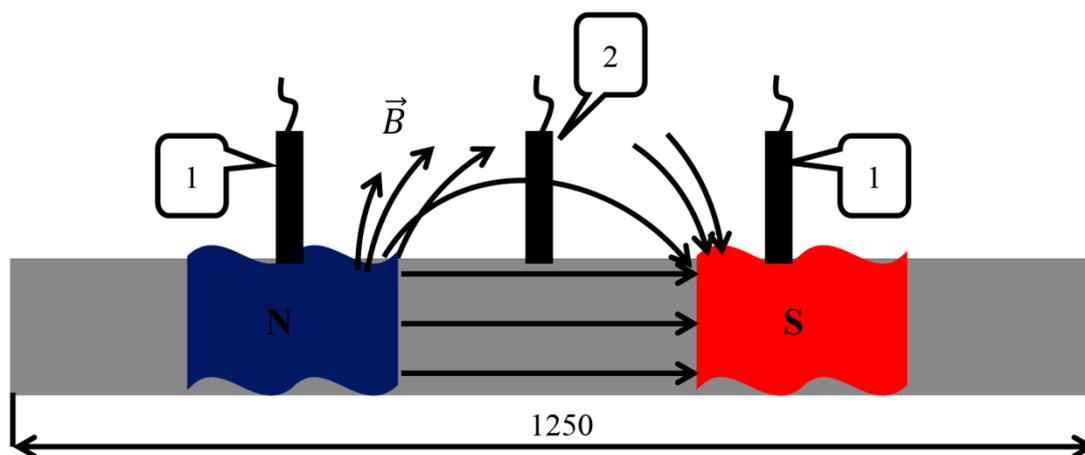


Рис. 3. Поперечное сечение стального листа, намагниченого локально полосой N-S с расположенными на его поверхности датчиками в местах максимумов нормальной (1) и тангенциальной (2) составляющих напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН

Ширина полюсов N и S намагничивающего устройства значительно больше толщины исследуемого листа, что позволяло его намагничивать на всю толщину.

Методика исследований состояла в следующем. В направляющие рельсы устройства 3 (рис. 1) помещали намагничивающее устройство (рис. 2 а), перемещаемое вдоль длины листа, и производили его поперечное намагничивание в виде полосы N-S. Всего намагничивание производили вдоль трех выделенных параллельных линий, одна из которых проходила через середину листа, а две другие – на расстоянии 0,5 м от нее. Затем намагничивающее устройство в направляющих рельсах заменяли на сканирующее (рис. 2 б) и измеряли нормальную H_{n0} и тангенциальную H_{t0} составляющие напряженности магнитного поля рассея-

ния ЛОН в точках, показанных на рис. 3 и в таблице. При этом показания датчиков H_n усредняли, что исключало влияние внешнего магнитного поля на результаты измерений.

Таблица

Результаты измерения нормальной H_{n0} и тангенциальной $H_{\tau0}$ составляющих напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН в виде полосы N-S в исходном, ненагруженном изгибом, состоянии стального листа

Расстояние от края полосы $X, м$	Составляющие напряжённости магнитного поля рассеяния ЛОН	
	$H_{\tau0}, А/м$	$H_{n0}, А/м$
0	-199	71,7
0,1	-212	84
0,2	-212	91,5
0,3	-212	86,5
0,4	-212	88
0,5	-212	76
0,6	-242	77,8
0,7	-212	90,5
0,8	-201	94
0,9	-205	77,5
1,0	-212	76,5
1,1	-209	86,5
1,2	-209	84
1,3	-209	89
1,4	-196	82,5
1,5	-206	70,5
1,6	-200	84,5
1,7	-199	98,5
1,8	-199	79
1,9	-185	74
2,0	-164	62,5
2,1	-187	72,5
2,2	-212	77
2,3	-221	76

