





http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Editor-in-Chief: Eduard S. Gorkunov, RAS Academician (Russia) Deputy Editors-in-Chief: Sergey V. Smirnov, Sergey V. Gladkovsky

Editorial Council

Chairman: Eduard S. Gorkunov, RAS Academician (Russia)

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)

Editorial Board

Shao Wen-zhu (China)

Boris V. Artemyev (Moscow) Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)

Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg) Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg) Sergey V. Burov (Ekaterinburg) Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg) Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg) Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria) Vladimir G. Degtyar (Miass) Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg) Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg) Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg) Anatoly V. Konovalov (Ekaterinburg) **Vladimir N. Kostin** (Ekaterinburg) Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg) Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg) Radik R. Mulyukov (Ufa) Vitaly V. Muravyov (Izhevsk) Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg) Oleg A. Plekhov (Perm) Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg) Evgenii Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg) Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg) Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk) Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg) Roman A. Savray (Ekaterinburg) Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg) Yury V. Subachev (Ekaterinburg) Alexander I. Ulyanov (Izhevsk) Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts Anna V. Garieva, maker-up Galina V. Torlopova, associate editor Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation phone: +7 (343) 375-35-83, fax: +7 (343) 374-53-30 e-mail: dream-journal@mail.ru http://dream-journal.org



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н. Заместители главного редактора: Сергей Витальевич Смирнов, д.т.н.; Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)

Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)

Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)

Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)

Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)

Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)

Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)

Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)

Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)

Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)

Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора - Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – Гладковский Сергей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)

Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)

Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)

Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)

Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)

Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)

Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)

Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)

Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)

Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Задворкин Сергей Михайлович, к.ф-м.н. (Екатеринбург)

Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)

Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)

Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)

Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)

Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)

Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)

Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)

Просвиряков Евгений Юрьевич, д.ф-м.н. (Екатеринбург)

Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)

Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)

Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф-м.н. (Екатеринбург)

Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)

Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)

Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)

Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)

Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык Циклина Ирина Михайловна – редактор текста

Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста

Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора

Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН

телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30

e-mail: dream-journal@mail.ru

http://dream-journal.org

DREAM http://dream-iournal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

CONTENTS

Struzhanov V. V. and Chaikin A. E. Determining the moment of destruction of protects coatings on pipes and spherical vessels	6
Mishakin V. V., Gonchar A. V., Poroshkov A. V., Semenova N. V. Determination of hydrogen-induced damage by an acoustic method	19
Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters	29
Bobrovskii V. I. On models for estimating the post-radiation defect state of the γ' -phase	47
Nazarov V. V. Approximation of the creep curve up to the moment of necking	61



ISSN 2410-9908

СОДЕРЖАНИЕ

Стружанов В. В., Чайкин А. Е. Об определении момента разрушения защитных покрытий труб и сферических сосудов	6
Мишакин В. В., Гончар А. В., Порошков А. В., Семенова Н. В. Определение индуцированной водородом поврежденности акустическим методом	19
Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Изотермические сдвиговые течения вязкой несжимаемой жидкости с пространственным ускорением при учете трех параметров Кориолиса	29
Бобровский В. И. К моделям для оценки пострадиационного дефектного состояния γ'-фазы	47
Назаров В. В. Аппроксимация кривой ползучести до момента времени появления шейки	61



DREAM http://dream-iournal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 17.11.2019 **Revised:** 30.04.2020 **Accepted:** 19.06.2020

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.006-018

DETERMINING THE MOMENT OF DESTRUCTION OF PROTECTIVE COATINGS ON PIPES AND SPHERICAL VESSELS

V. V. Struzhanov^{1, a)*} and A. E. Chaikin^{2, b)}

¹Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation ²Institute of Natural Sciences and Mathematics, B. N. Yeltsin Ural Federal University, 48 Kuibysheva St., Ekaterinburg, 620000, Russian Federation

*Corresponding author: E-mail: stru@imach.uran.ru Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation Tel.: +7(343)362–30–19

An analytical method is developed to determine the moment of destruction of thin coatings on pipes and spherical vessels. The coating material works at the stage of elasticity; it has the property of strain softening, that is, destruction with increasing deformation occurs in the process of stress drop. The properties of the coating material are described by convex-concave potentials both under uniaxial tension and in a plane stress state. To determine the moment of destruction, methods of the mathematical theory of catastrophes are applied, which allow one to find all the equilibrium positions of systems and the point of loss of stability of the deformation process.

Keywords: thin coating, pipe, spherical vessel, curves of equilibrium states, loss of stability, destruction, Lamé problem.

References

- 1. Fedorov Yu.Yu., Popov S.N., Savvina A.V., Vasilyev S.V., Rodionov A.K. Evaluation of the Axial Stresses of a Gas Pipeline Made of Reinforced Polyethylene Pipes under Conditions of Permafrost Soils. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 3, pp. 36–41. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.3.036-041. URL: http://dream-journal.org/issues/2017-3/2017-3_122.html (assessed: 22.03.2018).
- 2. Struzhanov V.V., Mironov V.I. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstruktsiy* [Strain Softening of Material in Structural Elements]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1995, 190 p.
- 3. Andrasic C.P., Parker A.P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings. *Engng. Fract. Mech.*, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 187–193.
- 4. Shannon R.W.E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders. *Int. J. Pres. Ves. and Piping*, 1974, vol. 2, pp. 19–29.
- 5. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the Theory of Plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 420 p. (In Russian).
- 6. Korkin A.V., Struzhanov V.V., Chaykin A.E. Stability of uniform tension of a disk with a central zone of softening material. In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), vol. 1, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 64–68. (In Russian).

DREAM http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

- 7. Struzhanov V.V., Korkin A.V., Chaykin A. E. One approach to determination of the ultimate load-bearing capacity of mechanical systems with softening elements. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2018, vol. 22 (4), pp. 762–773. DOI: 10.14498/vsgtu1624. (In Russian).
- 8. Struzhanov V.V. The determination of the deformation diagram of a material with a falling branch using the torsion diagram of a cylindrical sample. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, vol. 15 (1), pp. 138–144. (In Russian).
- 9. Poston T., Stuart I. *Teoriya katastroph i ee prilozheniya* [Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications, London, San Francisco, Melbourne, Pitman, 1978]. Moscow, Mir Publ., 1980, 608 p. (In Russian).
- 10. Gilmore R. *Prikladnaya teoriya katastroph*. Book 1 [Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, New York, Dover, 1993]. Moscow, Mir Publ., 1984, 350 p. (In Russian).
- 11. Timoshenko S.P., Gudier D.N. *Teoriya uprugosti* [Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity, New York, Toronto, London, McGraw Hill Book Company Inc., 1951]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p. (In Russian).
- 12. Pars L. *Analiticheskaya dinamika* [Pars L. A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London, 1965; reprinted by Ox Bow Press, Woodbridge, CT, USA, 1979]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 636 p.



ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 17.11.2020

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.006-018

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТА РАЗРУШЕНИЯ ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ ТРУБ И СФЕРИЧЕСКИХ СОСУДОВ

В. В. Стружанов^{1, а)*}, А. Е. Чайкин^{2, б)}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук», ул. Комсомольская 34, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация ²Институт естественных наук и математики Уральского Федерального университета», ул. Мира 19, 620000, г. Екатеринбург, Российская Федерация.

*Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7(343)362–30–19

Разработан аналитический метод определения момента разрушения тонких покрытий труб и сферических сосудов, материал которых работает на стадии упругости. Материал покрытий обладает свойством деформационного разупрочнения, то есть разрушение при возрастающей деформации происходит в процессе падения напряжений. Свойства материала покрытия описываются выпукло-вогнутыми потенциалами как при одноосном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии. Для определения момента разрушения используются методы математической теории катастроф, которые позволяют найти все положения равновесия систем и точку потери устойчивости процесса деформирования.

Ключевые слова: тонкое покрытия, труба, сферический сосуд, кривые равновесных состояний, потеря устойчивости, разрушение, задача Ляме.

1. Введение

Цилиндрические и сферические элементы конструкций часто используются в технике. Это резервуары различного назначения, трубопроводы, котлы, корпуса двигателей. Разработка методов расчета составных цилиндров на прочность становится актуальной и с появлением новых современных материалов [1]. При этом ставятся задачи прогнозирования разрушения материалов и гарантирование работы ответственных конструкций [2–4].

Для повышения работоспособности и жизнедеятельности таких элементов конструкций часто используют защитные покрытия, которые ограждают их от вредного влияния агрессивных сред и от воздействия на окружающую среду, когда трубы и сферические сосуды выполнены из токсичных материалов. В процессе возрастания внутреннего давления защитные покрытия могут разрушиться и перестать выполнять свои функции. Следовательно, задача о прогнозировании их разрушения является актуальной. В данной работе предложена методика расчета момента разрушения покрытий. Она основана на применении методов математической теории катастроф при том условии, что свойства материалов покрытий описываются выпукло-вогнутыми потенциалами, отражающими их упрочнение и разупрочнение, а также возможность разрушения.



ISSN 2410-9908

2. Механические системы

Будем рассматривать две механические системы. Первая — это толстостенная длинная труба с внутренним радиусом, равным a, и внешним, равным b, имеющая тонкое покрытие толщиной t. Вторая — толстостенная сфера (внутренний радиус a, внешний — b), которая также покрыта тонкой оболочкой (толщина t). Толстостенные элементы всегда находятся в состоянии упругости. Свойства упругого материала определяют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона v. Покрытия изготовлены из материала, который перед разрушением проходит стадию разупрочнения. В упругости материал покрытий имеет модуль Юнга E и коэффициент Пуассона E труба и сфера находятся под действием квазистатически возрастающего внутреннего давления интенсивностью E (мягкое нагружение). Либо точкам внутренних границ задается квазистатически возрастающее радиальное перемещение E (жесткое нагружение). При нагружении точки внешних границ трубы и сферы из-за наличия покрытий получают некоторые, заранее неизвестные, радиальные перемещения E Нагружения происходят при постоянной температуре. Для каждой механической системы требуется найти значение параметров E или E при достижении которых покрытия разрушаются.

3. Свойство покрытий

Определим свойства материала покрытий на всех стадиях деформирования, включая и стадию разупрочнения. При пропорциональном нагружении для расчета напряженно-деформированного состояния, как правило, используется теория малых упруго-пластических деформаций [5]. Однако ее первое положение о постоянстве объемного модуля на стадии разупрочнения не выполняется в силу наличия объемного разрушения материала. Вместо второго положения о пропорциональности девиаторов тензоров напряжений и деформаций будем сохранять пропорциональность полных тензоров напряжений и деформаций с некоторым переменным матричным коэффициентом, зависящим от деформаций. Это означает, что в области неупругости линии уровня функции потенциальной энергии подобны линиям уровня в области упругости. В случае плоско-напряженного состояния имеем [6, 7]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \frac{H}{1 - \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$
(1)

Для определения параметра ψ воспользуемся полной диаграммой с падающей ветвью на стадии разупрочнения при чистом сдвиге [8]. Пусть $\tau = G \cdot \left(\gamma - 50\gamma^2\right)$. Здесь τ — касатель-

ное напряжение, γ – сдвиг, $G = \frac{H}{2 \cdot (1 + \mu)}$ – модуль сдвига в упругости. Тогда энергия дефор-

маций
$$V=\int\limits_0^\gamma au d\gamma=V^e\cdot \left(1-rac{100}{3}\cdot \sqrt{rac{2\cdot V^e}{G}}
ight),\ V^e=rac{1}{2}\cdot G\gamma^2,\ \gamma=\sqrt{rac{2\cdot V^e}{G}}.$$

Энергия упругой деформации в общем случае плоско-напряженного состояния

$$V^{e}(\varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}) = H \cdot \left[2 \cdot \left(1 - \mu^{2}\right)\right]^{-1} \cdot \left(\varepsilon_{1}^{2} + 2\mu\varepsilon_{1}\varepsilon_{2} + \varepsilon_{2}^{2}\right)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — компоненты плоской деформации в прямоугольной декартовой системе координат.

Так как
$$\sigma_1 = \frac{dV}{d\varepsilon_1}$$
, $\sigma_2 = \frac{dV}{d\varepsilon_2}$, то из равенства (1) находим, что

ISSN 2410-9908

$$\psi = 1 - 100 \cdot \sqrt{V^e \cdot \frac{1 + \mu}{H}}.$$
 (2)

4. Разрушение покрытия трубы (жесткое нагружение)

Для определения момента разрушения покрытия в системе (упругая труба — покрытие) при постепенном возрастании параметра w будем использовать аппарат математической теории катастроф [9, 10]. Его применение основано на построении лагранжиана системы, который в силу равенства нулю кинетической энергии представляет сумму потенциальных энергий деформаций элементов системы. Очевидно, что он зависит от параметра управления w (задаваемая величина) и состояния v (обобщенная координата).

Энергию деформаций трубы найдем, вычисляя напряжения и деформации из решения осесимметричной задачи Ляме [11] с граничными условиями $u|_{r=a} = w$, $u|_{r=b} = v$, (u – радиальные перемещения точек трубы). Производя необходимые действия, получаем

$$\varepsilon_{r} = \frac{1}{b^{2} - a^{2}} \cdot \left[(b\upsilon - wa) - \frac{1}{r^{2}} ab \cdot (wb - \upsilon a) \right],$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{b^{2} - a^{2}} \cdot \left[(b\upsilon - wa) + \frac{1}{r^{2}} ab \cdot (wb - \upsilon a) \right],$$

$$\sigma_{r} = \frac{E}{(1 - v^{2}) \cdot (b^{2} - a^{2})} \cdot \left[(b\upsilon - wa) \cdot (1 + v) - \frac{1}{r^{2}} ab \cdot (wb - \upsilon a) \cdot (1 - v) \right],$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1 - v^{2}) \cdot (b^{2} - a^{2})} \cdot \left[(b\upsilon - wa) \cdot (1 + v) + \frac{1}{r^{2}} ab \cdot (wb - \upsilon a) \cdot (1 - v) \right].$$

Здесь ε_r , ε_θ , σ_r , σ_θ — соответственно радиальные и тангециальные деформации и напряжения.

Энергия элемента материала равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta),$$

тогда полная энергия деформаций трубы:

$$W_1 = L \int_{0}^{2\pi b} \int_{a}^{b} \Pi \cdot r dr d\theta = \frac{\pi E}{b^2 - a^2} \left[\frac{\left(b\upsilon - wa\right)^2}{1 - v} + \frac{\left(wb - \upsilon a\right)^2}{1 + v} \right] \cdot L.$$

(L - длина трубы).

В цилиндрической оболочке (покрытии) имеются только деформации $\varepsilon_{\theta} = \frac{v}{b}$, в упругости $\sigma_{\theta} = \frac{H}{1-\mu^2} \varepsilon_{\theta}$, $V^e = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{1-\mu^2} \varepsilon_{\theta}^2$. Тогда, используя равенства (1) и (2), находим: $\psi = 1 - 100 \cdot \varepsilon_{\theta} \sqrt{\frac{1}{2(1-\mu)}}$, $\sigma_{\theta} = \frac{H}{1-\mu^2} \varepsilon_{\theta} \cdot \left(1 - 100 \cdot \varepsilon_{\theta} \sqrt{\frac{1}{2(1-\mu)}}\right)$.

Struzhanov V. V. and Chaikin A. E. Determining the moment of destruction of protective coatings on pipes and spherical vessels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 3. – P. 6-18. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.006-018.



ISSN 2410-9908

Отсюда энергия покрытия:

$$W_{2} = 2\pi bt L \int_{0}^{\varepsilon_{\theta}} \sigma_{\theta} d\varepsilon_{\theta} = 2\pi bt L \cdot \frac{H}{1 - \mu^{2}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^{2}}{2} - \frac{100}{3} \cdot \varepsilon_{\theta}^{3} \sqrt{\frac{1}{2(1 - \mu)}} \right). \tag{3}$$

 $(2\pi btL - \text{объем покрытия}).$

Итак, лагранжиан системы есть сумма $W=W_1+W_2$, которая есть функция от неизвестного параметра состояния υ . Теперь, используя уравнение Лагранжа второго рода [12], получаем уравнение равновесия системы:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{2\pi E}{b^2 - a^2} \left[\frac{b(bv - wa)}{1 - v} - \frac{a(wb - va)}{1 + v} \right] L + 2\pi bt L \frac{H}{1 - \mu^2} \left(\frac{v}{b^2} - 100 \frac{v^2}{b^3} \sqrt{\frac{1}{2(1 - \mu)}} \right) = 0.$$
 (4)

Решая уравнение (4), находим зависимость w от v, т. е. функцию w = f(v).

После разрушения покрытия внешняя поверхность трубы уже свободна от действия внешних сил. Решим задачу Ляме с граничными условиями $u\big|_{r=a} = w, \ \sigma_r\big|_{r=b} = 0$. В результате находим связь между w и v:

$$w = k\nu, \ k = [(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2] \cdot (2ab)^{-1}.$$
 (5)

Решая уравнение f(v)=kv, находим значение $v=v^*$, которое определяет точку пересечения кривой f(v) и прямой (5). Эта точка A с координатами $(v^*, w^*=f(v^*))$ (рис. 1). Очевидно, что уже при $v>v^*$ положения равновесия системы определяются точками прямой (5) (рис. 1, npsmas 2). Следовательно, при $v>v^*$ покрытие разрушается. Отметим также, что на отрезке $0 \le v \le v^*$ имеем $\frac{dw}{dv} > 0$, т. е. имеет место монотонное возрастание функции w=f(v). Таким образом, деформирование идет равновесно вплоть до момента разрушения покрытия.

В качестве примера произведем вычисления при значениях t=1 мм, a=3 мм, b=10 мм, $E=0,16\cdot 10^5$ МПа, v=0,3 (свинец), $H=2\cdot 10^5$ МПа, $\mu=0,3$ (сталь). В результате получаем кривую w=f(v) (рис. 1, кривая I) и прямую w=kv (рис. 1, прямая I). Точка их пересечения имеет координаты ($v^*=0,237$ мм, $w^*=0,598$ мм). Так как кривая I на участке $0 \le v \le 0,23$ мм монотонно возрастает, то процесс деградации механических свойств покрытия происходит равновесно вплоть до разрушения в точке I (рис. 1).

ISSN 2410-9908

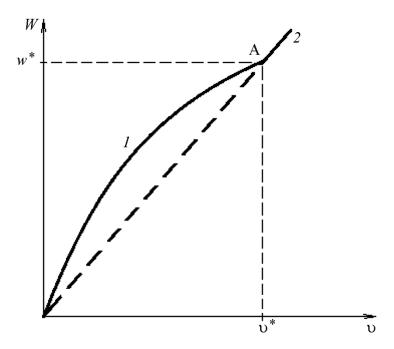


Рис. 1. Качественный вид кривой равновесных состояний (линия 1, переходящая в линию 2 после разрушения) при жестком нагружении системы

5. Разрушение покрытия трубы (мягкое нагружение)

Построим лагранжиан данной системы. Сначала найдем решение задачи Ляме с граничными условиями $u\big|_{r=b}=\upsilon,\ \sigma_r\big|_{r=a}=-p\ (p-$ внутреннее давление). Получаем:

$$\varepsilon_r = M - \frac{1}{r^2} N, \quad \varepsilon_\theta = M + \frac{1}{r^2} N;$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - v^2} \cdot \left[M(1 + v) - \frac{N}{r^2} (1 - v) \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - v^2} \cdot \left[M(1 + v) + \frac{N}{r^2} (1 - v) \right],$$

где

$$N = b^{2}AB, \ M = \left(\frac{\upsilon}{b} - AB\right),$$

$$A = \frac{a^{2}}{(1-\upsilon)b^{2} + a^{2}(1+\upsilon)}, \ B = \frac{pb(1-\upsilon^{2}) + E\upsilon(1+\upsilon)}{bE}.$$

Тогда энергия трубы

$$\Pi_{1} = L \int_{0}^{2\pi b} \int_{a}^{1} \frac{1}{2} \left(\sigma_{r} \varepsilon_{r} + \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} \right) r dr d\theta = L \cdot \frac{E\pi \left(b^{2} - a^{2} \right)}{1 - v^{2}} \left[M^{2} \left(1 + v \right) + \frac{1}{b^{2} a^{2}} N^{2} \left(1 - v \right) \right] = 0$$



ISSN 2410-9908

$$=\frac{LE\pi(b^2-a^2)}{1-v^2}\left[\frac{v^2}{b^2}(1+v)-\frac{a^2[pb(1-v^2)+Ev(1+v)]\cdot[vE(1+v)-pb(1-v^2)]}{[(1-v)b^2+a^2(1+v)]b^2E^2}\right].$$

В лагранжиан входит энергия покрытия, которая задана формулой (3), а также работа внешней силы, взятая со знаком минус [12], т. е.

$$\Pi_2 = -p \cdot 2\pi a Lu\Big|_{r=a}$$
.