С помощью подъемного механизма стенда выполняли вертикальный подъем деревянного бруска, расположенного под листом в его середине, на высоту $h = 10$ мм, тем самым создавая минимальный изгиб листа с расположенным на его поверхности устройством 3 (рис. 1). Повторяли аналогичные измерения H_n и H_τ вдоль выделенных линий. Далее следовали повторные операции подъема центральной части листа на высоту $h = 20, 30, 40, 50$ и 60 мм и измерения H_{ni} и $H_{\tau i}$. Оценивали величины относительного изменения обеих составляющих δH_n и δH_τ напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН листа после каждого этапа его изгиба.

$$\delta H_n = \frac{H_{n0} - H_{ni}}{H_{n0}}, \quad \delta H_\tau = \frac{H_{\tau0} - H_{\tau i}}{H_{\tau0}}. \quad (1)$$

С помощью тензометрического устройства, применяемого в работах [18, 9] для измерения деформации балок автомобильного моста, проведена калибровка величины стрелы из-

гиба h исследуемого листа по уровню деформаций растяжения (механических напряжений σ), создаваемых в его середине. Согласно исследованиям [20, 21], при поперечном вертикальном изгибе горизонтальной балки вверх в ее центральной части реализуются наибольшие деформации растяжения в верхней плоскости и сжатия – в нижней. При этом знак и величина деформации вдоль верхней и нижней поверхностей листа поперек линии его изгиба будут изменяться. Увеличение стрелы изгиба h листа в его центральной части сопровождается неодинаковым уменьшением радиуса кривизны различных участков его поверхности и соответствующим ростом деформации в этих местах. Поэтому вследствие магнитоупругого эффекта, вызванного простым изгибом стального листа, его остаточная намагниченность M_r , а следовательно и напряженность магнитного поля рассеяния H ЛОН, измеренная на верхней поверхности в области полосы N-S, будет претерпевать изменения, соответствующие величине и знаку создаваемых изгибом нормальных напряжений σ . Вдоль средней линии по толщине листа между верхней и нижней поверхностями нормальные напряжения равны нулю. В последующем была установлена зависимость относительного изменения напряженности магнитного поля рассеяния δH_n и δH_t ЛОН стального листа от механических напряжений σ , создаваемых при его изгибе.

Под действием механических напряжений σ магнитная система (домены и их границы) ферромагнетика (стали), предварительно находящегося в остаточной намагниченности, перестраивается для достижения им минимума магнитоупругой энергии [11]:

$$\Delta W_{my} = -3/2 \cdot \lambda_s \sigma \cos^2 \varphi.$$

Здесь λ_s – константа магнитострикции; σ – упругие напряжения; φ – угол между магнитным моментом \vec{P}_m ферромагнетика (направлением намагниченности) и осью действующих напряжений в нем.

Если ферромагнетик (сталь) локально намагнитить в виде полосы N-S внешним магнитным полем П-образного намагничивающего устройства (рис. 2 а) поперек длины листа, создав преимущественную ориентацию магнитных моментов доменов \vec{P}_m в этом направлении (рис. 3), а затем в этом же месте оказать сжимающее воздействие $\sigma < 0$ поперек оси намагничивания, то магнитные моменты \vec{P}_m его доменов будут стремиться изменить свое прежнее пространственное положение максимум на $\varphi \sim 90^\circ$, или, другими словами, занять положение с максимальным углом φ между магнитным моментом и осью нагружения, т. е. расположиться нормально к плоскости. Тем самым будет достигнут минимум магнитоупругой энергии ΔW_{my} стали (ферромагнетика) в области локальной остаточной намагниченности N-S. В этом случае рост напряжений сжатия в листе за счет большего изгиба будет вызывать увеличение нормальной H_n и убыль тангенциальной H_t составляющих напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН полосы N-S. На рис. 4 и 5 зоны сжатия приходятся на участки верхней поверхности листа с координатами $L = 0 \div 60$ см и $180 \div 240$ см. В этих участках величина δH_n с ростом стрелы изгиба h изменяется неоднозначно, а δH_t только увеличивается. При аналогичном полосовом намагничивании листа и ортогональном к создаваемой локальной остаточной намагниченности нагружению растяжением $\sigma > 0$ для достижения минимума ΔW_{my} магнитные моменты доменов \vec{P}_m будут занимать положение вдоль оси нагружения. Следовательно, здесь обе составляющие H_n и H_t будут только убывать с ростом напряжений растяжения при увеличении h . Область исследуемого образца, где реализуются напряжения растяжения при его центральном изгибе, находится в его средней части размером $L = 60 \div 180$ см. Как видно из рис. 4 и 5, в этой части образца величины δH_n и δH_t только возрастают при увеличении стрелы изгиба листа h . Таким образом, для двух отличающихся видов однородного нагружения ферромагнетика (например, осевое сжатие и растяжение) при одной и той же исходной конфигурации распределения магнитных моментов \vec{P}_m , его локальной намагниченности, создаваемой полосовым намагничиванием N-S, и качественно подобной магнитоупру-

гой энергии происходит перестройка магнитных моментов \vec{P}_m , доменной системы стали в этом месте, и тем самым формируется локально ее остаточной намагниченности состояние. Индуцируемое локальной остаточной намагниченностью стали магнитное поле рассеяния H на поверхности стального образца регистрируется датчиком феррозондового магнитометра.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 4 и 5 показаны распределения изменения нормальной δH_n и тангенциальной δH_t составляющих напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН вдоль средней намагниченной полосы N-S после намагничивания листа и его изгиба с разной стрелой h .

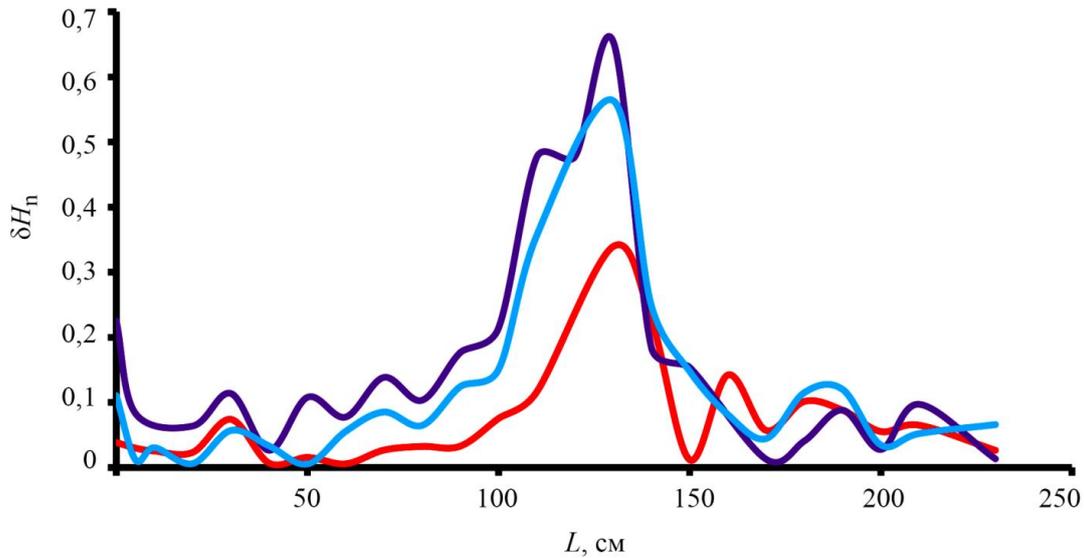


Рис. 4. Распределение величины δH_n – относительного изменения нормальной составляющей напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН полосы N-S по длине стального листа L после его намагничивания и изгиба в средней части со стрелой $h = 10$ (—), 30 (—) и 60 (—) мм