Из решения задачи Ляме имеем:

$$u\big|_{r=a} = \left(\frac{\upsilon}{b} - AB\right)a - \frac{1}{a}b^2AB.$$

Итак лагранжиан системы равен $\Pi = \Pi_1 + W_2 + \Pi_2$. Тогда уравнение равновесия:

$$\frac{d\Pi}{d\upsilon} = \frac{LE\pi(b^2 - a^2)2\upsilon}{(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)} - 2\pi a Lp \left(\frac{a}{b} + \frac{a\upsilon(1 + \nu)(b^2 - a^2)}{[(1 - \nu)b^2 + a^2(1 + \nu)]b}\right) +
+ 2\pi bt L \frac{H}{1 - \mu^2} \left(\frac{\upsilon}{b} - 100\frac{v^2}{b^3}\sqrt{\frac{1}{2(1 - \mu)}}\right) = 0.$$
(6)

Из уравнения (6) получаем зависимость p от v (функцию $p = \varphi(v)$).

Теперь решаем задачу Ляме для трубы без покрытия с граничными условиями $\sigma_r|_{r=a}=-p,\ \sigma_r|_{r=b}=0.$ В результате получаем зависимость

$$p = h\nu$$
, $h = E(b^2 - a^2)(2a^2b)^{-1}$.

Решение $v=v^*$ уравнения $\varphi(v)=hv$ определяет точку с координатами $(v^*, p^*=\varphi(v^*))$ — точку пересечения кривой $\varphi(v)$ и прямой hv, после достижения которой уже точки прямой отвечают равновесным состояниям системы, т. е. трубы с разрушенным покрытием. В отличие от предыдущего случая в отрезке $0 \le v \le v^*$ кривая равновесных состояний системы

$$p = \varphi(v)$$
 имеет максимум при некотором значении $v \le v' \le v * \left(\frac{dp}{dv} \Big|_{v=v'} = 0 \right)$. Поэтому при по-

степенном возрастании параметра p при $p \ge p^*$ система имеет уже несколько возможных положений равновесия. Однако согласно принципу промедления [9], система сначала проходит положения равновесия, отвечающие точкам восходящей ветви функции $p = \varphi(v)$. После достижения значения $p' = \varphi(v')$ равновесие становится неустойчивым и малейшее возрастание параметра p приводит к скачкообразному переходу в новое устойчивое равновесие, которое отвечает некоторой точке прямой hv. Таким образом, имеет место скачкообразное (катастрофическое) разрушение покрытия.

Произведем вычисления при тех же значениях, что и в предыдущем пункте. Получаем кривую $p=\varphi(v)$ (рис. 2, *кривая 1*) и прямую p=hv (рис. 2, *прямая 2*). Точка их пересечения имеет координаты ($v^*=0,119$ мм, $p^*=950$ МПа). Максимальное значение p=p'=980 МПа (v'=0,105 мм). При увеличении p>p' система скачком переходит в новое устойчивое равновесие, отвечающее точке С прямой p=hv. Следовательно, реализуется катастрофическое разрушение покрытия.

ISSN 2410-9908

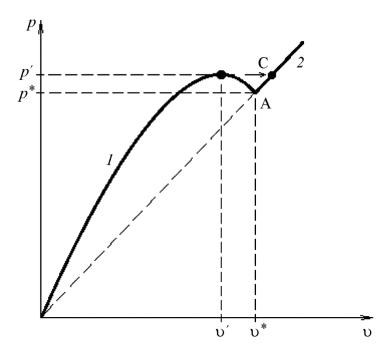


Рис. 2. Качественный вид кривой равновесных состояний (линия 1, переходящая в линию 2 после разрушения) при мягком нагружении системы

6. Разрушение покрытия сферического сосуда (жесткое нагружение)

Построим лагранжиан системы при задании точкам внутренней поверхности перемещения w. Он состоит из суммы энергий толстостенной сферы и покрытия. Сначала решим задачу Ляме для толстостенной сферы (центрально симметричная задача) [11] при граничных условиях $u\big|_{r=a} = w, \ u\big|_{r=b} = v \ (u-$ радиальное перемещение).

$$\begin{split} \varepsilon_{r} &= \frac{1}{b^{3} - a^{3}} \bigg[\left(\upsilon b^{2} - w a^{2} \right) - \frac{2}{r^{3}} b^{2} a^{2} \left(w b - \upsilon a \right) \bigg], \\ \varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{b^{3} - a^{3}} \bigg[\left(\upsilon b^{2} - w a^{2} \right) + \frac{1}{r^{3}} b^{2} a^{2} \left(w b - \upsilon a \right) \bigg], \\ \sigma_{r} &= \frac{E}{b^{3} - a^{3}} \bigg[\frac{\upsilon b^{2} - w a^{2}}{1 - 2v} - \frac{2b^{2} a^{2} \left(w b - \upsilon a \right)}{r^{3} \left(1 + v \right)} \bigg], \\ \sigma_{\theta} &= \sigma_{\varphi} = \frac{E}{b^{3} - a^{3}} \bigg[\frac{\upsilon b^{2} - w a^{2}}{1 - 2v} + \frac{b^{2} a^{2} \left(w b - \upsilon a \right)}{r^{3} \left(1 + v \right)} \bigg], \end{split}$$

энергия сферы равна

$$W_{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{b} \frac{1}{2} \left(\sigma_{r} \varepsilon_{r} + 2\sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} \right) \cdot r^{2} \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{2\pi E}{b^{3} - a^{3}} \left[\frac{\left(\upsilon b^{2} - w a^{2}\right)^{2}}{1 - 2\nu} + \frac{2ba(wb - \upsilon a)^{2}}{1 + \nu} \right].$$

Здесь ε_r , ε_{θ_i} , ε_{φ} – радиальные и тангенциальные деформации; σ_r , σ_{θ_i} σ_{φ} – радиальные и тангенциальные напряжения в толстостенной сфере.



ISSN 2410-9908

В сферической оболочке (покрытии) имеют место только деформации $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\varphi} = \frac{\upsilon}{b} = \varepsilon$ (равномерное двухосное растяжение). Тогда из формулы (2) находим: $\psi = 1 - 100\varepsilon\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}$. Отсюда $\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = \sigma = \left(1 - 100\varepsilon\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right)\frac{H}{1-\mu}\varepsilon$ (это следует из формулы (1)). Энергия элемента покрытия:

$$\frac{1}{2} \Big(\sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} + \sigma_{\varphi} \varepsilon_{\varphi} \Big) = \left(1 - 100 \varepsilon \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} \right) \frac{H \varepsilon}{1 - \mu} \varepsilon = \left(1 - 100 \frac{\upsilon}{b} \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} \right) \frac{H}{1 - \mu} \frac{\upsilon^{2}}{b^{2}}.$$

Общая энергия покрытия

$$V_{s} = 4\pi b^{2} t \left(1 - 100 \frac{\upsilon}{b} \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \right) \frac{H}{1-\mu} \frac{\upsilon^{2}}{b^{2}}, \tag{7}$$

 $(4\pi b^2 t$ – объем покрытия).

Таким образом, энергия всей системы $U=W_s+V_s$. Здесь w- параметр управления (задаваемая величина); v- параметр состояния (определяемая величина). Тогда имеем уравнение равновесия:

$$\frac{dU}{dv} = \frac{4\pi E}{b^3 - a^3} \left[\frac{(vb^2 - wa^2)b^2}{1 - 2v} - \frac{2ba^2(wb - va)}{1 + v} \right] + 4\pi t \frac{2Hv}{1 - \mu} \left(1 - \frac{150}{b} v \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} \right) = 0.$$
 (8)

Из уравнения (8) получаем связь между w и v в состоянии равновесия, т. е. функцию $w=\psi(v)$.

Теперь определим связь между w и v при отсутствии покрытия. Для этого решим задачу Ляме для сферы с условиями на границе $u\big|_{r=a}=w, \ \sigma_r\big|_{r=b}=0.$ В результате получаем зависимость

$$w = qv, \ q = [(1+v)b^3 + 2(1-2v)a^3] \cdot [3a^2b(1-v)]^{-1}.$$
(9)

Решение $v=v^*$ уравнения $\psi(v)=qv$ определяет $(v^*, w^*=\psi(v^*))$ – точку пересечения кривой $\psi(v)$ и прямой (9). Так как $\frac{dw}{dv}>0$ на отрезке $0\leq v\leq v^*$, то разрушение покрытия происходит после достижения параметром w значения w^* . До этого момента деформирование системы происходит равновесно. Численный расчет при тех же механических характеристиках материалов на стадии упругости, что и в предыдущих случаях, а также, считая t=1 мм, a=3 мм, b=10 мм, получаем $v^*=0.05$ мм, $w^*=0.34$ мм. Кривая равновесных состояний системы подобна кривой, изображенной на рис. 1.

7. Разрушение покрытия сферического сосуда (мягкое нагружение)

Снова строим лагранжиан системы, состоящий теперь из суммы энергий сферы, покрытия и работы, реализующих внутреннее давление внешних сил, взятой со знаком минус.

ISSN 2410-9908

Энергию деформаций сферы определяем, используя решение задачи Ляме для центрально симметричного деформирования толстостенной сферы при граничных условиях $u|_{r=b} = v$, $\sigma_r|_{r=a} = -p$. Имеем:

$$\varepsilon_{r} = \frac{1}{EM} \left((1 - 2\nu)N - \frac{2}{r^{3}} a^{3} b^{2} (1 + \nu)K \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{EM} \left((1 - 2\nu)N + \frac{1}{r^{3}} a^{3} b^{2} (1 + \nu)K \right),$$

$$\sigma_{r} = \frac{1}{M} \left(N - \frac{2}{r^{3}} a^{3} b^{2} K \right),$$

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = \frac{1}{M} \left(N + \frac{1}{r^{3}} a^{3} b^{2} K \right).$$

Здесь

$$M = a^{3}(1+\nu)+2b^{3}(1-2\nu),$$

$$N = 2E\nu b^{2} - pa^{3}(1+\nu),$$

$$K = pb(1-2\nu)+E\nu.$$

Теперь энергия деформаций сферы равна

$$W_s^p = 4\pi \frac{E}{M^2} (b^3 - a^3) \left[\frac{1}{2} (1 - 2\nu) N^2 + a^3 b (1 + \nu) K^2 \right].$$

Энергия внешних сил, взятая со знаком минус:

$$Q = -4\pi a^{2} p u \Big|_{r=a} = -4\pi a^{2} p \left(\varepsilon_{\theta} r\right)_{r=a} = -4\pi a^{2} p \frac{1}{EM} \left[a(1-2\nu)N + ab^{2}(1+\nu)K\right]$$

Таким образом полная энергия системы $U_p = W_s^p + V_s + Q$ и уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{dU_{p}}{dv} = \frac{8\pi E^{2}}{M^{2}} (b^{3} - a^{3}) [(1 - 2\nu)b^{2}N + a^{3}b(1 + \nu)K] - 12\pi (1 - \nu)p \frac{a^{3}b^{2}}{M} + 4\pi \frac{2H\nu}{1 - \mu} (1 - \frac{150}{b} \nu \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}}) = 0.$$
(10)

Из уравнения (10) находим связь между параметрами p и v в состоянии равновесия, т. е. функцию $p = \beta(v)$.



ISSN 2410-9908

Далее определяем связь между p и v при отсутствии покрытия. Для этого решаем задачу Ляме для сферы с граничными условиями $\sigma_r\big|_{r=a}=-p,\ \sigma_r\big|_{r=b}=0$. В результате получаем зависимость:

$$p = mv, \ m = 2E(b^3 - a^3)[3(1-v)ba^3]^{-1}.$$
 (11)

Решение $v=v^*$ уравнения $\beta(v)=mv$ определяет $(v^*, p^*=\beta(v^*))$ — точку пересечения кривой $\beta(v)$ и прямой (11). После этой точки исходящая из нее прямая (11) отвечает уже равновесным состояниям сферы с разрушенным покрытием. На участке $0 \le v \le v^*$ кривая равновесных состояний системы $p=\beta(v)$ имеет максимум при некотором значении $v=v'< v^*$. Поэтому при постепенном возрастании параметра p при $p>p^*$ система имеет уже несколько положений равновесия. Согласно принципу промедления [9] система сначала проходит положения равновесия, отвечающие точкам восходящей ветви функции $p=\beta(v)$. При достижении значения $p=p'=\beta(v')$ происходит скачкообразный переход в новое устойчивое положение равновесия, которое отвечает некоторой точке прямой mv. В результате реализуется динамическое разрушение покрытия.

Численный расчет для приведенных выше данных дает координаты точки пересечения кривой $p=\beta(v)$ и прямой (11) $v^*=0.049$ мм; $p^*=270$ МПа. Максимальное значение внутреннего давления, при котором реализуется скачкообразное разрушение покрытия, равно p'=283 МПа (v'=0.04 мм). Качественный вид кривой равновесных состояний подобен кривой, изображенной на рис. 2.

8. Заключение

Сформулирована задача о разрушении защитных покрытий труб и сферических сосудов. Покрытия выполнены из разупрочняющихся материалов. На основе использования методов математической теории катастроф произведен расчет предельных параметров нагружения, при которых происходит разрушение покрытий.

Литература

- 1. Evaluation of the Axial Stresses of a Gas Pipeline Made of Reinforced Polyethylene Pipes under Conditions of Permafrost Soils / Yu. Yu. Fedorov, S. N. Popov, A. V. Savvina, S. V. Vasilyev, A. K. Rodionov // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2017. Iss. 3. P. 36–41. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.3.036-041. URL: http://dreamjournal.org/issues/2017-3/2017-3_122.html (assessed: 22.03.2018).
- 2. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург : УрО РАН, 1995. 190 с.
- 3. Andrasic C. P., Parker A. P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings // Engng. Fract. Mech. 1984. Vol. 19. P. 187–193.
- 4. Shannon R. W. E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders // Int. J. Pres. Ves. and Piping. 1974. Vol. 2. P. 19–29.
- 5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / пер. с англ. М.: Наука, 1969. 420 с.
- 6. Коркин А. В., Стружанов В. В., Чайкин А. Е. Об устойчивости равномерного растяжения диска с центральной зоной из разупрочняющегося материала // Математическое моделирование и краевые задачи, Самара, 27–30 мая, 2019 : материалы 11 Всероссийской научной конференции с международным участием. Том 1. Самара : СамГТУ, 2019. С. 64–69.
- 7. Стружанов В. В., Коркин А. В., Чайкин А. Е. Об одном подходе к определению предельной несущей способности механических систем с разупрочняющимися элементами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. —С. 762—773. DOI: 10.14498/vsgtu1624.



ISSN 2410-9908

- http://dream-journal.org
- 8. Стружанов В. В. Определение диаграммы деформирования с падающей ветвью по диаграмме кручения цилиндрического образца // Сибирский журнал индустриальной математики. -2012. -T. XV, № 1 (49). -C. 138-144.
- 9. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / пер. с англ. М. : Мир, 1980.-608~c.
- 10. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 350 с.
- 11. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М. : Наука, 1979. 560 с.
- 12. Парс Л. Аналитическая динамика / пер. c англ. M.: Hayka, 1971. 636 c.

DREAN http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 03.08.2018 **Revised:** 07.05.2020 **Accepted:** 19.06.2020

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.019-028

DETERMINATION OF HYDROGEN-INDUCED DAMAGE BY AN ACOUSTIC METHOD

V. V. Mishakin^{a)}*, A. V. Gonchar^{b)}, A. V. Poroshkov, N. V. Semenova

Mechanical Engineering Research Institute – Branch of the Federal Research Center Institute of Applied Physics of the RAS, 85 Belinskogo St., Nizhny Novgorod, 603024, Russian Federation

a) **(D)** https://orcid.org/0000-0002-4329-7938 **(S)** imndt31@mts-nn.ru; b) **(D)** https://orcid.org/0000-0001-9408-4206

*Corresponding author. E-mail: imndt31@mts-nn.ru Address for correspondence: 85 Belinskogo St., Nizhny Novgorod, 603024, Russia

The 13HFA corrosion- and cold-resistant steel is studied by an ultrasonic method after hydrogen absorption for 96, 192, and 288 hours. Within the framework of classical flaw detection, it was found that the formation of macrodefects occurs only at 288 hours of hydrogen absorption. In the study of the material by the spectral-acoustic method, it was found that, during hydrogen absorption for 96 and 192 hours, the signal spectrum changes. This indicates the formation of microdefects. It is shown that the determination of the damage by the conventional ultrasonic flaw detection method and the use of the spectral-acoustic method for the evaluation of fracture at the microlevel give more complete information on the state of the investigated alloys.

Keywords: hydrogen absorption, hydrogen-induced damage, acoustic method, spectral-acoustic method, attenuation.

Acknowledgment

The study was performed under the state assignment for IAP RAS, theme No. 0035-2014-0402.

References

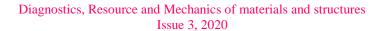
- 1. Melnikov A.V., Misharin D.A., Bogdanov R.I., Ryakhovsky I.V. Justification of the health of gas pipelines with stress corrosion cracking defects. *Korroziya Territorii Neftegaz*, 2015, vol. 31, no. 2, pp. 32–40. (In Russian).
- 2. Brondel D., Edwards R., Hayman A., Hill D., Mehta S., Semerad T. Corrosion in the oil industry. *Oilfield Review*, 1994, vol. 6, no. 2, pp. 4–18.
- 3. Gafarov N.A., Mitrofanov A.V., Goncharov A.A., Tret'yak A.Ya., Kichenko B.V. The analysis of the equipment and pipeline damages in extracting processing and .transportation in Orenburg Oil and Gas Plant. *IRTs Gazprom. Ser. Diag. Oborud. i Trubopr.*, 2000, pp. 1–40. (In Russian).
- 4. Krдgeloh J., Wolfgang B. Einfluss der Eigenspannung auf die Sauergasbestondigkeit Hoch Frequenz Induktiv geschweiЯter Rohre unter Berьcksichtigung prozessspezifischer Einflussfaktoren, Shaker, 2009, 164 p.
- 5. NACE TM0284-2011, Evaluation of Pipeline and Pressure Vessel Steels for Resistance to Hydrogen-induced Cracking, NACE International, Houston, TX, 2011.
- 6. Truell R., Elbaum C., Chick B.B. *Ultrasonic Methods in Solid State Physics*, Academic Press, New York and London, 1969.

DREAM http://dream-inurnal.or

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

- 7. Klyuev V.V., ed., *Nerazrushayushchiy control*: Spravochnik v 7 t. [Nondestructive testing. A Handbook in 7 Vols.]. Moscow, Mashinostroenie, 2004.
- 8. Adler L., Rose J. H., and Mobley C. Ultrasonic method to determine gas porosity in aluminum alloy castings: Theory and experiment. *J. Appl. Phys.*, 1986, vol. 59, iss. 2, pp. 336–347. DOI: 10.1063/1.336689.
- 9. Mishakin V.V., Naumov M.Y., Mishakin S.V., Kassina N.V. *Russian Journal of Nonde-structive Testing*, 2007, vol. 43, pp. 677–682. DOI: 10.1134/S1061830907100075.
- 10. Rose J.H. Ultrasonic characterization of porosity: Theory. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, vol. 4B, D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds., Plenum, New York, 1985, p. 909.





ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 03.08.2018 УДК 620.179.(147+162)

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.019-028

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ ВОДОРОДОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В. В. Мишакин $^{a)*}$, А. В. Гончар $^{6)}$, А. В. Порошков, Н. В. Семенова

Институт проблем машиностроения РАН — филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН», 85, Белинского, г. Нижний Новгород, Россия.

a) 10 https://orcid.org/0000-0002-4329-7938 (20 imndt31@mts-nn.ru; 6) 10 https://orcid.org/0000-0001-9408-4206

*Ответственный автор. Электронная почта: imndt31@mts-nn.ru; Адрес для переписки: ул. Белинского, 85, 603024, г. Нижний Новгород, Российская Федерация

Проведено исследование ультразвуковым методом коррозионностойкой и хладостойкой стали 13ХФА после наводороживания 96 ч, 192 ч и 288 ч. В рамках классической дефектоскопии установлено, что образование макродефектов происходит только при максимальном времени наводороживания (288 ч). При исследовании материала спектрально-акустическим методом установлено, что в образцах, обработанных сероводородом 96 ч и 192 ч, устойчиво регистристрируется изменение спектра сигнала, что свидетельствует об образовании микродефектов.

Показано, что определение поврежденности традиционным методом ультразвуковой дефектоскопии и использование спектрально-акустического метода для оценки разрушения на микроуровне дает более полную информацию о состояниях исследуемых сплавов.

Ключевые слова: наводороживание, индуцированная водородом поврежденность, акустический метод, спектрально-акустический метод, затухание.

1. Введение

Поврежденность, индуцированная водородом, — один из основных факторов разрушения магистральных трубопроводов [1–3]. Низкий энергетический барьер для проникновения атома водорода в подповерхностную зону Fe, высокая подвижность водорода в α -железе (1×10-4cм2c-1), по сравнению с углеродом и азотом (1×10-16cм2c-1) [4], приводит к быстрому увеличению его концентрации, объединению в молекулы в ловушках, в качестве которых могут быть, например, строчечные включения. Высокое давление, создаваемое после объединения атомов водорода, приводит к локальному разрушению материала.

Существует методика оценки склонности металла к водородному растрескиванию с помощью ультразвукового контроля [5]. Расчет поврежденности по этой методике заключается в сравнении суммарной площади несплошностей, образованных в результате водородного повреждения, с общей исследуемой площадью. Определение такого вида повреждений относится к методу традиционной ультразвуковой дефектоскопии, т. е. поиску отражений сигналов от макродефектов и нахождению по этим отражениям эффективных размеров и координат залегания дефектов. Такой подход не охватывает дефекты, которые имеют размеры, близкие к длине волны, или существенно меньшие размеры (длинноволновое приближение).

Существует значительное количество работ о том, что затухание ультразвука используется для определения структурного состояния в длинноволновом приближении, например:



ISSN 2410-9908

оценка характеристик дислокационной структуры (модель Гранато-Люка) [6], диаметра зерна [7], поврежденности, связанной с пористостью материала [8] и др.

Ранние исследования показали, что использование таких акустических характеристик, как параметр акустической анизотропии и частотно-зависимого затухания, позволяет оценить величину накопленной поврежденности металлических сплавов на ранней стадии разрушения при статическом и циклическом деформировании [9].

Во многих поликристаллических материалах все вышеперечисленные факторы присутствуют одновременно. Описание материала с такой системой дефектов, в том числе математическое описание, представляет значительные трудности.

Индуцированная водородом поврежденность имеет ряд особенностей по сравнению с поврежденностью, полученной в результате силового нагружения. Существенного изменения геометрии объектов при поврежденности водородом не происходит. Внедрение атомов водорода в материал не может привести к заметному изменению характеристик кристаллографической текстуры, повышению плотности дислокаций. В основном, объединение в молекулы в ловушках, высокое давление, создаваемое после объединения атомов водорода, образование гидридов приводят к локальному разрушению, появлению микропор и микротрещин, а при дальнейшем наводороживании — к появлению макродефектов — расслоений.

Ослабление живого сечения за счет образования несплошностей широко используется для расчета прочности и долговечности материалов. Оценочные расчеты размеров дефектов и их концентрации неразрушающими методами контроля более полно определяют состояния материалов силовых элементов конструкций.

При использовании контактных пьезоэлектрических преобразователей (ПЭП) затухание связано с дифракционными потерями, рассеянием на элементах структуры, поглощением, определяемым вязкостью материала, рассеянием на внутренних и внешних поверхностях при вводе и приеме УЗ-волн, потерей в контактном слое, потерей части энергии в ПЭП.

С учетом дифракционных потерь и затухания в материале амплитуду сигнала A, прошедшего расстояние X, при условии, что расстояние X больше размера ближней зоны, можно записать как [7]:

$$A = A_0 * 2 \left| \sin \frac{\pi a^2}{2\lambda X} \right| e^{-X\alpha_{\tilde{n}\tilde{o}\tilde{o}}}, \tag{1}$$

где $\alpha_{\text{стр.}}$ — затухание, связанное со структурой материала; A_0 — амплитуда сигнала при X=0; λ — ллина волны.

Измеряя амплитуду первого A_1 и второго A_2 отраженных сигналов при использовании эхо импульсного метода из уравнения (1), получим:

$$\alpha_{\tilde{n}\tilde{o}\tilde{o}.}(\omega) = \frac{1}{X_2 - X_1} \left(\ln \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)} - \ln \left(\sin \left(\frac{a^2 \omega}{V X_1} \right) / \sin \left(\frac{a^2 \omega}{V X_2} \right) \right) \right), \tag{2}$$

где ω – циклическая частота; V – скорость упругих волн; X_1 и X_2 длина акустического пути первого и второго отраженных сигналов соответственно.

Затухание $\alpha_{\text{стр.}}$ связанно как с рассеянием $\alpha_{\text{рас.}}$, так и поглощением $\alpha_{\textit{noгл.}}$ УЗ в материале.

ISSN 2410-9908

$$\alpha_{cmp.} = \alpha_{pac.} + \alpha_{\text{погл.}}$$
 (3)

В поликристаллических материалах $\alpha(\omega)_{pac.} \gg \alpha(\omega)_{nozn.}$ [7]. Учитывая это, можно для изменения затухания записать:

$$\Delta \alpha \approx \Delta \alpha(\omega)_{pac.} \tag{4}$$

Разделяют затухание, связанное с рассеянием на границах зерен и порах [10]:

$$\alpha_{\text{pac.}} = \alpha_p + \alpha_g,$$
 (5)

где α_p — затухание на порах ($\alpha_p \sim f^2$); α_g — затухание на границах зерен ($\alpha_g \sim f^4$).

При исследовании использовали длинноволновое приближение, когда длина волны λ больше диаметра зерна или поры.

Для спектра сигнала *S* получим:

$$S = S_0 * 2 \left| \sin \frac{\pi a^2}{2\lambda X} \right|,\tag{6}$$

где S_0 – амплитудно-частотный спектр сигнала при X = 0.

Как видно из выражений, на спектр сигнала существенное влияние оказывает величина X.

Составляющую затухания α_p можно определить, не вводя поправки на потери, связанные с дифракцией, например измеряя амплитуду первого отраженного сигнала до и после появления водородоиндуцированной поврежденности.

Образование водородоиндуцированной поврежденности не приводит к существенным изменениям длины акустического пути X и, следовательно, не приводит к изменению дифракционных потерь. В этом случае изменение затухания в зонах материала, где длина волны существенно больше размерных характеристик элементов структуры, связано в основном с образованием и накоплением микропор, микротрещин.

Для материала с рассеянием на границах зерен и материала с рассеянием упругих волн на границах и порах с учетом дифракционной поправки можно записать:

$$\frac{A_g}{A_0} = 2 \left| \sin \frac{\pi a^2}{2\lambda X_n} \right| \exp\left[X_n(-\alpha_g) \right]; \tag{7}$$

$$\frac{A_{pg}}{A_0} = 2 \left| Sin \frac{\pi a^2}{2\lambda X_n} \right| \exp\left[X_n (-\alpha_g - \alpha_p) \right], \tag{8}$$

где A_g и A_{pg} — амплитуды сигналов при отражениях на границах зерен (не обработанный образец) и на границах зерен и порах (образцы после обработки) соответственно, X_n — длина акустического пути n-ого отраженного сигнала.

Исходя из выражений (7, 8), составляющую затухания α_p можно определить как:



ISSN 2410-9908

$$\alpha_p(k, X_n) = \frac{1}{X_n} \ln \left[\frac{A_g(k, X_n)}{A_{pg}(k, X_n)} \right], \tag{9}$$

где $k = \omega/V = 2\pi f/V = 2\pi/\lambda$ — волновое число; f — частота; λ — длина волны.

Амплитудно-частотный спектр сигналов, прошедших материал без повреждений $A_{g}(k,X_{n})$ и материал после обработки $A_{pg}(k,X_{n})$, позволяет определить частотно зависимое затухание, связанное с образованием микронесплошностей при водородоиндуцированной поврежденности.

Объемное содержание пор C определяется согласно [8] как:

$$C = \frac{4}{3} \left[\alpha_p(k) \mathbf{a}_p / \tilde{A}(k \mathbf{a}_p) \right], \tag{10}$$

$$\Gamma(ka_p) = \beta(\eta)k^4 a_p^4, \tag{11}$$

где η — отношение скорости распространения поперечной к продольной волне; a_p — радиус пор.

Для слабо легированных сталей, например для стали 13ХФА, $\eta = 0.53$. Для исследуемого материала при $\eta = 0.53 - \beta(\eta) \approx 2.1$ [8].

На частотно зависимое затухание влияет весь спектр микродефектов. Определение функции распределения дефектов по размерам только по частотно-зависимому затуханию невозможно. Однако на основе спектрально-акустических измерений можно предложить оценочную характеристику, отражающую рост объемного содержания микронесплошностей.

Предполагая, что наибольшее влияние на затухание оказывают поры, размеры которых приближаются к длине волны $d=2a_p\approx \frac{\lambda}{2}$, принимая во внимание, что скорость продольной волны $V\approx 6000$ м/с, и, учитывая зависимости (10) и (11), получим:

$$C \approx 0.03 * \alpha_p^{\text{max}} \lambda , \qquad (12)$$

где α_p^{max} – максимальное значение затухания, определяемое по кривой частотно-зависимого затухания.

2. Методика

Образцы для исследования индуцированной водородом поврежденности были изготовлены из стали $13X\Phi A$, которая используется для производства нефтегазопроводных труб повышенной коррозионной стойкости и хладостойкости. Плоскопараллельные образцы прямоугольного сечения размерами $70\times30\times11$ вырезанные из одного темплета, подвергались воздействию сероводорода в растворе по методике приведенной [5]. Один образец не подвергался воздействию сероводорода. Три образца находились в растворе 96, 192 и 288 ч соответственно.

Для измерения акустических параметров использовалась портативная акустическая установка, состоящая из генератора зондирующих сигналов, высокочастотного усилителя, цифрового осциллографа PC SCOPE 1000VS и ПК. Используемый метод — эхо-импульсный. Применялся высокочувствительный ультразвуковой пьезоэлектрический преобразователь V110 Olympus продольных упругих волн: центральная частота ~ 5 МГц, диаметр преобразо-

ISSN 2410-9908

вателя ~ 6 мм. Рабочая область частот находится в диапазоне от 3 МГц до 9 МГц. Регистрировалась амплитудно-временная диаграмма первого и второго отраженных сигналов. Погрешность измерения времени распространения УВ — около 2—3 нс. Длительность ультразвуковых эхо-импульсов продольных волн — около 0,8 мкс. Погрешность измерения затухания — $1\ \mathrm{Hn/m}$.

Поиск дефектов производился ультразвуковым датчиком продольных волн фирмы Kraut Kramer с центральной частотой $10~\text{M}\Gamma$ ц. Размер выявляемых дефектов — 1~мм и более.

На рис. 1 показана схема проведения ультразвуковых исследований. Образец условно был разделен на 8 зон, в которых проводились ультразвуковые исследования.

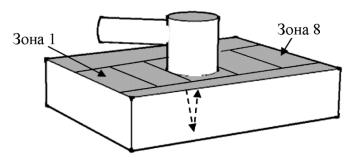


Рис. 1. Схема проведения ультразвуковых исследований

Изменения скорости распространения упругих продольных волн V выше погрешности ее измерения при наводороживании зарегистрировано не было. Для продольной волны она составляла около 5930 м/с. Значение $A_{\rm g}(k,X_{\rm n})$ определялось путем выделения второго отраженного сигнала на образце, не подверженном водородному повреждению, а $A_{\rm pg}(k,X_{\rm n})$ — на образцах с водородным повреждением и последующим Фурье преобразованием сигнала для определения зависимости амплитуды от частоты.

Расчет объемного содержания пор проводился следующим образом. Строили зависимость $\alpha_p(f)$ по формуле (9), определяли максимальные значения затухания α_p^{\max} и соответствующую максимальному затуханию частоту, исходя из которой рассчитывали длину волны и по формуле (11) рассчитывали величину объемного содержания пор.

3. Результаты и обсуждение

В результате исследования образцов были выявлены зоны, в которых наблюдались отражения от отдельных макродефектов (размеры дефектов d больше длины волны λ , условно $d>\lambda$, $\lambda=1,0$ мм) и зоны, в которых отражения от отдельных дефектов не наблюдались ($d<\lambda$), но затухание существенно изменилось. При наводороживании 96 и 192 ч макродефекты практически не образуются. При наводороживании 288 ч происходит интенсивное образование дефектов. Площадь, занимаемая дефектами S, выявляемая ультразвуковым методом, резко увеличивается (рис. 2).

DREAM http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

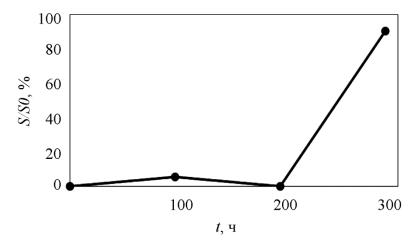


Рис. 2. Площадь, занимаемая дефектами, относительно общей площади исследования S0 в зависимости от времени наводораживания t

Наличие микро- и макродефектов подтверждено металлографическими исследованиями микрошлифов торцевой поверхности образцов в продольном направлении. На рис. 2 представлены поры и трещины, вызванные водородным насыщением. Выявленные микродефекты имели как округлую, так и вытянутую форму (рис. 3 a). Дефекты, достигшие больших размеров, имели вытянутую форму (рис. 3 δ).

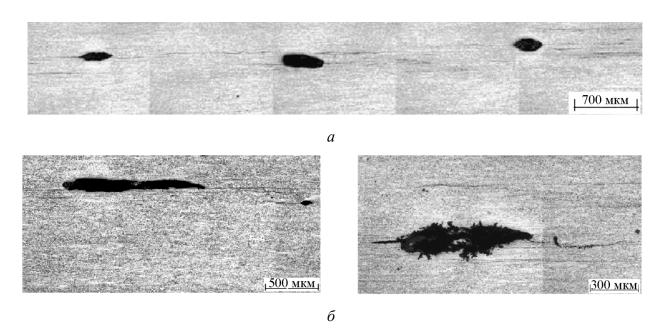


Рис. 3. Дефекты, образовавшиеся в результате наводороживания образцов (288 ч)

На рис. 4 представлено частотно-зависимое затухание $\alpha_p(f)$ для трех образцов с разным временем наводораживания. Затухание рассчитывалось по формуле (9) в зонах, в которых не наблюдались отражения от макродефектов.

ISSN 2410-9908

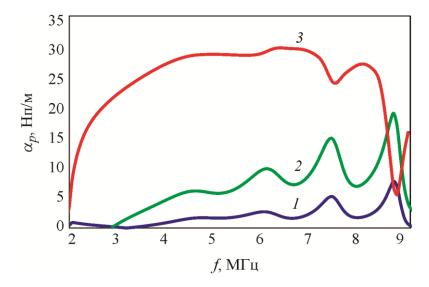


Рис. 4. Зависимость затухания $\alpha_{_{p}}$ от частоты: I-96 ч; 2-192 ч; 3-288 ч.

Из графика видно, что для образца, обработанного 96 ч, максимальное значение затухания α_p составило 6,7 Нп/м на частоте 8,9 МГц, для образца, обработанного 192 ч — 17 Нп/м на частоте 8,7 МГц, для 288 ч — 30 Нп/м на частоте 6,5 МГц.

По формуле (11) используя данные, представленные на рис. 3, можно оценить объемное содержания пор C в зависимости от времени наводороживания (рис. 5).

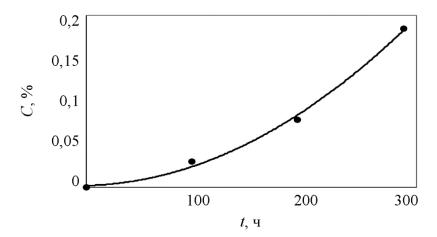


Рис. 5. Зависимость объемного содержания пор C от времени наводороживания

Согласно рис.2, при времени обработки 96 и 192 ч отражений от отдельных макродефектов практически не наблюдается. При спектрально-акустических измерениях в зонах, где не обнаружены макродефекты, исследование показало заметное изменение затухания ультразвука и наличие роста объемного содержания пор.

Для более корректного определения состояния материала уровень его разрушения необходимо осуществлять на микро- и макроуровне.

Можно сказать, что приближение значения параметра C к величине 0.08 % служит индикатором массового появления макродефектов, существенно влияющих на прочность и живучесть материала конструкции.

DREAM http://dream-journal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

4. Выводы

Существующая методика ультразвукового контроля поврежденного водородом материала не в полной мере характеризует процесс разрушения сплавов. Такой подход не охватывает дефекты, которые существенно влияют на прочностные характеристики и имеют размеры, меньшие (длинноволновое приближение) или близкие к длине волны.

На примере стали 13XФA, широко используемой для изготовления нефтегазопроводных труб, приведен алгоритм оценки состояния материала на микро- и на макроуровне.

Показано, что определение поврежденности традиционным методом ультразвуковой дефектоскопии и использование спектрально-акустического метода для оценки разрушения на микроуровне дает более полную информацию о состоянии исследуемых сплавов.

Благодарность

Исследование выполнено в рамках государственного задания по теме N 0035-2014-0402 ИПФ РАН.

Литература

- 1. Обоснование работоспособности магистральных газопроводов с дефектами коррозионного растрескивания под напряжением / А. В. Мельникова, Д. А. Мишарин, Р. И. Богданов, И. В. Ряховский // Коррозия территории нефтегаз. 2015. Т. 31, № 2. С. 32–40.
- 2. Corrosion in the oil industry / D. Brondel, R. Edwards, A. Hayman, D. Hill, S. Mehta, T. Semerad // Oilfield Review. 1994. Vol. 6, no. 2. P. 4–18.
- 3. Анализ повреждений оборудования и трубопроводов на объектах добычи, переработки и транспорта продукции Оренбургского НГКМ / Н. А. Гафаров, А. В. Митрофанов, А. А. Гончаров, А. Я. Третьяк, Б. В. Киченко // ИРЦ Газпром. Серия: диагностика оборудования и трубопроводов. 2000. С. 1–40.
- 4. Krдgeloh J., Wolfgang B. Einfluss der Eigenspannung auf die Sauergasbestдndigkeit Hoch Frequenz Induktiv geschweiЯter Rohre unter Berьcksichtigung prozessspezifischer Einflussfaktoren. Shaker, 2009. 164 p.
- 5. NACE TM0284-2011. Evaluation of Pipeline and Pressure Vessel Steels for Resistance to Hydrogen-induced Cracking. NACE International, Houston, TX, 2011.
- 6. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / пер. с англ. М. : Мир, 1972.
- 7. Неразрушающий контроль : в 7 т. / под ред. В. В. Клюева. М. : Машиностроение, 2004. 736 р.
- 8. Laszlo Adler, Rose James H., Mobley Carroll J. Ultrasonic method to determine gas porosity in aluminum alloy castings: Theory and experiment // Appl. Phys. 1986. Vol. 59, no. 2. P. 335–347. DOI: 10.1063/1.336689.
- 9. Mishakin V. V., Naumov M. Y., Mishakin S. V., Kassina N. V. Russian Journal of Nondestructive Testing. 2007. Vol. 43. P. 677–682. DOI: 10.1134/S1061830907100075.
- 10. Rose J. H. Ultrasonic characterization of porosity: Theory // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Vol. 4B / ed. by D. O. Thompson and D. E. Chimenti. New York : Plenum, 1985. P. 909.