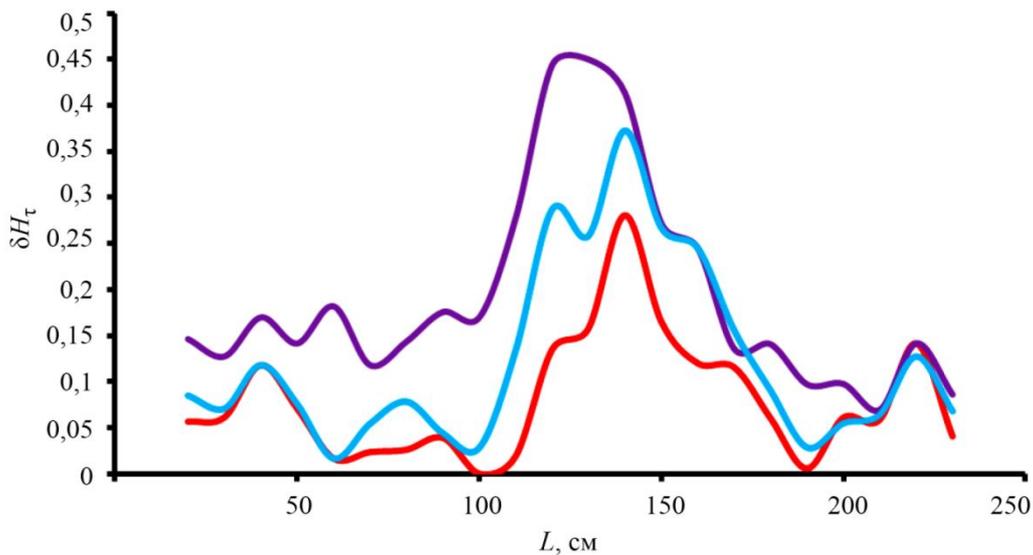


Рис. 5. Распределение величины δH_t – относительного изменения тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля рассеяния ЛОН полосы N-S по длине стального листа L после его намагничивания и изгиба в средней части со стрелой $h = 10$ (—), 30 (—) и 60 (—) мм

Как видно из рис. 4 и 5, составляющие δH_n и δH_t имеют наибольшее значение в центральной части листа, где он испытывает наибольшие изгибные деформации. С ростом стрелы изгиба листа h эти изменения неодинаково возрастают в каждой точке контролируемой полосы N-S. Также можно отметить синфазную периодичность изменения δH_n и δH_t при любой стреле изгиба листа h . При этом длина волны такой периодической кривой составляет 20–30 см, что приблизительно соответствует половине протяженности участка листа, испытывающего однородные напряжения растяжения или сжатия. Повторные поэтапные циклы изгибной деформации листа до уровня $h = 60$ мм не вызвали изменений регистрируемых параметров δH_n и δH_t .

Знак величины изменения напряженности магнитного поля рассеяния δH_n , δH_t локально намагниченной стали (магнитоупругого размагничивания, или МУП) остается неизменным при смене знака прикладываемых к ней напряжений (растяжение или сжатие) при изгибе [6]. При пьезомагнитном намагничивании деформируемого изгибом стального трубопровода его магнитное поле изменяется периодически как по модулю, так и по направлению [22, 23] и имеет схожий характер с магнитным полем подземного трубопровода, испытывающего изгибные деформации [6].

На рис. 6 показано распределение механических напряжений σ по длине средней полосы N-S, оцененных по результатам калибровки магнитоупругого сигнала δH_n и δH_t и стрелы изгиба листа h по уровню механических напряжений σ , измеренных с помощью тензометрического устройства [18, 9]. Отметим, что в областях сжатия изгибаемого листа в точках с $L = 0 \div 50$, $200 \div 250$ см величина создаваемых напряжений определяется положительной.

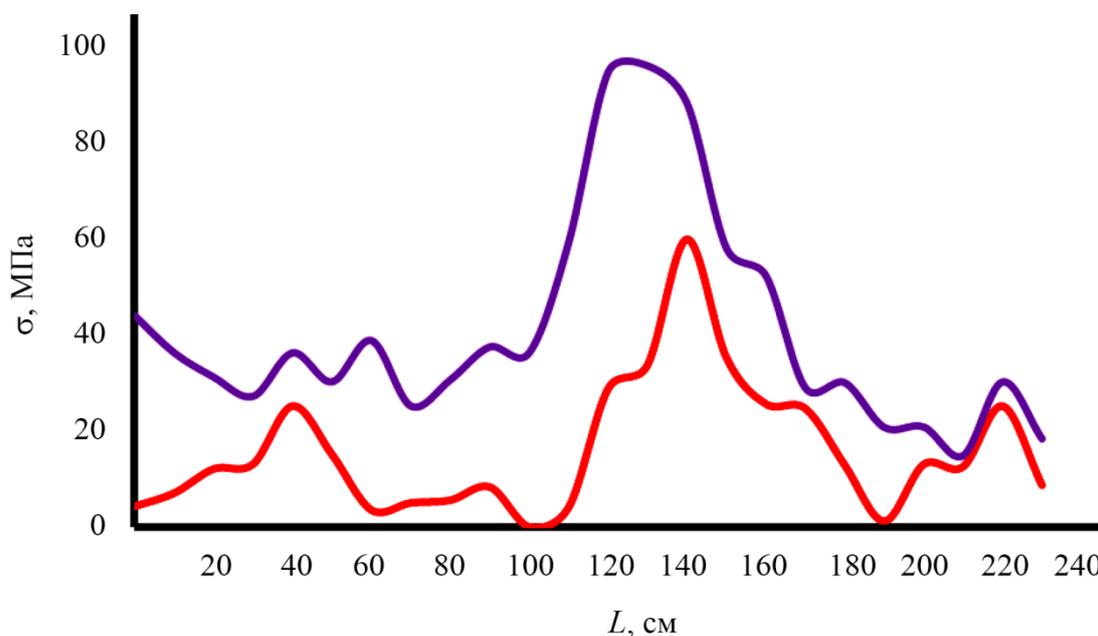


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений σ вдоль средней полосы N-S листа длиной L при стреле его изгиба $h = 10$ (—) и 60 (—) мм

Как видно из рис. 6, увеличение стрелы изгиба листа до $h = 60$ мм приводит к различному увеличению уровня напряжений вдоль всей его длины и создает в центре его верхней поверхности наибольшие напряжения растяжения (порядка 100 МПа).

Изгиб исследуемого стального листа с подъемом $h = 60$ мм смоделирован в программе ELCUT, в результате чего было получено распределение нормальных механических напряжений по его длине (рис. 7).