DREAN http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 30.04.2020 **Revised:** 01.06.2020 **Accepted:** 19.06.2020

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046

ISOTHERMAL LAYERED FLOWS OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITH SPATIAL ACCELERATION IN THE CASE OF THREE CORIOLIS PARAMETERS

N. V. Burmasheva^{a)}*, E. Yu. Prosviryakov^{b)}

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

*Corresponding author. E-mail: nat_burm@mail.ru Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

We study the solvability of the overdetermined system of Navier-Stokes equations, supplemented by the incompressibility equation, which is used to describe isothermal large-scale shear flows of a rotating viscous incompressible fluid. Large-scale flows are studied in a thin-layer approximation (the vertical velocity of the fluid is assumed to be zero). The rotation of a continuous fluid medium is described by three Coriolis parameters. The solution of the reduced system of Navier-Stokes equations is constructed in the Lin-Sidorov-Aristov class. In this case, both nonzero components of the velocity vector, the pressure and temperature fields are assumed to be full linear forms of two Cartesian coordinates, and the dependence on the third Cartesian coordinate has an arbitrary form (including non-polynomial). It is shown that the nonlinear overdetermined system of Navier-Stokes equations and of the incompressibility equation in the framework of the Lin-Sidorov-Aristov class reduces to the equivalent nonlinear overdetermined system of ordinary differential equations, in which the components of the hydrodynamic fields act as unknown functions. The compatibility condition for the equations of the resulting system is derived. It is shown that, if this compatibility condition is fulfilled, the system has a unique solution, and the spatial accelerations in both variables (the linearity with respect to them was postulated when choosing the solution class) prove to be constant functions. These results are a generalization of similar results obtained earlier in the study of solvability in the cases of one and two Coriolis parameters.

Keywords: exact solution, shear flow, Coriolis parameter, solvability, Navier–Stokes equation, overdetermined system, large-scale flow.

References

- 1. Monin A.S. Theoretical Foundations of Geophysical Hydrodynamics. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1988. (In Russian).
- 2. Brekhovskikh L., Goncharov V. Mechanics of Continua and Wave Dynamics, transl. from Rusian, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985. DOI: 10.1007/978-3-642-96861-7.
- 3. Zyryanov V.N. Theory of steady ocean currents, Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1985. (in Russian).
- 4. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1987.
- 5. Gill A.E. Atmosphere-ocean dynamics, Cambridge, University of Cambridge, 1982.
- 6. Ekman V.W. On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents. Ark. Mat. Astron. Fys., 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52.



ISSN 2410-9908

- 7. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. Convective Stability of Incompressible Fluids, Jerusalem, Keter Publishing House, 1976.
- 8. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid mechanics*, Oxford, Pergamon Press, 1987.
- 9. Temam R. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ., 1977.
- 10. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Kazenin D.A., Vyazmin A.V. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, Boca Raton, CRC Press, 2001.
- 11. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
- 12. Guermond, J.L., Migeon C., Pineau G., Quartapel L. Start—up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at Re = 1000. J. Fluid Mech., 2002, vol. 450, pp. 169–199. DOI: 10.1017/S0022112001006383.
- 13. Neto C., Evans D., Bonaccurso E., Butt H.-J., Craig V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, vol. 68, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
- 14. Aristov S.N., Frik P.G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large–scale eddies in shallow water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194. DOI: 10.1007/BF00858033.
- 15. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer*, Perm, Perm State Univ. Publ., 2006. (In Russian).
- 16. Aristov S.N., Shvarts K.G. Vikhrevye techeniia v tonkikh sloiakh zhidkosti [*Vortical Flows in Thin Fluid Layers*]. Kirov, Vyatka State Univ. Publ., 2011. (In Russian).
- 17. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Ekman convective layer flow of a viscous incompressible fluid. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no 2, pp. 189–195. DOI: 10.1134/S0001433818020081.
- 18. Kompaniets L., Pitalskaya O. Exact solutions of Ekmans model for three-dimensional wind-induced flow of homogeneous fluid with geostrophic current. *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, pp. 57–66. DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-1-57-66. (In Russian).
- 19. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
- 20. Shrira V.I., Almelah R.B. Upper-ocean Ekman current dynamics: a new perspective. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 887, A24. DOI: 10.1017/jfm.2019.1059.
- 21. Fečkan M., Guan Y., O'Regan D., Wang J.R. Existence and uniqueness and first order approximation of solutions to atmospheric Ekman flows. *Monatshefte für Mathematik*, 2020. DOI: 10.1007/s00605-020-01414-7.
- 22. Ortiz-Tarin J.L., Lee S., Flores O., Sarkar S. Global modes and large-scale structures in an Ekman boundary layer. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1522, 012011. DOI: 10.1088/1742-6596/1522/1/012011.
- 23. Constantin A., Johnson R.S. Atmospheric Ekman flows with variable eddy viscosity. *Boundary-Layer Meteorol*, 2019, vol. 170, pp. 395–414. DOI: 10.1007/s10546-018-0404-0.
- 24. Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
- 25. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2., pp. 79–87. (In Russian).
- 26. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State*



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

University. Series Mathematics, 2020, vol. 32, pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).

- 27. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
- 28. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Large–scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
- 29. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Russian Journal of Nonline-ar Dynamics*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
- 30. Prosviryakov E.Y. Exact Solutions for three-dimensional potential and vorticity Couette flows of an incompressible viscous fluid. *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 501–506 DOI: 10.1134/S2304487X15060127. (In Russian).
- 31. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
- 32. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
- 33. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *VESTNIK SAMARSKOGO GOSUDARSTVENNOGO TEKHNICHESKOGO UNI-VERSITETA-SERIYA-FIZIKO-MATEMATICHESKIYE NAUKI*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527. (In Russian).
- 34. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and presure field investigation. *VESTNIK SAMARSKOGO GOSUDARSTVENNOGO TEKHNICH-ESKOGO UNIVERSITETA-SERIYA-FIZIKO-MATEMATICHESKIYE NAUKI*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751 DOI: 10.14498/vsgtu1568. (In Russian).
- 35. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 32–41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41. (In Russian).
- 36. Vereshchagin V.P., Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Description of a helical motion of an incompressible nonviscous fluid. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, pp. 202–210. DOI: 10.1134/S0081543815020212.
- 37. Vereshchagin V.P., Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Some solutions of continuum equations for an incompressible viscous medium. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 287, pp. 208–223. DOI: 10.1134/S008154381409020X.
- 38. Vereshchagin V.P., Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible nonviscous continuous medium. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 159–174. DOI: 10.1134/S008154381402014X.
- 39. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for the layered three-dimensional non-stationary isobaric flows of viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6 (358), pp. 65–71. DOI: 10.15372/PMTF201. (In Russian).
- 40. Pukhnachev V.V. Point vortex in a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 345–351. DOI: 10.1134/S0021894414020175.
- 41. Birikh R.V., Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 173–179. DOI: 10.1134/S0015462815010172.
- 42. Golubkin V.N., Sizykh G.B. Maximum principle for the Bernoulli function. *TsAGI Science Journal*, 2015, vol. 46, no. 5, pp. 485–490. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.v46.i5.50.

DREAM http://dream-journal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

- 43. Sizykh G.B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid. *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 44–50. DOI: 10.3103/S1066369X19020063.
- 44. Sizykh G.B. The splitting of Navier–Stokes equations for a class of axisymmetric flows. *VESTNIK SAMARSKOGO GOSUDARSTVENNOGO TEKHNICHESKOGO UNIVERSITETA-SERIYA-FIZIKO-MATEMATICHESKIYE NAUKI*, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 163–173. DOI: 10.14498/vsgtu1740. (In Russian).
- 45. Markov V.V., Sizykh G.B. Exact solutions of the Euler equations for some two-dimensional incompressible flows. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 294, no. 1, pp. 283–290. DOI: 10.1134/S0081543816060195.
- 46. Ershkov S.V., Shamin R.V., Giniyatullina A.R. On a new type of non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations. *Journal of King Saud University Science*, 2020, vol. 32, no. 1, pp. 459–467. DOI: 10.1016/j.jksus.2018.07.006.
- 47. Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu., Sizykh G.B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities. *Trudy MFTI*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88. (In Russian).
- 48. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
- 49. Ul'yanov O. N. A class of viscous fluid flows. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2003, suppl. 2, S173–S181.
- 50. Pukhnachev V.V. Nonlinear diffusion and exact solutions to the Navier-Stokes equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 61–69.
- 51. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *VESTNIK SAMARSKOGO GOSUDARSTVENNOGO TEKHNICHESKOGO UNIVERSITETA-SERIYA-FIZIKO-MATEMATICHESKIYE NAUKI*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
- 52. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
- 53. Aristov S.N., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167–178. (In Russian).
- 54. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, 2nd ed., Boca Raton: Chapman& Hall/CRC, 2003.





ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 30.04.2020

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕХ ПАРАМЕТРОВ КОРИОЛИСА

Н. В. Бурмашева $^{a)}*$, Е. Ю. Просвиряков $^{6)}$

Институт машиноведения УрО РАН, 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация

*Ответственный автор. Электронная почта: nat_burm@mail.ru Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

Исследуется вопрос разрешимости переопределенной системы уравнений Навье-Стокса, дополненной уравнением несжимаемости, используемой для описания изотермических крупномасштабных сдвиговых течений вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Крупномасштабные течения изучаются в приближении тонкого слоя (вертикальная скорость жидкости полагается равной нулю). Вращение сплошной жидкой среды описывается тремя параметрами Кориолиса. Решение редуцированной системы уравнений Навье-Стокса строится в классе Линя-Сидорова-Аристова. При этом обе ненулевые компоненты вектора скорости, поля давления и температуры полагаются полными линейными формами двух декартовых координат, а зависимость от третьей декартовой координаты имеет произвольный вид (в том числе и неполиномиальный). Нелинейная переопределенная система уравнений Навье-Стокса и уравнения несжимаемости в рамках класса Линя-Сидорова-Аристова сводится к эквивалентной нелинейной переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой в качестве неизвестных функций выступают компоненты гидродинамических полей. Выведено условие совместности уравнений полученной системы. Показано, что если условие совместности выполняется, то система имеет единственное решение, причем пространственные ускорения по обеим переменным, линейность относительно которых постулировалась при выборе класса решений, оказываются постоянными функциями. Результаты являются обобщением аналогичных результатов, полученных ранее при исследовании разрешимости в случаях одного и двух параметров Кориолиса.

Ключевые слова: точное решение, сдвиговое течение, параметр Кориолиса, разрешимость, уравнение Навье–Стокса, переопределенная система, крупномасштабное течение.

1. Введение

При описании движения вращающихся жидкостей традиционно используется приближение, согласно которому сила инерции характеризуется только одним параметром Кориолиса [1–5]. Этого подхода придерживался Экман [6] при описании вращающегося океана бесконечной глубины. Одним из обоснований служили характерные значения горизонтальных скоростей в геофизической гидродинамике значительно превышают соответствующие значения вертикальной проекции вектора скорости течения [1, 3–5]. Классическое крупномасштабное течение Экмана является изотермическим. Горизонтальные проекции поля скорости определялись из системы уравнений Навье—Стокса [7–10], дополненной уравнением несжимаемости. Экман, полагая скорости относящимися к классу течений типа Куэтта [11], построил нетривиальное решение описанной системы.



ISSN 2410-9908

Однако предположение об однородности распределения компонент поля скорости не всегда отвечает данным натурных экспериментов [12, 13].

Точное решение Экмана многократно обобщалось [1, 4, 14–24]. Достаточно часто при этом возникали ситуации, в которых определяющая система уравнений оказывалась переопределенной. Было построено решение для скоростей наиболее общего вида в рамках класса Линя—Сидорова—Аристова при учете одного ненулевого параметра Кориолиса в работе [25]. При удовлетворении определенному алгебраическому условию переопределенная редуцированная система уравнений движения вращающейся жидкости оказывается разрешимой. Аналогичное условие было получено в работе [26], но для случая, когда сила инерции описывается двумя ненулевыми параметрами Кориолиса. В работе предпринята попытка интегрирования системы уравнений Навье—Стокса в случае, когда все три проекции вектора угловой скорости вращения отличны от нуля.

2. Постановка задачи

Рассмотрим локальную (неинерционную) систему координат Oxyz, соответствующую рассматриваемой области течения жидкости. Пусть эта система вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\Omega = \frac{1}{2} \Big(f_3, f_2, f_1 \Big)$. Параметры $f_1 = 2\Omega \cos \varphi_1, \quad f_2 = 2\Omega \cos \varphi_2, \quad f_3 = 2\Omega \cos \varphi_3$ называются параметрами Кориолиса, где Ω — величина угловой скорости вращения, $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ — углы между вектором Ω и положительными направлениями координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно [1–5]. В качестве такой области может выступать, например, некоторая часть Мирового океана, а в качестве оси вращения — Земная ось. Будем полагать, что компоненты f_1, f_2, f_3 вектора угловой скорости не зависят от времени. Это допущение оправдано тем, что несмотря на влияние колебания оси вращения Земли на динамику крупномасштабных течений Мирового океана, оно оказывается достаточно мало, чтобы можно было им пренебречь [3].

Введем в рассмотрение редуцированное давление

$$P = \left[p - \rho ((\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}), (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})) / 2 - \rho g \right] / \rho = p / \rho - ((\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}), (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})) / 2 - g ,$$

вычтя из реального давления p центробежную составляющую $\rho((\Omega \times r), (\Omega \times r))/2$ и силу тяжести и разделив получившуюся разность на плотность жидкости ρ . В этом случае уравнение Навье–Стокса (уравнение сохранения количества) движения и уравнение несжимаемости принимает вид [3]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$
 (1)

В уравнении (1) приняты обозначения: $V = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор скорости движения, $V = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ — оператор Гамильтона, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа. Отметим, что ускорение Кориолиса $2\mathbf{\Omega} \times V$ в системе уравнений (1) зависит от величины проекций вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на координатные оси:

ISSN 2410-9908

$$2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_3 & f_2 & f_1 \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (f_2 V_z - f_1 V_y, f_1 V_x - f_3 V_z, f_3 V_y - f_2 V_x).$$

В случае установившихся крупномасштабных сдвиговых ($V_z = 0$) течений проекции уравнения (1) на координатные оси запишем в следующем виде:

$$\left(V_{x}\frac{\partial}{\partial x}+V_{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)V_{x}-f_{1}V_{y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)V_{x};$$
(2)

$$\left(V_{x}\frac{\partial}{\partial x}+V_{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)V_{y}+f_{1}V_{x}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)V_{y};$$
(3)

$$f_3V_y - f_2V_x = -\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$
 (4)

Система (2)—(4) является переопределенной, поскольку для нахождения двух скоростей и модифицированного давления имеется четыре уравнения. Разрешимость системы уравнений будем исследовать в классе точных решений Линя—Сидорова—Аристова.

Рассмотрим далее следующий класс точных решений [25-32]:

$$V_{x} = U(z) + u_{1}(z)x + u_{2}(z)y, V_{y} = V(z) + v_{1}(z)x + v_{2}(z)y;$$

$$P = P_{0}(z) + P_{1}(z)x + P_{2}(z)y + P_{12}(z)xy + P_{11}(z)\frac{x^{2}}{2} + P_{22}(z)\frac{y^{2}}{2}.$$
(5)

Подставим класс (5) в систему (2)–(4). В результате получим следующие соотношения:

$$\left(\left(U + u_1 x + u_2 y \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(V + v_1 x + v_2 y \right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(U + u_1 x + u_2 y \right) - f_1 \left(V + v_1 x + v_2 y \right) =$$

$$= -\frac{\partial \left(P_0 + P_1 x + P_2 y + P_{12} x y + P_{11} \frac{x^2}{2} + P_{22} \frac{y^2}{2} \right)}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(U + u_1 x + u_2 y \right);$$

$$\left(\left(U + u_1 x + u_2 y \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(V + v_1 x + v_2 y \right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(V + v_1 x + v_2 y \right) + f_1 \left(U + u_1 x + u_2 y \right) =$$
(6)

$$= -\frac{\partial \left(P_0 + P_1 x + P_2 y + P_{12} x y + P_{11} \frac{x^2}{2} + P_{22} \frac{y^2}{2}\right)}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(V + v_1 x + v_2 y\right); \tag{7}$$

ISSN 2410-9908

$$f_{3}(V + v_{1}x + v_{2}y) - f_{2}(U + u_{1}x + u_{2}y) = -\frac{\partial\left(P_{0} + P_{1}x + P_{2}y + P_{12}xy + P_{11}\frac{x^{2}}{2} + P_{22}\frac{y^{2}}{2}\right)}{\partial z}.$$
(8)

Вычислим соответствующие частные производные в уравнениях (6)–(8), в результате чего уравнения примут более простой вид:

$$(U + u_1 x + u_2 y) u_1 + (V + v_1 x + v_2 y) u_2 - f_1 (V + v_1 x + v_2 y) =$$

$$= -(P_1 + P_{12} y + P_{11} x) + v (U "+ u_1 " x + u_2 " y);$$
(9)

$$(U + u_1 x + u_2 y)v_1 + (V + v_1 x + v_2 y)v_2 + f_1(U + u_1 x + u_2 y) =$$

$$= -(P_2 + P_{12} x + P_{22} y) + v(V "+ v_1 " x + v_2 " y);$$
(10)

$$f_{3}(V + v_{1}x + v_{2}y) - f_{2}(U + u_{1}x + u_{2}y) = -\left(P_{0}' + P_{1}'x + P_{2}'y + P_{12}'xy + P_{11}'\frac{x^{2}}{2} + P_{22}'\frac{y^{2}}{2}\right). \tag{11}$$

Воспользуемся далее принципом неопределенных коэффициентов и приравняем в уравнениях (9)—(11) выражения при независимых переменных x, y. Получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, производная в которых берется по переменной z. Сгруппируем эти уравнения следующим образом:

$$P_{11}' = 0, P_{12}' = 0, P_{22}' = 0;$$
 (12)

$$vu_1'' = u_1^2 + (u_2 - f_1)v_1 + P_{11};$$

$$vu_{2} = u_{1}u_{2} + (u_{2} - f_{1})v_{2} + P_{12};$$

$$vv_{1} = u_{1}(v_{1} + f_{1}) + v_{1}v_{2} + P_{12};$$
(13)

$$vv_2$$
" = $u_2(v_1 + f_1) + v_2^2 + P_{22}$;

$$P_{1}' = f_{2}u_{1} - f_{3}v_{1};$$

$$P_{2}' = f_{2}u_{2} - f_{3}v_{2};$$
(14)

$$vU'' = Uu_1 + V(u_2 - f_1) + P_1;$$

$$vV'' = U(v_1 + f_1) + Vv_2 + P_2;$$
(15)



ISSN 2410-9908

$$P_0' = f_2 U - f_3 V. (16)$$

Подставим аналогичным образом линейные формы (5) в уравнение несжимаемости:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$$
.