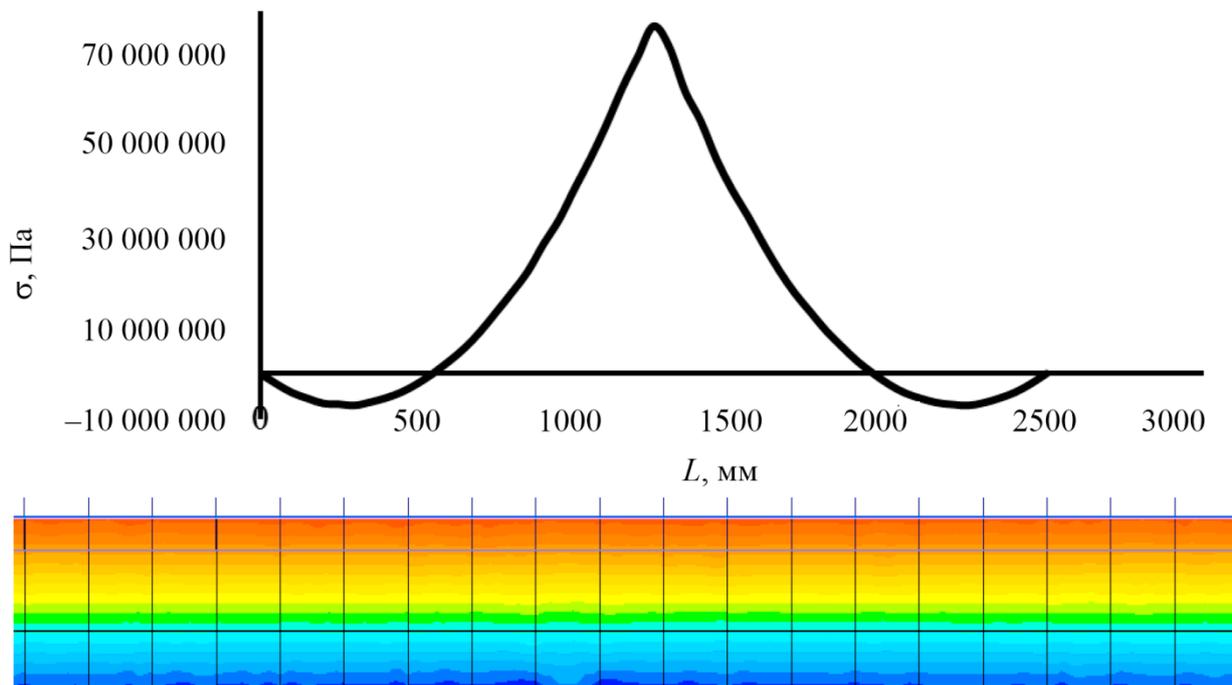


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений σ растяжения и сжатия по длине стального листа при его изгибе, полученное в среде ELCUT, и их цветовая диаграмма для участка размером 200 мм, расположенного в его середине

Результаты количественной оценки напряжений на участке $L = 80 \div 180$ см намагниченной полосы деформируемого листа по расчетной модели в ELCUT и экспериментальной отличаются не более чем на 18 %.

Полученные результаты исследования магнитоупругого размагничивания протяженного стального образца свидетельствуют в пользу перспективности контроля напряженно-деформированного состояния протяженных стальных конструкций методом магнитоупругой памяти в режиме сканирования.

4. Заключение

Изготовлено устройство и отработана методика полосового намагничивания протяженного стального листа, и исследовано его магнитоупругое размагничивание при простом поперечном изгибе. Обнаружено, что в области деформации растяжением верхней поверхности листа нормальная H_n и тангенциальная H_t составляющие напряженности магнитного поля рассеяния локальной остаточной намагниченности полосы N-S убывают, а в области сжатия H_n изменяется неоднозначно с периодом 20–30 см. Установлено распределение механических напряжений вдоль средней линии стального листа при его деформации изгибом с максимумом растяжения $\sigma \sim 100$ МПа в центральной части. Показана возможность контроля напряженно-деформированного состояния протяженных стальных конструкций, испытывающих изгибные деформации, методом магнитоупругого размагничивания в режиме сканирования.