После вычисления соответствующих частных производных придем к следующему условию:

$$u_1 + v_2 = 0. (17)$$

Перепишем далее систему уравнений (12)–(16) с учетом соотношения (17), в результате элементарных алгебраических преобразований получим:

$$P_{11}' = 0; P_{12}' = 0;, P_{22}' = 0;$$
 (18)

$$vu_{1} = u_{1}^{2} + (u_{2} - f_{1})v_{1} + P_{11};$$

$$vu_{2} = f_{1}u_{1} + P_{12};$$

$$vv_{1} = f_{1}u_{1} + P_{12};$$
(19)

$$-vu_1'' = u_1^2 + u_2(v_1 + f_1) + P_{22};$$

$$P_{1}' = f_{2}u_{1} - f_{3}v_{1};$$

$$P_{2}' = f_{2}u_{2} - f_{3}(-u_{1}) = f_{3}u_{1} + f_{2}u_{2};$$
(20)

$$vU'' = Uu_1 + V(u_2 - f_1) + P_1;$$

$$vV'' = U(v_1 + f_1) - Vu_1 + P_2;$$
(21)

$$P_0' = f_2 U - f_3 V. (22)$$

Из уравнения (18) непосредственно следует, что коэффициенты при квадратичных слагаемых поля давления (5) являются постоянными величинами:

$$P_{ii} = \text{const}(i, j = 1, 2).$$

Оставшиеся уравнения (подсистемы (19)–(22)) образуют переопределенную нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку число соотношений в ней превосходит число неизвестных функций. Причем, если в подсистемах (20)–(22) число уравнений совпадает с числом неизвестных, то в подсистеме (19) число неизвестных меньше



ISSN 2410-9908

числа уравнений. Таким образом, если удастся найти совместное решение уравнений (19), то система (18)–(22) перестанет быть переопределенной.

Заметим, что проблема переопределенности подсистемы (19) имеет место, если только рассматривается полный класс вида (5), т. е. когда обе ненулевые компоненты вектора скорости линейны одновременно по двум горизонтальным координатам. В частном случае класса (5), когда вектор скорости описывается только однородными компонентами

$$V_{x} = U, \ V_{y} = V, \tag{23}$$

подсистема (19) сводится к условиям $P_{ij} = 0$ (i, j = 1, 2), что не противоречит подсистеме (18). Структура поля скоростей вида (23) рассмотрена, например, в работах [33–41]. При этом поле скоростей вида (23) может описывать только вертикально незавихренные течения вязкой несжимаемой жидкости.

Для описания вертикально завихренных жидкостей можно использовать другой частный случай класса (5) — случай, когда поле скоростей имеет, например, следующий вид:

$$V_{x} = U + u_{2}y, V_{y} = V. (24)$$

Течения вязкой жидкости в рамках класса вида (24) начали изучаться в работах [42–53].

3. Анализ переопределенной подсистемы

Решение уравнений (19) не зависит от второго и третьего параметров Кориолиса. Точно такая же система для определения пространственных ускорений u_1, u_2, v_1, v_2 при постоянных квадратичных неоднородностях P_{ij} давления жидкости была получена и подробно исследована [25,26]. В работах [25,26] было показано, что система (19) разрешима, если существует вещественное число c, являющееся корнем следующего квадратного уравнения:

$$c^{2}f_{1}^{2} + 2cf_{1}^{3} - P_{11}^{2} - 4P_{12}^{2} - 2f_{1}^{2}(P_{11} - P_{22}) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^{2} = 0.$$
(25)

В этом случае пространственные ускорения u_1, u_2, v_1, v_2 описываются точным решением, которое не зависит от поперечной координаты z:

$$u_{1} = -\frac{P_{12}}{f_{1}}; \ u_{2} = \frac{P_{11} - P_{22} - f_{1}c}{2f_{1}}; \ v_{1} = \frac{P_{11} - P_{22} + f_{1}c}{2f_{1}}; \ v_{2} = \frac{P_{12}}{f_{1}}.$$
 (26)

В зависимости от значения дискриминанта квадратного уравнения (25), определяющего значение параметра c, выражения (26) могут описывать как единственное решение, так и серию из двух решений.

Далее определим вид оставшихся коэффициентов форм (5). Для этого необходимо проинтегрировать систему уравнений (20)–(22). Начнем с системы (20). С учетом выражений (25) правая часть обоих уравнений подсистемы (20) является постоянной функцией. При однократном интегрировании такой функции по переменной z получим линейную функцию этой переменной:

$$P_1 = \alpha_1 z + p_1; \ P_2 = \alpha_2 z + p_2,$$
 (27)

ISSN 2410-9908

где $\alpha_1 = f_2 u_1 - f_3 v_1$; $\alpha_2 = f_3 u_1 + f_2 u_2$; а p_1 è p_2 — постоянные интегрирования. Зная точные решения (27) для градиентов P_1 и P_2 поля давления (5), можем найти однородные слагаемые U и V поля скорости. Для этого проанализируем структуру системы (21).

Уравнения (21) есть система обыкновенных дифференциальных неоднородных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами и известной линейной неоднородностью. В общем случае уравнения (21) связаны друг с другом, т.е. нельзя проинтегрировать одно из уравнений этой системы независимо от другого уравнения. Однако при некоторых значениях коэффициентов u_1, u_2, v_1 , по крайней мере, одно из этих уравнений может становиться изолированным. Другими словами, вид решения системы (21) зависит от величины этих параметров. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $v_1 + f_1 = 0$, тогда второе уравнение системы (21) примет более простой вид:

$$vV'' + u_1V = P_2 {28}$$

В уравнении (28) в роли неизвестного выступает только скорость V, следовательно, решение этого уравнения может быть найдено независимо от значения скорости U. Компонента U определяется из первого уравнения системы (21). При этом вид решения уравнения (28) зависит от значения пространственного ускорения u_1 .

1.1. Если $u_1 = 0$, то однородные компоненты U и V скоростей V_x и V_y соответственно и фоновое давление P_0 описываются полиномиальными формулами:

$$\begin{split} V &= \frac{\alpha_2}{6 \nu} z^3 + \frac{p_2}{2 \nu} z^2 + C_2 z + C_1; \\ U &= \frac{\left(u_2 - f_1\right) \alpha_2}{120 \nu^2} z^5 + \frac{p_2 \left(u_2 - f_1\right)}{24 \nu^2} z^4 + \frac{\left(C_2 \left(u_2 - f_1\right) + \alpha_1\right)}{6 \nu} z^3 + \frac{\left(C_1 \left(u_2 - f_1\right) + p_1\right)}{2 \nu} z^2 + C_4 z + C_3; \\ P_0 &= \frac{f_2 \alpha_2 \left(u_2 - f_1\right)}{720 \nu^2} z^6 + \frac{f_2 p_2 \left(u_2 - f_1\right)}{120 \nu^2} z^5 + \frac{f_2 \left(C_2 \left(u_2 - f_1\right) + \alpha_1\right) - f_3 \alpha_2}{24 \nu} z^4 + \\ &+ \frac{f_2 \left(C_1 \left(u_2 - f_1\right) + p_1\right) - f_3 p_2}{6 \nu} z^3 + \frac{C_4 f_2 - C_2 f_3}{2} z^2 + \left(C_3 f_2 - C_1 f_3\right) z + C_5, \end{split}$$

здесь C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – постоянные интегрирования.

1.2. Если $u_1 > 0$, то гидродинамические поля описываются тригонометрическими и квазиполиномиальными выражениями:

1.3.

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz);$$

$$U = -\frac{\alpha_2 (u_2 - f_1) + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{p_2 (u_2 - f_1) + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1 (u_2 - f_1)}{2u_1} \sin(kz) - \frac{C_2 (u_2 - f_1)}{2u_1} \cos(kz) + C_3 \exp(-kz) + C_3 \exp(kz);$$

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 3. – P. 29-46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.



ISSN 2410-9908

$$P_{0} = -\frac{f_{3}\alpha_{2}u_{1} + f_{2}\left(\left(u_{2} - f_{1}\right)\alpha_{2} + \alpha_{1}u_{1}\right)}{2u_{1}^{2}}z^{2} - \frac{f_{3}p_{2}u_{1} + f_{2}\left(\left(u_{2} - f_{1}\right)p_{2} + p_{1}u_{1}\right)}{u_{1}^{2}}z + C_{5} - \frac{C_{2}\left(2f_{3}u_{1} + f_{2}\left(u_{2} - f_{1}\right)\right)}{2ku_{1}}\sin(kz) + \frac{C_{1}\left(2f_{3}u_{1} + f_{2}\left(u_{2} - f_{1}\right)\right)}{2ku_{1}}\cos(kz) - \frac{C_{3}f_{2}}{k}\exp(-kz) + \frac{C_{4}f_{2}}{k}\exp(kz).$$

Здесь введено обозначение для параметра $k = \sqrt{\frac{u_1}{v}}$.

1.4. Если $u_1 < 0$, то получим следующий вид фоновых скоростей и фонового давления [54]:

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sinh(kz) + C_2 \cosh(kz);$$

$$U = -\frac{(u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{(u_2 - f_1)p_2 + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1(u_2 - f_1)}{2u_1} \sinh(kz) - \frac{C_2(u_2 - f_1)}{2u_1} \cosh(kz) + C_3 \sin(kz) + C_3 \cos(kz);$$

$$P_0 = -\frac{f_3 \alpha_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1)}{2u_1^2} z^2 - \frac{f_3 p_2 u_1 + f_2((u_2 - f_1)p_2 + u_1 p_1)}{u_1^2} z + C_5 - \frac{C_2(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \sinh(kz) - \frac{C_1(2f_3 u_1 + f_2(u_2 - f_1))}{2ku_1} \cosh(kz),$$

где $k = \sqrt{\frac{\left(-u_1\right)}{v}}$.

2. Пусть теперь $v_1 + f_1 \neq 0$. В этом случае из первого уравнения системы (21) можем выразить скорость U :

$$U = \frac{vV'' + u_1V - P_2}{v_1 + f_1} \,. \tag{29}$$

В результате подстановки выражения (29) во второе уравнение подсистемы (21) получим следующее линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами для определения скорости V:

$$V^{(4)} + S \cdot V = \frac{P_1(v_1 + f_1) - u_1 P_2}{v^2}, \tag{30}$$

где $S = -\frac{u_1^2 + (u_2 - f_1)(v_1 + f_1)}{v^2}$. Величина коэффициента S влияет на структуру решения неоднородного уравнения (30).

ISSN 2410-9908

2.1. Если S=0, то получим представление компонент поля скорости и поля давления:

$$\begin{split} V &= \frac{\alpha_1 \left(v_1 + f_1 \right) - u_1 \alpha_2}{120 v^2} z^5 + \frac{p_1 \left(v_1 + f_1 \right) - u_1 p_2}{24 v^2} z^4 + C_4 z^3 + C_3 z^2 + C_2 z + C_1 \,; \\ U &= \frac{u_1 \left(\alpha_1 \left(f_1 + v_1 \right) - \alpha_2 u_1 \right)}{120 v^2 \left(f_1 + v_1 \right)} z^5 + \frac{u_1 \left(p_1 \left(f_1 + v_1 \right) - p_2 u_1 \right)}{24 v^2 \left(f_1 + v_1 \right)} z^4 + \frac{6 v C_4 u_1 + \alpha_1 \left(f_1 + v_1 \right) - \alpha_2 u_1}{6 v \left(f_1 + v_1 \right)} z^3 + \\ &+ \frac{2 v C_3 u_1 + p_1 \left(f_1 + v_1 \right) - p_2 u_1}{2 v \left(f_1 + v_1 \right)} z \wedge 2 + \frac{\left(6 v C_4 + C_2 u_1 - \alpha_2 \right)}{f_1 + v_1} z + \frac{2 v C_3 - p_2 + C_1 u_1}{f_1 + v_1} \,; \\ P_0 &= -\frac{\left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right) \left(f_1 \alpha_1 + v_1 \alpha_1 - u_1 \alpha_2 \right)}{720 v^2 \left(f_1 + v_1 \right)} z^6 - \frac{\left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right) \left(f_1 p_1 - p_2 u_1 + p_1 v_1 \right)}{120 v^2 \left(f_1 + v_1 \right)} z^5 + \\ &+ \frac{-6 v C_4 \left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right) + f_2 \left(f_1 \alpha_1 + v_1 \alpha_1 - u_1 \alpha_2 \right)}{24 v \left(f_1 + v_1 \right)} z^4 + \\ &+ \frac{-2 v C_3 \left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right) + f_2 \left(f_1 p_1 - p_2 u_1 + p_1 v_1 \right)}{6 v \left(f_1 + v_1 \right)} z^3 - \\ &- \frac{-6 v C_4 f_2 + C_2 \left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right) + f_2 \alpha_2}{2 \left(f_1 + v_1 \right)} z^2 - \frac{-2 v C_3 f_2 + f_2 p_2 + C_1 \left(f_1 f_3 - f_2 u_1 + f_3 v_1 \right)}{f_1 + v_1} z + C_5 \,, \end{split}$$

Здесь C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5 – постоянные интегрирования).

2.2. Если S > 0, то имеем другое точное решение для описания скоростей и давления [54]:

$$\begin{split} V &= C_1 \cosh(kz) \cos(kz) + C_2 \cosh(kz) \sin(kz) + C_3 \sinh(kz) \cos(kz) + C_4 \sinh(kz) \sin(kz) + \\ &+ \frac{\alpha_1 \left(v_1 + f_1\right) - u_1 \alpha_2}{Sv^2} z + \frac{p_1 \left(v_1 + f_1\right) - u_1 p_2}{Sv^2} ; \\ U &= \frac{\left(2k^2 v C_4 + C_1 u_1\right)}{f_1 + v_1} \cosh(kz) \cos(kz) + \frac{\left(-2k^2 v C_3 + C_2 u_1\right)}{f_1 + v_1} \cosh(kz) \sin(kz) + \\ &+ \frac{\left(2k^2 v C_2 + C_3 u_1\right)}{f_1 + v_1} \sinh(kz) \cos(kz) + \frac{\left(-2k^2 v C_1 + C_4 u_1\right)}{f_1 + v_1} \sinh(kz) \sin(kz) + \\ &+ \frac{f_1 u_1 \alpha_1 + u_1 v_1 \alpha_1 - Sv^2 \alpha_2 - u_1^2 \alpha_2}{Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z + \frac{-Sv^2 p_2 + f_1 p_1 u_1 - p_2 u_1^2 + p_1 u_1 v_1}{Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} ; \\ P_0 &= \frac{C_3 \left(f_2 \left(2k^2 v + u_1\right) - f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right) + C_2 \left(f_2 \left(2k^2 v - u_1\right) + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)}{2k \left(f_1 + v_1\right)} \cosh(kz) \cos(kz) + \\ \end{split}$$

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 3. – P. 29-46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.



ISSN 2410-9908

$$+\frac{C_{4}\left(f_{2}\left(2k^{2}v+u_{1}\right)-f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)-C_{1}\left(f_{2}\left(2k^{2}v-u_{1}\right)+f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)}{2k\left(f_{1}+v_{1}\right)}\cosh\left(kz\right)\sin\left(kz\right)+\\+\frac{C_{1}\left(f_{2}\left(2k^{2}v+u_{1}\right)-f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)+C_{4}\left(f_{2}\left(2k^{2}v-u_{1}\right)+f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)}{2k\left(f_{1}+v_{1}\right)}\sinh\left(kz\right)\cos\left(kz\right)+\\+\frac{C_{2}\left(f_{2}\left(2k^{2}v+u_{1}\right)-f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)-C_{3}\left(f_{2}\left(2k^{2}v-u_{1}\right)+f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)}{2k\left(f_{1}+v_{1}\right)}\sinh\left(kz\right)\sin\left(kz\right)+\\+\frac{-\left(f_{1}+v_{1}\right)\left(-f_{2}u_{1}+f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)\alpha_{1}+\left(-f_{2}\left(Sv^{2}+u_{1}^{2}\right)+f_{3}u_{1}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)\alpha_{2}}{2Sv^{2}\left(f_{1}+v_{1}\right)}z^{2}-\\-\frac{Sv^{2}f_{2}p_{2}+\left(-f_{2}u_{1}+f_{3}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)\left(-p_{2}u_{1}+p_{1}\left(f_{1}+v_{1}\right)\right)}{Sv^{2}\left(f_{1}+v_{1}\right)}+C_{5}.$$

здесь $k^4 = S/4$.

2.3. Если S < 0, то в заключительном случае получим следующие формулы для вычисления компонент скоростей и давления [54]:

$$\begin{split} V &= C_1 \cos \left(kz\right) + C_2 \sin \left(kz\right) + C_3 \cosh \left(kz\right) + C_4 \sinh \left(kz\right) + \\ &+ \frac{\alpha_1 \left(v_1 + f_1\right) - u_1 \alpha_2}{Sv^2} z + \frac{p_1 \left(v_1 + f_1\right) - u_1 p_2}{Sv^2} ; \\ U &= \frac{C_1 \left(u_1 - k^2 v\right)}{f_1 + v_1} \cos \left(kz\right) + \frac{C_2 \left(u_1 - k^2 v\right)}{f_1 + v_1} \sin \left(kz\right) + \frac{C_3 \left(u_1 + k^2 v\right)}{f_1 + v_1} \cosh \left(kz\right) + \frac{C_4 \left(u_1 + k^2 v\right)}{f_1 + v_1} \sinh \left(kz\right) + \\ &+ \frac{u_1 \left(\left(f_1 + v_1\right)\alpha_1 - u_1\alpha_2\right) - Sv^2\alpha_2}{Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z + \frac{u_1 \left(-p_2 u_1 + p_1 \left(f_1 + v_1\right)\right) - Sv^2p_2}{Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} ; \\ P_0 &= \frac{C_4 \left(f_2 \left(k^2 v + u_1\right) - f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)}{k \left(f_1 + v_1\right)} \cosh \left(kz\right) + \frac{C_3 \left(f_2 \left(k^2 v + u_1\right) - f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)}{k \left(f_1 + v_1\right)} \sinh \left(kz\right) + \\ &+ \frac{C_2 \left(f_2 \left(k^2 v - u_1\right) + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)}{k \left(f_1 + v_1\right)} \cos \left(kz\right) - \frac{C_1 \left(f_2 \left(k^2 v - u_1\right) + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)}{k \left(f_1 + v_1\right)} \sin \left(kz\right) + \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1^2\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1^2\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1^2\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1^2\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1^2\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_2 u_1 + f_3 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\alpha_1 + \left(-f_2 \left(Sv^2 + u_1\right) + f_3 u_1 \left(f_1 + v_1\right)\right)\alpha_2}{2Sv^2 \left(f_1 + v_1\right)} z^2 - \\ &+ \frac{-\left(f_1 + v_1\right) \left(-f_1 u_1 + f_2 u_1 + f_2$$



ISSN 2410-9908

$$-\frac{Sv^2f_2p_2+\left(-f_2u_1+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)\left(-p_2u_1+p_1\left(f_1+v_1\right)\right)}{Sv^2\left(f_1+v_1\right)}z+C_5.$$

Таким образом, если существует вещественный корень c уравнения (25), то переопределенная система (19) имеет совместное решение (26). На основании решения (26), согласно формулам (27), определяется вид градиентов давления P_1 и P_2 . С помощью этих выражений и решения для пространственных ускорений (26) находятся однородные скорости U и V и фоновое давление P_0 , которые в зависимости от значений параметров задачи определяются формулами, приведенными в рамках случаев 1.1–2.3. Набор указанных функций есть совместное точное (аналитическое) решение переопределенной нелинейной системы дифференциальных уравнений (18)–(22).

Заметим, что для сдвиговых течений третий параметр Кориолиса f_3 играет роль только при определении структуры фонового давления P_0 . Если положить $f_3=0$, придем к случаю двух параметров Кориолиса, подробно исследованному в [26]. Случай одного параметра Кориолиса [25] получается, если дополнительно приравнять нулю и величину f_2 . Таким образом, построенное в данной статье решение обобщает ранее полученные результаты.

4. Заключение

В статье получено условие совместности редуцированной системы, описывающей неоднородное сдвиговое течение вращающейся вязкой изотермической жидкости в случае, когда сила инерции в уравнениях Навье—Стокса характеризуется тремя параметрами Кориолиса. Показано, что пространственные ускорения поля скорости при этом являются постоянными функциями. Также построено точное решение для поля давления и однородных компонент поля скорости. Приведенное решение является обобщением исследований по анализу переопределенных систем, описывающих изотермическое вращение жидкости в случаях одного и двух ненулевых параметров Кориолиса.

Литература

- 1. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л. : Гидрометеоиздат, 1988.
- 2. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / отв. ред. Г. И. Баренблатт. М.: Наука, 1982.
- 3. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1985.
- 4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: в 2 т. М.: Мир, 1984.
- 5. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
- 6. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents // Ark. Mat. Astron. Fys. 1905. Vol. 2, no. 11. P. 1–52.
- 7. Гершуни Г. 3., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1972.
- 8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 6-е. изд. М. : Физматлит, 2006.
- 9. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М. : Изд-во «Мир», 1981.
- 10. Химическая гидродинамика / А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин. М. : Квантум, 1996.

http://dream-journal.org

- 11. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. 1890. Vol. 21. P. 433–510.
- 12. Start–up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at Re = 1000 / J. L. Guermond, C. Migeon, G. Pineau, L. Quartapel // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 450. P. 169–199. DOI: 10.1017/S0022112001006383.
- 13. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccurso, H.-J. Butt, V.S.J. Craig // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. P. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
- 14. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large-scale eddies in shallow water // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1991. Vol. 32, no. 2. P. 189–194. DOI: 10.1007/BF00858033.
- 15. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь : Изд-во Пермск. гос. ун-та, 2006.
- 16. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров : ВятГУ, 2011.
- 17. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. -2018.-T.54, вып. 2.-C.213-220.-DOI: 10.7868/S0003351518020101.
- 18. Компаниец Л. А., Питальская О. С. Точные решения модели Экмана трехмерного ветрового движения однородной жидкости с учетом геострофической составляющей // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1, вып. 1. С. 57–66. DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-1-57-66.
- 19. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственный переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, вып. 5. С. 547–566.
- 20. Shrira V. I., Almelah R. B. Upper-ocean Ekman current dynamics: a new perspective // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 887. A24. DOI: 10.1017/jfm.2019.1059.
- 21. Existence and uniqueness and first order approximation of solutions to atmospheric Ekman flows / M. Fečkan, Y. Guan, D. O'Regan, J. R. Wang // Monatshefte für Mathematik. -2020.-DOI: 10.1007/s00605-020-01414-7.
- 22. Global modes and large-scale structures in an Ekman boundary layer / J. L. Ortiz-Tarin, S. Lee, O. Flores, S. Sarkar // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1522. –012011. DOI:10.1088/1742-6596/1522/1/012011.
- 23. Constantin A., Johnson R. S. Atmospheric Ekman flows with variable eddy viscosity // Boundary-Layer Meteorol. 2019. Vol. 170. P. 395–414. DOI: 10.1007/s10546-018-0404-0.
- 24. Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье—Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теоретические основы химической технологии. 2019. Т. 53, вып. 1. С. 112–120. DOI: 10.1134/S0040357118060118.
- 25. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, вып. 2. С. 79–87.
- 26. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 32. С. 33—48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
- 27. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 391–395.
- 28. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015.- Вып. 4.- С. 50-54.

http://dream-journal.org

- 29. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, вып. 2. С. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004.
- 30. Просвиряков Е. Ю. Точные решения трехмерных потенциальных и завихренных течений Куэтта вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2015. Т. 4, вып. 6. С. 501–506. DOI: 10.1134/82304487X15060127.
- 31. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Известия Российской Академии Наук. Механика жидкости и газа. 2016. Вып. 2. С. 25—31.
- 32. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. -2016. Т. 50, вып. 3. С. 294–301. DOI: 10.7868/S0040357116030027.
- 33. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, вып. 1. С. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
- 34. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, вып. 4. С. 736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568.
- 35. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Тр. ИММ УрО РАН. -2017. Т. 23, вып. 2. С. 32-41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.
- 36. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Описание винтового движения несжимаемой невязкой жидкости // Тр. ИММ УрО РАН. -2014.-T. 20, вып. 1.-C. 43–51.
- 37. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Тр. ИММ УрО РАН. -2013.- Т. 19, вып. 4.- С. 48-63.
- 38. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, вып. 4. C 120–134
- 39. Зубарев Н. М., Просвиряков Е. Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, вып. 6(358). С. 65–71. DOI: 10.15372/PMTF20190607.
- 40. Пухначев В. В. Точечный вихрь в вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, вып. 2. С. 180–187.
- 41. Бирих Р. В., Пухначев В. В., Фроловская О. А. Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // Механика жидкости и газа. 2015. Вып. 1. С. 192–198.
- 42. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, вып. 5. С. 43–46.
- 43. Сизых Γ . Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости // Изв. вузов. Матем. -2019. Вып. 2. С. 49-56.
- 44. Сизых Г. Б. Расщепление уравнений Навье—Стокса для одного класса осесимметричных течений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, вып. 1. С. 163–173. DOI: 10.14498/vsgtu1740.
- 45. Марков В. В., Сизых Г. Б. Точные решения уравнений Эйлера для некоторых двумерных течений несжимаемой жидкости // Тр. МИАН. 2016. Т. 294. С. 300—307. DOI: 10.1134/S0371968516030195.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 3, 2020

DREAM http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

- 46. Ershkov S. V., Shamin R. V., Giniyatullina A. R. On a new type of non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations // Journal of King Saud University Science. 2020. Vol. 32, no. 1. P. 459–467. DOI: 10.1016/j.jksus.2018.07.006.
- 47. Ковалёв В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье-Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 9, вып. 1 (33). С. 71–88.
- 48. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. -2020. Т. 54, вып. 1. С. 114–124. DOI: 10.31857/S0040357119060034.
- 49. Ульянов О. Н. Об одном классе течений вязкой жидкости // Тр. ИММ УрО РАН. 2003. T. 9, вып. 2. C. 129-136.
- 50. Pukhnachev V. V. Nonlinear diffusion and exact solutions to the Navier-Stokes equations // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2010. Vol 3, no.1. P. 61–69.
- 51. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, вып. 2. С. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
- 52. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fl uid in a thin layer // Нелинейн. динам. 2019. Т. 15, вып. 3. С. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
- 53. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динам. 2016. T. 12, вып. 2. C. 167-178.
- 54. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Boca Raton: Chapman& Hall/CRC, 2003.



DREAN http://dream-inurnal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 10.04.2020 **Revised:** 15.05.2020 **Accepted:** 19.06.2020

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.047-060

ON MODELS FOR ESTIMATING THE POST-RADIATION DEFECT STATE OF THE γ' -PHASE

V. I. Bobrovskii

M.N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620990, Russian Federation

(b https://orcid.org/0000-0002-4692-8889 **(s** bobrovskii@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: bobrovskii@imp.uran.ru Address for correspondence: 18, S. ul. Kovalevskoy, Ekaterinburg, 620990, Russian Federation Tel.: +7 (343) 374 00 03

Processes that take place in the precipitates of γ' -phase under irradiation with fast neutrons are topical and draw attention when one searches for ways of improving radiation resistance of structural reactor steels. A special feature of these processes is that the formation of vacancies and interstices proceeds at the background of a disordering of the initial crystal lattice, which manifests itself in the formation of antisite defects. X-ray and neutron diffraction techniques are efficient tools of studying changes that occur in the post-radiation structural state of such systems. However, interpretation of the experimental results calls for more complicated models for the description of structural effects exerted by accumulation of radiation defects in the material than those developed before for elementary metals. Several models are proposed in this paper.

Keywords: neutron irradiation, radiation-induced processes, vacancies, interstitials, antisite defects.

Acknowledgment

The research was carried out at the IMP Neutron Material Science Complex within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme "Neutron" No. AAAA-A19-119112590082-1).

References

- 1. Alab'yev V.M., Vologin V.G., Dubinin S.F., Lapin S.S., Parkhomenko V.D., Sagaradze V.V. Neutron diffraction and electron microscopic investigation of decomposition and radiationin-duced ageing of Cr-Ni-Ti austenitic alloys. *Physics of Metals and Metallography*, 1990, vol. 70, no. 2, pp. 131–137.
- 2. Sagaradze V.V., Nalesnik V.M., Lapin S.S., Aliabev V.M. Precipitation hardening and radiation damageability of austenitic stainless steels. *Journal of Nuclear Materials*, 1993, vol. 202, no. 1–2, pp. 137–144. DOI: 10.1016/0022-3115(93)90036-X.
- 3. Okita T., Wolfer W.G., Garner F.A., Sekimura N. Effects of titanium additions to austenitic ternary alloys on microstructural evolution and void swelling. *Philosophical Magazine*, 2005, vol. 85, no. 18, pp. 2033–2048. DOI: 10.1080/14786430412331331871.
- 4. Voronin V.I., Berger I.F., Goshchitskii B.N. Structural changes in a model alloy after irradiation of Fe62Ni35Ti3 with fast neutrons and isochronous temperature annealing. *Physics of Metals and Metallography*, 2012, vol. 113, no. 9, pp. 878–882. DOI: 10.1134/S0031918X12090141.
- 5. Mosbrucker P.L., Brown D.W., Anderoglu O., Balogh L., Maloy S.A., Sisneros T.A., Dippel A.C. Neutron and X-ray diffraction analysis of the effect of irradiation dose and temperature on

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 3, 2020

DREAM http://dream-iournal.org

http://dream-journal.org

- microstructure of irradiated HT-9 steel. *Journal of Nuclear Materials*, 2013, vol. 443, no. 1, pp. 522–530. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2013.07.065.
- 6. Voronin V.I., Arbuzov V.L., Bobrovskii V.I., Danilov S.E., Kozlov K.A., Proskurnina N.V., Sagaradze V.V. Peculiarities of radiation-induced processes in the Cr-Ni-Mo austenitic steels studied by neutron diffraction. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 5, pp. 80–89. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.080-089. Available at: http://dreamjournal.org/issues/2015-5/2015-5_46.html (accessed: 17.08.2020).
- 7. Proskurnina N.V., Bobrovskii V.I., Goshchitskii B.N., Volkov A.Yu., Voronin V.I. Radiation induced disordering in Cu3Au. *Radiation Physics and Chemistry*, 2020, vol. 170, pp. 108654. DOI: 10.1016/j.radphyschem.2019.108654.
- 8. Cahn R.W. Lattice parameter changes on disordering intermetallics. *Intermetallics*, 1999, vol. 7, pp. 1089–1094. DOI: 10.1016/S0966-9795(99)00035-7.
- 9. Bhatia M.L., Cahn R.W. Lattice parameter and volume changes on disordering. *Intermetallics*, 2005, vol. 13, pp. 474–483. DOI: 10.1016/S0966-9795(99)00035-7.
- 10. Konobeevskii, S.T., *Deistvie izluchenii na materialy. Vvedenie v radiatsionnoe materialovedenie* [The Effects of Radiation on Materials. Introduction to the Radiation Material Science]. Moscow, Atomizdat Publ., 1967. (In Russian).
- 11. Kovács I., Elsayed H. Point defects in metals. *J. Mater Sci.*, 1976, vol. 11, pp. 529–559. DOI: 10.1007/BF00540934.
- 12. Beneagoub A., Thome L. Amorphization Mechanisms in Ion-Bombarded Metallic Alloys. *Phys. Rev. B: Condens. Matter.*, 1988, vol. 38, pp. 10205–10216. DOI: 10.1103/PhysRevB.38.10205.
- 13. Eshelby J.D. The Continuum Theory of Lattice Defects. *Solid State Physics*, 1956, vol. 3, pp. 79–144. DOI: 10.1016/S0081-1947(08)60132-0.
- 14. Was G.S. Fundamentals of Radiation Materials Science. Metals and Alloys, second ed., New York, Springer, 2017, 1002 p. ISBN 978-1-4939-3436-2. DOI: 10.1007/978-1-4939-3438-6.





ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 10.04.2020

УДК 669.15–194.56:620.183.6:539.2:620.181 **DOI:** 10.17804/2410-9908.2020.3.047-060

К МОДЕЛЯМ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОСТРАДИАЦИОННОГО ДЕФЕКТНОГО СОСТОЯНИЯ γ'-ФАЗЫ

В. И. Бобровский

ФГБУН Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук, 18, ул. С. Ковалевской, г. Екатеринбург, Российская Федерация

(b) https://orcid.org/0000-0002-4692-8889 **(a**) bobrovskii@imp.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: bobrovskii@imp.uran.ru Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, 620990, г. Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 374–00–03; факс: 374–00–03

Процессы, возникающие в преципитатах γ' -фазы при облучении быстрыми нейтронами представляют значительный интерес с точки зрения поиска путей улучшения радиационной стойкости конструкционных реакторных сталей. Особенностью этих процессов является то, что образование вакансий и междоузлий протекает в них на фоне разупорядочения исходной решетки, реализующегося в виде формирования антиструктурных дефектов. Рентгеновские и нейтронные дифракционные методы являются эффективным инструментом изучения изменений пострадиационного структурного состояния таких систем. Однако интерпретация экспериментальных результатов требует более сложных моделей для описания структурных эффектов от накопления радиационных дефектов в материале, нежели развитые ранее для простых металлов. Несколько вариантов таких моделей предложены в работе.

Ключевые слова: нейтронное облучение, радиационно-индуцированные процессы, вакансии, междоузлия антиструктурные дефекты.

1. Введение

Каскадообразующее облучение быстрыми нейтронами способно создавать в материалах неравновесные дефектные состояния зачастую недостижимые другими методами. Особенно ярко это проявляется в многокомпонентных системах, где под действием облучения могут изменяться фазовый состав и дислокационная структура, происходить радиационноиндуцированная сегрегация атомов, формироваться или наоборот растворяться различные преципитаты, а в дополнение к этому возникать заметные концентрации точечных дефектов. К таким материалам, например, относятся аустенитные конструкционные реакторные стали, использующиеся для изготовления оболочек топливных элементов реакторов на быстрых нейтронах. Основным недостатком этих сталей является вакансионное распухание, развивающееся в них при высоких дозах нейтронного облучения. В качестве одного из средств борьбы с этим явлением предлагают преципитаты у'-фазы Ni₃Ti, призванные служить стоками точечных дефектов и создаваемые в материале путем предварительного старения [1-6]. Однако следует отметить, что процессы формирования дефектных структур и, в частности, радиационно-индуцированные явления в этих образованиях изучены совершенно недостаточно и требуют отдельных углубленных исследований. Полученные экспериментальные результаты по воздействию облучения быстрыми нейтронами на модельное, изоструктурное у'-фазе соединение Си₃Au [7], показали весьма интересное радиационное поведение его структурных характеристик, причем значительно отличающееся от наблюдавшегося ранее в разупорядоченном термическим способом соединении Ni₃Al [8, 9].



ISSN 2410-9908

Особенностью интерметаллидов Ni_3Al , Ni_3Ti и изоструктурного им высокоупорядоченного сплава Cu_3Au является то, что образование вакансий и междоузлий протекает на фоне разупорядочения исходной решетки, реализующегося в виде формирования антиструктурных дефектов, т. е. обмена позициями между атомами сортов A и B в системе A_3B . Наиболее удобными инструментами исследования этих эффектов являются нейтронно- и рентгеноструктурный анализы, позволяющие фиксировать изменения как дальнего порядка в системе, так и параметров решетки.

Как показал наш опыт исследований, для интерпретации полученных результатов необходимы хотя бы полукачественые модели, подобные уже развитым для простых металлов [10, 11]. Цель работы — построение таких моделей, пригодных для описания многокомпонентных систем и одновременного протекания нескольких явлений.

2. Постановка задачи, результаты и обсуждение

Рассмотрим для начала систему, содержащую только антиструктурные дефекты. В состоянии полного упорядочения атомы сорта A занимают узлы типа (A), а атомы сорта B-узлы типа (B), образуя решетку типа $L1_2$, которая при полном разупорядочении по позициям превращается в простую ГЦК-структуру (рис. 1).

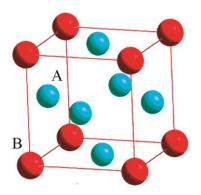


Рис. 1. Структура решетки γ'-фазы

Для характеризации степени разупорядочения подобных бинарных систем обычно используется параметр порядка по Брэггу–Вильямсу, определяемый как:

$$S = \frac{p_A^{(A)} - C_A}{1 - C_A} = \frac{p_B^{(B)} - C_B}{1 - C_B},\tag{1}$$

где C_A и C_B – концентрации атомов сортов A и B в системе; $p_A^{(A)}$ – доля узлов сорта (A), фактически занятых атомами сорта A; $p_B^{(B)}$ – доля узлов сорта (B), фактически занятых атомами сорта B.

То есть $p_A^{(A)}$ и $p_B^{(B)}$ – это просто числа заполнения позиций (A) и (B) атомами сортов A и B, или, что то же самое, вероятности обнаружить в позиции типа (A) атом сорта A, а в позиции типа (B) – атом сорта B. Соответственно $p_A^{(B)}$ и $p_B^{(A)}$ – это вероятности обнаружить в позиции типа (B) атом сорта A, и наоборот.

В состоянии полного упорядочения $p_A^{(A)}=p_B^{(B)}=1$, соответственно и S=1. При полном разупорядочении $p_A^{(A)}=C_A$; $p_B^{(B)}=C_B$ и S=0.

ISSN 2410-9908

С учетом очевидных соотношений:

$$\begin{cases} C_A + C_B = 1\\ p_A^{(A)} + p_B^{(A)} = 1\\ p_A^{(B)} + p_B^{(B)} = 1 \end{cases}$$
 (2)

Легко получить:

$$S = 1 - \frac{p_A^{(B)}}{c_A} = 1 - \frac{p_B^{(A)}}{c_B},\tag{3}$$

что для системы А₃В имеет вид:

$$S = 1 - \frac{4}{3}p_A^{(B)} = 1 - 4p_A^{(B)}. (4)$$

Далее рассмотрим несколько различных моделей радиационного разупорядочения данного материала.

Идеализированная гетерогенная модель. Предположим, что вследствие каскадообразующего характера нейтронного облучения в результате каждого отдельного каскада возникает область с полным разупорядочением по антиузельным дефектам. При этом повторное полное или частичное перекрытие таких каскадов на такое разупорядочение уже не влияет. Считаем, что из N элементарных ячеек кристаллита с исходной совершенной структурой в разупорядоченных областях оказывается N_d ячеек. Остальная часть кристаллита остается полностью упорядоченной. Обозначим относительную концентрацию разупорядоченных ячеек в системе:

$$C_d = \frac{N_d}{N}. (5)$$

Нетрудно понять, что средняя вероятность обнаружить атом сорта В в позиции (A) для такой системы равна:

$$p_R^{(A)} = C_d C_R + (1 - C_d) \cdot 0. (6)$$

Отсюда:

$$S = 1 - C_d. (7)$$

Будем обозначать параметр решетки, содержащей только антиструктурные дефекты, через $a_0(S)$. В случае полностью упорядоченной решетки он будет выглядеть как $a_0(1)$, а для полностью разупорядоченной – как $a_0(0)$. Нижний индекс введен здесь, чтобы подчеркнуть отсутствие иных дефектов, помимо антиструктурных, и понадобится нам впоследствии. Тогда для объема всего кристалла очевидно выполняется:

$$Na_0^3(S) = C_d Na_0^3(0) + (1 - C_d) Na_0^3(1), \tag{8}$$

где через $a_0(S)$ мы обозначили среднее по объему кристаллита значение параметра решетки.