Литература

1. Горкунов Э. С., Мушников А. Н. Магнитные методы оценки упругих напряжений в ферромагнитных сталях (обзор) // Контроль. Диагностика. – 2020. – Т. 23, № 12. – С. 4–23. – DOI: 10.14489/td.2020.12.pp.004-023.
2. Irreversible changes in the magnetization as indicators of stress-strain state of ferromagnetic objects / V. N. Kostin, T. P. Tsarkova, A. P. Nichipuruk, V. E. Loskutov, V. V. Lopatin, K. V. Kostin // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2009. – Vol. 45, No. 11. – P. 786–798. – DOI: 10.1134/S1061830909110059.
3. Kuleev V. G., Tsarkova T. P., Nichipuruk A. P. Effect of tensile plastic deformations on the residual magnetization and initial permeability of low-carbon steels // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2006. – Vol. 42, No. 4. – P. 261–271. – DOI: 10.1134/S1061830906040073.
4. Mushnikov A. N., Mitropolskaya S. Yu. Influence of mechanical loading on the magnetic characteristics of pipe steels of different classes // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2016. – Iss. 4. – P. 57–70. – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.057-070. – URL: http://dream-journal.org/issues/2016-4/2016-4_89.htmlv
5. Correlation between the stress-strain state parameters and magnetic characteristics of carbon steels / E. S. Gorkunov, S. M. Zadvorkin, S. V. Smirnov, S. Yu. Mitropolskaya, D. I. Vichuzhanin // The Physics of Metals and Metallography. – 2007. – Vol. 103. – P. 311–316. – DOI: 10.1134/S0031918X07030131.
6. Диагностика мест повышенной разрушаемости трубопровода / В. Ф. Новиков, Ю. И. Важенин, М. С. Бахарев, С. М. Кулак, К. Р. Муратов. – Москва : Недра–Бизнесцентр, 2009. – 200 с.
7. Kulak S. M., Novikov V. F., Baranov A. V. Control of mechanical stresses of high-pressure container walls by magnetoelastic method // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – Vol. 154. – P. 012004. – DOI: 10.1088/1757-899X/154/1/012004.
8. On controlling stresses in a complexly loaded steel construction by magnetoelastic demagnetization / V. F. Novikov, V. P. Ustinov, A. V. Radchenko, K. R. Muratov, S. M. Kulak, S. V. Sorokina // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2016. – Vol. 52, No. 6. – P. 357–361. – DOI: 10.1134/S1061830916060073.
9. Новиков В. Ф., Кулак С. М., Андреев В. О. О контроле напряженно-деформированного состояния стальных мостовых конструкций методом магнитоупругого размагничивания // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 4 (291). – С. 3–7. – DOI: 10.37538/0039-2383.2020.4.3.7.
10. Новиков В. Ф., Кулак С. М., Парахин А. С. Определение осевых напряжений стали в режиме памяти по экспоненциальному закону магнитоупругого размагничивания // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2021. – Т. 87, № 6. – С. 54–62. – DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-6-54-62.
11. Вонсовский С. В., Шур Я. С. Ферромагнетизм. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1948. – 816 с.
12. Новиков В. Ф., Бахарев М. С. Магнитная диагностика механических напряжений в ферромагнетиках. – Тюмень : Вектор Бук, 2001. – 220 с.
13. Новиков В. Ф., Бахарев М. С., Сорокина С. В. Неразрушающий контроль снеговой и ветровой нагрузки металлоконструкций в режиме магнитоупругой памяти // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – № 3. – С. 51–54.
14. О необходимости системного подхода к научным исследованиям в области комплексной безопасности и предотвращения аварий зданий и сооружений / В. Н. Пономарев, В. И. Травуш, В. М. Бондаренко, К. И. Еремин // Предотвращение аварий зданий и сооружений: электронный журнал. – URL: http://www.pamag.ru/prensa/necessiy_sys-appro (04.03.2021).
15. Липанов И. Д., Молодкин И. А., Хомоненко А. Д. Разработка и перспективы информационной системы для мониторинга состояния мостов // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2021. – № 3 (27). – С. 11–16. – DOI: 10.24412/2413-2527-2021-327-11-16.

16. Напряженно-деформированное состояние металлической эллипсной балки / Е. В. Горохов, В. Н. Васылев, А. Н. Миронов, А. С. Щербина // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – 2020. – Вып. 4 (104). – С. 65–68.
17. Испытание моста через реку Сочи / В. И. Божков, С. И. Дизенко, О. А. Педан, А. А. Хорошев // Научные труды КубГТУ. – 2017. – № 3. – С. 83–89. – URL: <https://ntk.kubstu.ru/data/mc/0040/1542.pdf>
18. Kulak S. M., Novikov V. F., Maltsev V. S. Testing mechanical stresses of bearing steel I-beams of automobile overpass using magnetic and tensometric methods // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2022. – Vol. 58. – P. 186–194. – DOI: 10.1134/S1061830922030044.
19. Куриленко Е. Ю., Огороднова Ю. В., Шаптала И. В. Сопротивление материалов : учеб. пособие. – Тюмень : РИО ТюмГАСУ, 2014. – 163 с.
20. Мамченко В. О. Расчет балок на прочность и жесткость при прямом плоском изгибе : учеб.-метод. пособие. – Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2014. – 48 с.
21. Водопьянов В. И., Савкин А. Н., Кондратьев О. В. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб. пособие. – ВолгГТУ : Волгоград, 2012. – 136 с.
22. Крапивский Е. И., Некучаев В. О. Дистанционная магнитометрия газонефтепроводов : учеб. пособие. – Ухта : УГТУ, 2011. – 142 с.
23. Венкова Ю. А. Мониторинг технического состояния нефтегазопроводов по индуцированной и остаточной намагниченности : дис. ... канд. техн. наук : 25.00.19. – Санкт-Петербург, 2016. – 149 с.