ISSN 2410-9908

Обозначив $\Delta a_0(S) = a_0(S) - a_0(1)$, легко получить, что с точностью до первого порядка выполняется:

$$\frac{\Delta a_0(S)}{a_0(1)} = C_d \frac{a_0(0) - a_0(1)}{a_0(1)} = (1 - S) \frac{a_0(0) - a_0(1)}{a_0(1)}.$$
(9)

То есть в рамках такой гетерогенной модели относительное изменение параметра решетки от параметра порядка носит линейный характер. При этом аналогичная зависимость от флюенса нейтронов Ф, вызвавших такое разупорядочение, нелинейна вследствие перекрытия каскадов и может быть аппроксимирована [12]:

$$N_d = N(1 - exp(-e\Phi)), \tag{10}$$

где коэффициент β определяется величиной сечений рассеяния ядер атомов, входящих в состав материала.

При других методах разупорядочения, например термическом, накопление антиструктурных дефектов может идти гомогенно по объему кристалла. Но и в этом случае, если обратиться к формуле (3) и предположить, что параметр ячейки меняется в первом приближении линейно с изменением вероятности $p_A^{(B)}$ и, соответственно, ионного радиуса атома в позиции (B) [8], то:

$$p_A^{(B)} = C_A(1 - S) = l_A^{(B)} (a_0(S) - a_0(1)). \tag{11}$$

Значению S = 0 будет соответствовать:

$$l_A^{(B)}(a_0(0) - a_0(1)) = C_A. (12)$$

Так что из (11) и (12) вновь получаем:

$$\frac{a_0(S) - a_0(1)}{a_0(1)} = (1 - S) \frac{a_0(0) - a_0(1)}{a_0(1)}.$$
(13)

Предположим, что в дополнение к антиузельным дефектам в кристалле образуются некоторые концентрации по типу дефектов Шоттки и пар Френкеля, вносящие свой аддитивный вклад в величину параметра решетки $a = a(S; C_V; C_I) \equiv a_C(S)$. Здесь C_V и C_I – концентрации вакансий и междоузлий в кристалле, обусловленные наличием вышеупомянутых дефектов. Присутствие дополнительных точечных дефектов мы для уменьшения громоздкости формул будем указывать индексом «С», т. е. в системе обозначений:

$$\begin{cases} a(S; 0; 0) = a_0(S) \\ a(0; C_V; C_I) = a_c(0). \\ a(0; 0; 0) = a_0(0) \end{cases}$$
 (14)

Теперь оценим влияние дефектов Шоттки и Френкеля на параметр а.

Распределение точечных дефектов по кристаллиту рассмотрим сначала в рамках гомогенной модели, полагая, что независимо от характера распределения антиструктурных дефектов (гомогенного или гетерогенного) оно однородно по объему кристаллита, а концентрации этих дефектов малы.

Среднее изменение объема кристаллита за счет релаксации решетки [13, 14] при появлении в ней единственной вакансии считаем равным:



ISSN 2410-9908

$$\Delta v_V = r_V \, a_0^3(S)/4. \tag{15}$$

При этом подразумевается, что при получении коэффициента $r_V(S)$ проведено усреднение по вероятностям образования вакансии в позициях (A) и (B), т. е. 3/4 и 1/4. Аналогично изменение объема образца при появлении единственного междоузлия:

$$\Delta v_I = r_I \, a_0^3(S)/4 \tag{16}$$

В формулах (15)–(16) величина релаксации решетки выражена в единицах объема доли элементарной ячейки, приходящейся на одну кристаллографическую позицию, т. е. среднего атомного объема системы. Строго говоря, при теоретическом расчете значений величин $r_V(S)$ и $r_I(S)$, чтобы полностью учесть S, усреднения следует проводить по соответствующему ансамблю конфигураций ближнего окружения дефекта. Однако зависимости величин $r_V(S)$ и $r_I(S)$ от параметра S, как представляется, являются эффектами высшего порядка малости по сравнению с рассматриваемыми здесь и поэтому будут в дальнейшем опущены.

Для вакансий, входящих в дефекты Шоттки, их появление сопровождается выходом междоузлий на поверхность кристаллита, где они формируют некую кристаллическую структуру. Поскольку экспериментально при разупорядочении рассматриваемых систем появление новых фаз не зафиксировано, считаем, что формируемая ими структура остается без изменений, но ввиду стохастичности выхода междоузлий оказывается в полностью разупорядоченном состоянии, т. е. отвечает S=0. Для формирования такой ячейки с объемом $a_C^3(0)$ требуются 4 междоузлия (считаем, что концентрации точечных дефектов в такой «корочке» те же самые, что и по всему кристаллиту). Тогда изменение объема образца за счет n_S дефектов Шоттки составит:

$$\Delta V_S = \left(n_S r_V a_0^3(S) + n_S a_C^3(0) \right) / 4. \tag{17}$$

А для n_F дефектов Френкеля, состоящих из пары вакансия—междоузлие:

$$\Delta V_F = n_F (r_V + r_I) a_0^3(S) / 4. \tag{18}$$

учитывая, что число пар Френкеля равно числу междоузлий, т. е. $n_F = n_I$, а полное число вакансий $n_V = n_S + n_F$, получаем для полного изменения объема решетки за счет дефектов:

$$\Delta V = (n_V r_V + n_I r_I) a_0^3(S) / 4 + (n_V - n_I) a_C^3(0) / 4.$$
(19)

Удобно ввести коэффициент $\varepsilon(S)$, описывающий относительное изменение объема решетки, оставшееся до ее полного разупорядочения и наполнения дополнительными дефектами:

$$e(S) = \frac{a_C^3(0) - a_0^3(S)}{a_0^3(S)} = 3 \frac{a_C(0) - a_0(S)}{a_0(S)} = 3 \frac{a(0; C_V; C_I) - a(S; 0; 0)}{a(S; 0; 0)}.$$
 (20)

Отметим, что этот коэффициент отражает особенности принятой модели разупорядочения бинарной системы. При аналогичном рассмотрении эффектов в простых металлах он вообще не возникает. Сопоставление его вклада, который сразу видится малым, с другими составляющими будет выполнено позднее, а пока мы сохраняем его как специфическую особенность многокомпонентных систем.

Тогда, если обозначить концентрации вакансий и междоузлий $C_V = n_V/4N$; $C_I = n_I/4N$, получаем:

ISSN 2410-9908

$$\Delta V = Na_0^3(S)[(C_V - C_I)(1 + e) + (C_V r_V + C_I r_I)]. \tag{21}$$

Откуда следует, что относительное изменение объема кристаллита за счет появления точечных дефектов:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V}{Na_0^3(S)} = [(C_V - C_I)(1 + e) + (C_V r_V + C_I r_I)]. \tag{22}$$

Рассматривая кубический кристаллит с ребром L ($V=L^3$), с точностью до первого порядка малости по ΔL получим для относительного удлинения кристаллита за счет вакансий и междоузлий:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{3} \left[(C_V - C_I)(1 + e) + (C_V r_V + C_I r_I) \right]. \tag{23}$$

Теперь учтем, что полный объем кристаллита, содержащего $N_1 = N + \frac{(n_V - n_I)}{4} = N[1 + (C_V - C_I)]$ ячеек, равен:

$$V_1 = Na_0^3(S) + \Delta V = Na_0^3(S)[1 + (C_V - C_I)(1 + e) + (C_V r_V + C_I r_I)]. \tag{24}$$

Тогда объем $v_c = a_c^3(S)$, приходящийся на одну элементарную ячейку кристаллита с точностью до первого порядка по концентрациям равен:

$$v_c = \frac{V_1}{N_1} = \frac{Na_0^3(S) + \Delta V}{N_1} \approx a_0^3(S) \{ 1 + [(C_V - C_I)e + (C_V r_V + C_I r_I)] \}.$$
 (25)

Откуда очевидно, что обусловленное вакансиями и междоузлиями относительное изменение параметра решетки равно:

$$\frac{\Delta a}{a_0(S)} = \frac{a(S; C_I; C_V) - a(S; 0; 0)}{a(S; 0; 0)} = \frac{1}{3} [(C_V - C_I)e + (C_V r_V + C_I r_I)]. \tag{26}$$

Естественно, при этом выполняется каноническое:

$$3\left(\frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta a}{a_0}\right) = C_V - C_I. \tag{27}$$

Возвращаясь к формуле (26), видим:

$$a_C(S) = a_0(S) \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[(C_V - C_I)e + (C_V r_V + C_I r_I) \right] \right\}. \tag{28}$$

Используя (13), получаем:

$$a_{\mathcal{C}}(S) = a_0(1) + (1 - S)[a_0(0) - a_0(1)] + \frac{a_0(1)}{3}[(C_V - C_I)e + (C_V r_V + C_I r_I)]. \tag{29}$$

Откуда полное относительное приращение решетки, отсчитываемое от параметра решетки полностью упорядоченного бездефектного кристалла $a_0(1) = a(1;0;0)$, равно:



ISSN 2410-9908

$$\left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{\mathcal{Y}} = \left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{\mathcal{AS}} + \left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{\mathcal{V}_{\mathbf{I}}}.$$
(30)

Вклад, обусловленный антиструктурными дефектами, равен:

$$\left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{\Delta S} = (1 - S)\frac{a_0(0) - a_0(1)}{a_0(1)} = k_{AS} x,\tag{31}$$

а вклад за счет вакансий и междоузлий имеет вид:

$$\left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{VI} = \frac{1}{3} \left[(C_V - C_I)e + (C_V r_V + C_I r_I) \right]. \tag{32}$$

Здесь также введены переменная x=1-S и коэффициент $k_{AS}=\frac{a_0(0)-a_0(1).}{a_0(1)}$

Сделаем оценки величины различных вкладов. Как можно усмотреть из (31), вклад от антиструктурных дефектов описывается простой линейной зависимостью от x. На практике коэффициент k_{AS} , стоящий при этой линейной зависимости, составляет величину порядка $\sim 2\cdot 10^{-3}$ [7]. Введенный в (20) коэффициент e был призван учесть изменение параметра решетки за счет вакансий и междоузлий и полного доразупорядочения в смысле антиструктурных дефектов в «корочке» кристаллита, образованной междоузлиями из дефектов Шоттки. Ясно, что по порядку величины он совпадает с k:

$$e_{max} = 3\frac{a_0(0) - a_0(1)}{a_0(1)} = 3k_{AS}. (33)$$

Однако, в отличие от (31), этот коэффициент стоит не при переменной x, изменяющейся в интервале (0;1), а при малых концентрациях C_v ; C_I . Отметим также, что своего максимального значения этот коэффициент достигает вблизи состояния кристалла с S=1. Следует принять во внимание, что и антиструктурные дефекты, и дефекты Шоттки, и Френкеля развиваются в системе одновременно под воздействием разупорядочивающего нейтронного облучения. Это означает, что, по крайней мере, вблизи идеально упорядоченного состояния кристалла концентрация этих дефектов должна быть пропорциональна флюенсу облучения, а значит, как очевидно из (10), величине x. Если сравнивать вклады первого и второго слагаемого в квадратных скобках в (32), то можно указать, что, как показывает опыт [14], для ГЦКметаллов коэффициенты, описывающие релаксацию решетки на появление вакансии и междоузлия, обычно составляют: $r_I \sim (1 \div 2)$; $r_V \sim -(0,1 \div 0,2)$. Все это показывает, что в рамках точности проводившихся здесь вычислений первое слагаемое в квадратной скобке в (32) должно быть опущено.

Тогда, вводя обозначения $C_V = g_V x$; $C_I = g_I x$, где коэффициенты g_V ; g_I для достаточно малых значений x могут считаться постоянными, получаем:

$$\left(\frac{\Delta a}{a_0(1)}\right)_{VI} = \frac{1}{3}(g_V r_V + g_I r_I)x. \tag{34}$$

Хорошо известно, что в состоянии термодинамического равновесия концентрация вакансий в металлах мала, а концентрацией междоузельных атомов можно просто пренебречь, т. е. $C_V \gg C_I$. Однако разупорядочение быстрыми нейтронами способно создавать в материалах необычные неравновесные состояния, недостижимые другими методами. Конечно, следует признать, что на практике, оперируя с образцами, извлеченными из облучательных ка-

ISSN 2410-9908

налов реактора и прошедшими период выдержки для уменьшения наведенной радиоактивности, мы наблюдаем состояния систем уже после некоторого пострадиационного отжига. При этом представляется разумным предположить, что все-таки существуют некие предельные значения для концентраций C_V и C_I в системе, поэтому по достижении некоторого значения x_0 зависимость (34) должна сменяться режимом насыщения, т. е. в рамках рассматриваемой модели в простейшем варианте графики для относительных приращений решетки представлены на рис. 2.

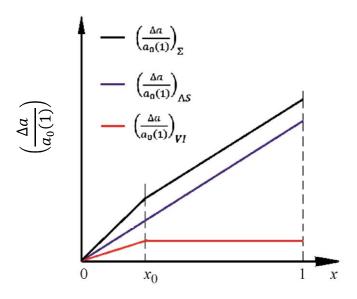


Рис. 2. Вклады в относительное приращение параметра решетки бинарной системы A_3B при разупорядочении быстрыми нейтронами в рамках принятой модели

Такая полукачественная картина хорошо согласуется с экспериментально наблюдаемыми результатами разупорядочения системы Cu_3Au , приведенными в [7]. Данный сплав отличается весьма высокой способностью к антиструктурному разупорядочению (легко достижимому и термическим, и механическим, и радиационным воздействиями), что свидетельствует о низких значениях энергий миграции слагающих его атомов, т. е. о их высокой способности к диффузии. Вследствие этого для данного материала модель гомогенного распределения вакансий и междоузлий по объему, по крайней мере, на начальном этапе разупорядочения, представляется вполне разумной.

В модель можно вносить и дальнейшие качественные усовершенствования. Например, учесть образование вакансионных кластеров. Предположим, что часть вакансий образуют достаточно крупные кластеры. Будем считать, что такие поры не создают внутренних напряжений в решетке, а просто образуют в ней систему пустот, и, соответственно, дополним нашу модель.

Считаем, что общее количество междоузлий и вакансий, изначально возникающих при образовании дефектов Шоттки и Френкеля, равно $n_I^{(i)}$ и $n_V^{(i)}$ соответственно. Очевидно, что $n_I^{(i)}=n_V^{(i)}$. Первые в дальнейшем разобьются на ушедшие при формировании дефектов Шоттки на поверхность кристаллита в количестве n_S и внутренние междоузлия n_I , а вторые – на одиночные вакансии n_V и вакансии, сформировавшие поры n_P :

$$\begin{cases}
 n_I^{(i)} = n_S + n_I \\
 n_V^{(i)} = n_V + n_P
\end{cases}$$
(35)

ISSN 2410-9908

Откуда следует:

$$n_S = (n_V - n_I) + n_P. (36)$$

Выражая происходящие при этом внешние изменения объема кристаллита аналогично (16)–(18), но пренебрегая эффектами, описывавшимися введением коэффициента ε , получаем:

$$\Delta V = n_V r_V \frac{a_0^3}{4} + n_I r_I \frac{a_0^3}{4} + n_S \frac{a_0^3}{4}.$$
 (37)

Учитывая (36), получаем:

$$\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_{VI} = \frac{\Delta V}{Na_0^3} = (C_V - C_I) + (C_V r_V + C_I r_I) + C_P \tag{38}$$

и, соответственно, относительное удлинение кристаллита:

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{VI} = \frac{1}{3} \left[(C_V - C_I) + (C_V r_V + C_I r_I) + C_P \right],\tag{39}$$

где $C_P = \frac{n_P}{4N}$ – относительное число узельных позиций, вошедших в поры.

Для определения среднего параметра решетки с дефектами поделим часть объема кристаллита \bar{V} за вычетом пор на количество ячеек в ней \bar{N} :

$$\bar{V} = V_0 + \Delta V - \frac{n_P a_0^3}{4} = N a_0^3 [1 + (C_V - C_I) + (C_V r_V + C_I r_I)]; \tag{40}$$

$$\overline{N} = N + \frac{n_S}{4} - \frac{n_P}{4} = N[1 + (C_V - C_I)].$$
 (41)

Тогда с точностью до первого порядка малости по концентрациям получаем:

$$a^{3} = \frac{\bar{V}}{\bar{N}} = a_{0}^{3} (1 + (C_{V}r_{V} + C_{I}r_{I})); \tag{42}$$

$$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)_{VI} = \frac{1}{3}(C_V r_V + C_I r_I). \tag{43}$$

Интересно, что соотношение (27) теперь принимает вид:

$$3\left(\frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta a}{a_0}\right)_{VI} = (C_V - C_I) + C_P. \tag{44}$$

Откуда видно, что в случае, когда поведение концентраций C_V и C_I соответствует графикам на рис. 2, т. е. до достижения критического значения параметра x_0 их зависимости от x линейны, а затем они достигают предельных значений и превращаются в константы, из зависимости (44) можно судить о развитии вакансионных кластеров в системе, т. е. формулы (38), (39) и (44) дают простейшую модель вакансионного распухания. То есть при наличии

ISSN 2410-9908

поведения параметра решетки как на рис. 2, можно интерпретировать зависимость (44) согласно рис. 3:

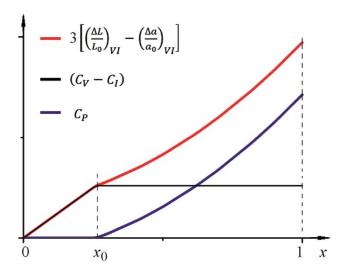


Рис. 3. Графическое выделение вклада вакансионных кластеров в распухание кристаллита

Отметим, что имеющиеся литературные данные по термическому разупорядочению, которое не способно создавать такие состояния, как нейтронное облучение, значительно более стойкого интерметаллического соединения Ni_3Al показывают лишь простую линейную зависимость относительного приращения параметра решетки от параметра порядка [8].

Для контраста рассмотрим альтернативную модель, которая предполагает, что в каскадах происходит полное антиструктурное разупорядочение, а образующиеся же вакансии и междоузлия сохраняются в них же, причем в концентрациях, не зависящих от повторного перекрытия каскадов, а определяющихся лишь характеристиками материала.

Тогда, если вновь обозначить количество ячеек в каскадах как N_d , а концентрацию вакансий и междоузлий в них как $C_V^{(cas)}$ и $C_I^{(cas)}$ соответственно, то число вакансий и междоузлий во всем кристаллите будет равно:

$$\begin{cases}
 n_V = C_V^{(cas)} \, 4N_d \\
 n_I = C_I^{(cas)} \, 4N_d
\end{cases}$$
(45)

А их концентрации в масштабах всего кристалла:

$$\begin{cases}
C_V = C_V^{(cas)} C_d = C_V^{(cas)} (1 - S) \\
C_I = C_I^{(cas)} C_d = C_I^{(cas)} (1 - S)
\end{cases}$$
(46)

Тогда их вклад в относительное приращение параметра решетки будет равен:

$$\left(\frac{\Delta a}{a_{00}}\right)_{VI} = \frac{1}{3} \left[C_V^{(cas)} r_V + C_I^{(cas)} r_I \right] (1 - S) = k_{VI} x; \tag{47}$$

$$\left(\frac{\Delta a}{a_{00}}\right)_{\Sigma} = k_{AS} x + k_{VI} x = k_{\Sigma} x. \tag{48}$$

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 3, 2020

DREAN http://dream-iournal.org

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

При этом никакого режима насыщения для вклада (47), а следовательно, и излома, аналогичного наблюдаемому на рис. 2, не предполагается. Отметим также, что поскольку в рамках данной модели выход междоузлий и вакансий за пределы каскада не предусматривался, то образующиеся дефекты являются только парами Френкеля, а поскольку никаких механизмов ухода дефектов на стоки не рассматривалось, то $C_V = C_I$, что, согласно (27), ведет к равенству относительного удлинения кристалла и относительного изменения параметра решетки.

3. Заключение

При рассмотрении наших моделей мы ограничивались простейшими дефектами Шоттки и Френкеля, а также вакансионными кластерами. Однако реальные системы радиационно-индуцированных дефектов, конечно, значительно сложнее. Например, хорошо известно [14], что стабильными конфигурациями для накопления междоузлий в ГЦК-системах являются не одиночные дефекты, а образованные из них «гантели» (double-bells). Но, как легко понять, это не препятствует использованию для их описания формул типа (16), где в таком случае под r_I нужно понимать просто половину величины соответствующего коэффициента, определенного для такой пары. Конечно, помимо вакансионных кластеров существует масса и других протяженных дефектов — дислокаций, дислокационных петель и т. д., действующих как стоки точечных дефектов и тоже нуждающихся в учете.

На более глубоком уровне аналитическое описание радиационно-стимулированных процессов в материалах наиболее часто представляется в виде систем дифференциальных уравнений, описывающих баланс генерации, накопления и аннигиляции дефектов. Решением их и являются значения концентраций вакансий и междоузлий. Однако здесь следует еще раз подчеркнуть, что фактически дифракционные структурные исследования (рентгено- или нейтронографические), а также дилатометрия проводятся не «in situ», а после некоторого периода выдержки облученных образцов для уменьшения наведенной в них радиоактивности, т. е. некоего пострадиационного отжига. Соответственно оцениваемые с помощью приведенных здесь весьма простых формул концентрации дефектов относятся к их остаточным значениям. Тем не менее, можно надеяться, что даже столь простые модели могут оказаться полезными для качественного осмысления экспериментальных результатов и некоторых количественных оценок.

В частности, это уже оказалось полезным для анализа результатов радиационных эффектов в модельном соединении Cu_3Au . В дальнейшем мы планируем провести аналогичные работы с интерметаллидами Ni_3Ti и Ni_3Al .

Благодарность

Работа выполнена с использованием УНУ «НМК ИФМ» в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Нейтрон» № АААА-А19-119112590082-1).

Литература

- 1. Neutron diffraction and electron microscopic investigation of decomposition and radiationinduced ageing of Cr-Ni-Ti austenitic alloys / V. M. Alab'yev, V. G. Vologin, S. F. Dubinin, S. S. Lapin, V. D. Parkhomenko, V. V. Sagaradze // Physics of Metals and Metallography. 1990. Vol. 70, no. 2. P. 131–137.
- 2. Precipitation hardening and radiation damageability of austenitic stainless steels / V. V. Sagaradze, V. M. Nalesnik, S. S. Lapin, V. M. Aliabev // Journal of Nuclear Materials. 1993. Vol. 202, no. 1–2. P. 137–144. DOI: 10.1016/0022-3115(93)90036-X.
- 3. Effects of titanium additions to austenitic ternary alloys on microstructural evolution and void swelling / T. Okita, W. G. Wolfer, F. A. Garner, N. Sekimura // Philosophical Magazine. 2005. Vol. 85, no. 18. P. 2033–2048. DOI: 10.1080/14786430412331331871.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 3, 2020

DREAM http://dream-iournal.org

http://dream-journal.org

- 4. Voronin V. I., Berger I. F., Goshchitskii B. N. Structural changes in a model alloy after irradiation of Fe62Ni35Ti3 with fast neutrons and isochronous temperature annealing // Physics of Metals and Metallography. 2012. Vol. 113, no. 9. P. 878–882. DOI: 10.1134/S0031918X12090141.
- 5. Neutron and X-ray diffraction analysis of the effect of irradiation dose and temperature on microstructure of irradiated HT-9 steel / P. L. Mosbrucker, D. W. Brown, O. Anderoglu, L. Balogh, S. A. Maloy, T. A. Sisneros, A. C. Dippel // Journal of Nuclear Materials. 2013. Vol. 443, no. 1. P. 522–530. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2013.07.065.
- 6. Peculiarities of radiation-induced processes in the Cr-Ni-Mo austenitic steels studied by neutron diffraction / V. I. Voronin, V. L. Arbuzov, V. I. Bobrovskii, S. E. Danilov, K. A. Kozlov, N. V. Proskurnina, V. V. Sagaradze // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2015. Iss. 5. P. 80–89. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.080-089.
- 7. Radiation induced disordering in Cu3Au / N. V. Proskurnina, V. I. Bobrovskii, B. N. Goshchitskii, A. Yu. Volkov, V. I. Voronin // Radiation Physics and Chemistry. 2020. Vol. 170. P. 108654. DOI: 10.1016/j.radphyschem.2019.108654.
- 8. Cahn R. W. Lattice parameter changes on disordering intermetallics // Intermetallics. 1999. Vol. 7. P. 1089-1094. DOI: 10.1016/S0966-9795(99)00035-7.
- 9. Bhatia M. L., Cahn R. W. Lattice parameter and volume changes on disordering // Intermetallics. 2005. Vol. 13. P. 474–483. DOI: 10.1016/S0966-9795(99)00035-7.
- 10. Конобеевский С. Т. Действие облучения на материалы: введение в радиационное материаловедение. М. : Атомиздат, 1967. 402 с.
- 11. Kovάcs I., El Sayed H. Point defects in metals // J. Mater Sci. 1976. Vol. 11. P. 529–559. DOI: 10.1007/BF00540934.
- 12. Beneagoub A., Thome L. Amorphization Mechanisms in Ion-Bombarded Metallic Alloys // Phys. Rev. B: Condens. Matter. 1988. Vol. 38. P. 10205–10216. DOI: 10.1103/PhysRevB.38.10205.
- 13. Eshelby J. D. The Continuum Theory of Lattice Defects // Solid State Physics. 1956. Vol. 3. P. 79–144. DOI: 10.1016/S0081-1947(08)60132-0.
- 14. Was G. S. Fundamentals of Radiation Materials Science. Metals and Alloys. 2nd ed. New York: Springer, 2017. 1002p. ISBN 978-1-4939-3436-2. DOI: 10.1007/978-1-4939-3438-6.





ISSN 2410-9908

Received: 05.02.2020 **Revised:** 07.05.2020 **Accepted:** 19.06.2020

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.061-066

APPROXIMATION OF THE CREEP CURVE UP TO THE MOMENT OF NECKING

V. V. Nazarov

Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1 Micharinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

(https://orcid.org/0000-0002-9234-3646 **(** inmec130@mail.ru

Corresponding author. E-mail: inmec130@mail.ru Address for correspondence: 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

In this paper, we propose a model for describing the creep process up to necking. The specified slope of the tangent to the creep curve is used as a criterion for the appearance of necking. The analysis of the calculated data shows that the proposed model is in satisfactory agreement with the experimental creep curves obtained for the VT5 titanium alloy at 600 °C.

Keywords: necking criterion, creep, uniaxial tension.

References

- 1. Nazarov V.V. and Lepeshkin A.R. Features of forming and fracture of rectangular plate with a circular hole. *News VolgSTU, Problems of Materials Science, Welding and Mechanical strength*, 2016, no. 2, pp. 75–78. (In Russian).
- 2. Derevyagina L.S., Panin V.E. and Gordienko A.I. Self-organization of plastic shears in localized deformation macrobands in the neck of high-strength polycrystals, its role in material fracture under uniaxial tension. *Physical Mesomechanics*, 2008, vol. 11, iss. 1–2, pp. 51–62. DOI: 10.1016/j.physme.2008.03.006.
- 3. Akhmetzyanov M.Kh., Albaut G.N., and Baryshnikov V.N. Study of Stress Strain State in the Neck of Plane Metallic Specimens in Extension by the Method of Photo-Elastic Coverings. *Zavodskaya Laboratoriya*. *Diagnostika Materialov*, 2004, vol. 70 (8), pp. 41–51. (In Russian).
- 4. Lokoshchenko A.M. and Teraud V.V. Analysis of the localization of deformation in cylindrical samples by the photographic registration at the high-temperature creep. *Deformatsiya i Razrushenie Materialov*, 2013, no. 11, pp. 43–46. (In Russian).
- 5. Agakhi K.A., Kuznetsov, V.N., Lokoschenko, A.M., Koval'kov V.K., Fomin L.V. Simulation of creep process on the basis of observed data approximation. *Mashinostroenie i Inzhenernoe Obrazovanie*, 2011, no. 2, pp. 52–57. (In Russian).
- 6. Koval'kov V.K., Nazarov V.V., Novotnyi S.V. Procedure of high-temperature within complex stressed state. *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2006, vol. 72, no. 4, pp. 42–44. (In Russian).



ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 05.02.2020 УДК 620.172.2:620.162.3:539.376

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.061-066

АППРОКСИМАЦИЯ КРИВОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ДО МОМЕНТА ВРЕМЕНИ ПОЯВЛЕНИЯ ШЕЙКИ

В. В. Назаров

Научно-исследовательский институт механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова» Мичуринский проспект, 1, г. Москва, Российская Федерация

(□ https://orcid.org/0000-0002-9234-3646 **(**□ inmec130@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: inmec130@mail.ru Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, г. Москва, 119192, Российская Федерация

В работе предложена модель описания процесса ползучести до момента времени появления шейки. В качестве критерия появления шейки принят заданный наклон касательной к кривой ползучести. Анализ расчетных данных показывает, что предложенная модель удовлетворительно согласуется с экспериментальными кривыми ползучести, полученными для титанового сплава BT5 при 600 °C.

Ключевые слова: критерий появления шейки, ползучесть, одноосное растяжение.

1. Введение

Как правило, механические характеристики материала определяют из результатов испытаний цилиндрических образцов на одноосное растяжение. Различают следующие последовательные стадии процесса деформирования [1]: однородное деформирование (стадия I), удлинение образца с учетом эволюции шейки (стадия II) – в работе эту стадию не рассматриваем. Результаты экспериментального исследования показывают, что эволюция шейки происходит вдоль сопряженных направлений максимальных касательных напряжений [2]. Для расчета напряжений и деформаций области локализации деформирования применяют метод фотоупругих покрытий [3]. В статье [4] приведены результаты экспериментального исследования эволюции шейки при одноосном растяжении цилиндрического образца из алюминиевого сплава Д16Т при 400 °C (температура плавления равна 650 °C). Из анализа фотоснимков и кривой ползучести установлена продолжительность стадии деформирования образца с шейкой, которая оказалась равна 30–40 % от времени в момент разрушения. Эти данные получены при малых временах в момент разрушения, кроме этого, испытания проводились с некоторой неоднородностью температуры на образце, при этом разрушение произошло в верхней концевой точке.

При аппроксимации кривой ползучести разными учеными предложены различные модели описания процесса деформирования без учета эволюции шейки, например [5]. В действительности, к моменту разрушения продольный размер области локализации деформирования может оказаться соизмерим с удлинением образца при однородном деформировании, что может привести к недостаточно точному вычислению значения растягивающего напряжения. Таким образом, чтобы с достаточной точностью описать процесс однородного деформирования, потребуется использовать критерий момента времени появления шейки.



ISSN 2410-9908

2. Критерий появления шейки

Используем обозначения: $\varepsilon(t)$ — зависимость деформации ползучести от времени; $\dot{\varepsilon}(t)$ — зависимость скорости деформации удлинения от времени ($\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}\big|_{t=0}$); $\sigma(t)$ — зависимость растягивающего напряжения от времени ($\sigma_0 = \sigma\big|_{t=0}$); d(t) и l(t) — зависимости диаметра и длины цилиндрического образца от времени ($d_0 = d\big|_{t=0}$, $l_0 = l\big|_{t=0}$); s(t) — зависимость площади поперечного сечения от времени ($s_0 = s\big|_{t=0}$); F — стационарная растягивающая сила; $\dot{\varepsilon}_* = \dot{\varepsilon}\big|_{t=t_*}$ — скорость деформации удлинения в момент времени t_* появления шейки; t_{**} — время в момент разрушения. Считаем, что в момент времени t_* появления шейки происходит резкое возрастание скорости деформации удлинения, что определяется некоторым тангенсом угла \mathcal{S} наклона касательной к кривой ползучести $\varepsilon(t)$, что означает

$$\dot{\varepsilon}_* \cdot t_{**} = tg(\mathcal{G}), \quad 0 < \mathcal{G} < \pi/2. \tag{1}$$

Будем использовать среднее значение $\mathcal{G}=\pi/4$, при котором $tg(\mathcal{G})=1$. Из равенства (1) находим значение $\dot{\mathcal{E}}_*=t_{**}^{-1}$ (t_{**} – измерено в эксперименте). Из диаграммы $\dot{\mathcal{E}}(t)$ (соответствует экспериментальным данным $\mathcal{E}(t)$) находим значения t_* и \mathcal{E}_* – предельные значения аппроксимации кривой ползучести.

3. Модель описания процесса однородного деформирования

Уравнение механического состояния (уравнение ползучести) используем в виде степенной зависимости $\dot{\varepsilon}(t) \sim \sigma^n(t)$ (по теории течения $\dot{\varepsilon}(t) = B\sigma^n(t)$, где B — материальный параметр) скорости деформации удлинения от растягивающего напряжения:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \left[\frac{\sigma}{\sigma_0}\right]^n,\tag{2}$$

где начальные значения σ_0 и $\dot{\varepsilon}_0$ (скорость деформации удлинения при установившейся ползучести) измерены в эксперименте; n — материальный параметр. Из соотношения (2) следует, что удлинение цилиндрического образца происходит с увеличением скорости деформации $\dot{\varepsilon}(t)$ и нормального напряжения $\sigma(t)$, следовательно, зависимость $\varepsilon(\sigma)$ описывает процесс деформирования, который сопровождается разупрочнением материала. Из равенства усилий

$$F = \sigma_0 s_0 = \sigma s \tag{3}$$

следует зависимость

$$\sigma = \sigma_0 \left[\frac{d_0}{d} \right]^2. \tag{4}$$

Из условия неизменности объема цилиндрического образца (материал считаем несжимаемым) следует зависимость

ISSN 2410-9908

$$d = d_0 \sqrt{\frac{l_0}{l}}. (5)$$

Для описания процесса деформирования, при котором $[l-l_0]/l_0>0.05$, используем логарифмическую деформацию

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}.\tag{6}$$

Из соотношений (4), (5) и (6) следует зависимость (закон увеличения растягивающего напряжения при однородном удлинении цилиндрического образца)

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\varepsilon). \tag{7}$$

Подстановка соотношения (7) в уравнение (2) с последующим интегрированием обеих частей равенства в пределах от нуля до момента появления шейки приводит к определяющему соотношению (определяет аппроксимирующую кривую ползучести)

$$\int_{0}^{\varepsilon_{*}} \frac{d\varepsilon}{\left[\exp(\varepsilon)\right]^{n}} = \dot{\varepsilon}_{0}t. \tag{8}$$

Обратим внимание, что номинальное напряжение в (8) учитывается неявно через скорость установившейся ползучести, а именно $\dot{\varepsilon}_0 = A \sigma_0^n$, где A – материальный параметр.

4. Результаты и обсуждение

Рассмотрим пример, в котором используем результаты испытаний (таблица), полученных на цилиндрических образцах с диаметром 5 мм и рабочей базой 25 мм (рис. 1), при этом измерение зависимости удлинения от времени проводилось по положению нижнего захвата (подвижного) относительного верхнего захвата (неподвижного) испытательной установки [6]. Результаты этих испытаний получены в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова на установке ИМех–5, предназначенной для испытаний на ползучесть и длительную прочность цилиндрических и трубчатых образцов на одноосное растяжение и совместное растяжение и кручение (усилия задаются независимо друг от друга). Нагрев образца производили в воздушной среде внутри цилиндрической печи (максимальная температура нагрева 850 °C). Нагрев образца длился 120 мин, после этого образец выдерживали без нагрузки 15 мин. Температуру на образце измеряли термопарами. Осевая сила создавалась весом платформы с гирями (процесс нагружения длился 1–2 мин). Система измерений представлена индуктивный датчиком, позволяющим измерить текущее удлинение образца по положению в пространстве подвижного захвата относительно неподвижного.

Механические характеристики ползучести титанового сплава BT5 при 600 °C

Номер опыта	$\sigma_{\scriptscriptstyle 0}$, МПа	$\dot{\mathcal{E}}_0$, $\operatorname{\mathtt{Y}}^{-1}$	${\mathcal E}_*$	<i>t</i> * 4	<i>t</i> *
1	75	0,01	0,47	18,9	19,7
2	150	0,05	0,23	3,8	4,4
3	225	0,12	0,23	1,4	1,4

ISSN 2410-9908

Приведены следующие механические характеристики: $\dot{\varepsilon}_0(\sigma_0)$ — зависимость скорости деформации удлинения при установившейся ползучести от номинального напряжения; ε_* и t_* — деформация удлинения и момент времени появления шейки (в модели не используется); t_{**} — время в момент разрушения. Из анализа данных следует, что увеличение σ_0 приводит к увеличению $\dot{\varepsilon}_0$ и уменьшению t_{**} , при этом процесс однородного деформирования происходил при относительно больших значениях логарифмической деформации $\varepsilon_* = 0.23 \div 0.47$. Минимальная погрешность $\Delta = \sum \left|\lg(\varepsilon^{\text{аpprox}}/\varepsilon^{\text{exper}})\right| \rightarrow \min$ расхождения расчетных и экспериментальных кривых ползучести соответствует материальному параметру n=3.5, при котором наблюдается удовлетворительное согласование предложенной модели с экспериментальными данными (рис. 2).



Рис. 1. Цилиндрический образец для механических испытаний на одноосное растяжение

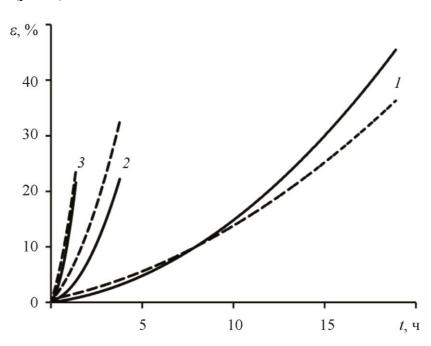


Рис. 2. Зависимости логарифмической деформации ползучести от времени при разных номинальных напряжениях: I-75 МПа; 2-150 МПа; 3-225 МПа, (сплошные линии – опытные данные, штриховые линии – аппроксимации при n=3,5)

Литература

- 1. Назаров В. В., Лепешкин А. Р. Особенности формоизменения и разрушения прямоугольной пластины с круговым отверстием // Известия ВолгГТУ. Проблемы материаловедения, сварки и прочности в машиностроении. − 2016. − № 2. − С. 75–78.
- 2. Derevyagina L. S., Panin V. E. and Gordienko A. I. Self-organization of plastic shears in localized deformation macrobands in the neck of high-strength polycrystals, its role in material fracture under uniaxial tension // Physical Mesomechanics. 2008. Vol. 11, iss. 1–2. P. 51–62. DOI: 10.1016/j.physme.2008.03.006.
- 3. Ахметзянов М. Х., Албаут Г. Н., Барышников В. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния в шейке плоских металлических образцов при растяжении методом фотоупругих покрытий // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. − 2004. № 8. C. 41–51.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 3, 2020

DREAM http://dream-journal.org

http://dream-journal.org

- 4. Локощенко А. М., Терауд В. В. Исследование методом фоторегистрации локализации деформации в цилиндрических образцах при высокотемпературной ползучести // Деформация и разрушение материалов. 2013. N 11. С. 43–46.
- 5. Моделирование процесса ползучести на основе аппроксимации экспериментальных данных / К. А. Агахи, В. Н. Кузнецов, А. М. Локощенко, В. К. Ковальков, Л. В. Фомин // Машиностроение и инженерное образование. − 2011. № 2. C. 52–57.
- 6. Ковальков В. К., Назаров В. В., Новотный С. В. Методика проведения высокотемпературных испытаний при сложном напряженном состоянии // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. -2006. -№ 4. C. 42–44.