

**DREAM**

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2

---

---

# Diagnostics, Resource and Mechanics *of materials and structures*

---

---

<http://dream-journal.org>

**2,2024**

**March-April**

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**  
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**  
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

## Editorial Council

**Anatoly A. Burenin** (Russia)  
**Irina G. Goryacheva** (Russia)  
**Janez Grum** (Slovenia)  
**Mikhail P. Lebedev** (Russia)  
**Leopold I. Leontiev** (Russia)  
**Evgeny V. Lomakin** (Russia)  
**Valery P. Matveenko** (Russia)  
**Nikolay A. Makhutov** (Russia)  
**Nikita F. Morozov** (Russia)  
**Vladimir V. Moskvichev** (Russia)  
**Sergey V. Panin** (Russia)  
**Vasily M. Fomin** (Russia)  
**Shao Wen-zhu** (China)

## Editorial Board

**Boris V. Artemyev** (Moscow)  
**Vladimir A. Bataev** (Novosibirsk)  
**Ivan A. Bataev** (Novosibirsk)  
**Aleksandr K. Belyaev** (St.-Peterburg)  
**Sergey V. Burov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir O. Vaskovsky** (Ekaterinburg)  
**Dmitry I. Vichuzhanin** (Ekaterinburg)  
**Vladimir G. Degtyar** (Miass)  
**Igor G. Emelyanov** (Ekaterinburg)  
**Sergey M. Zadvorkin** (Ekaterinburg)  
**Alexander G. Zalazinsky** (Ekaterinburg)  
**Anatoly V. Konovalov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir N. Kostin** (Ekaterinburg)  
**Tatyana P. Lyubimova** (Perm)  
**Aleksey V. Makarov** (Ekaterinburg)  
**Vladimir A. Mironov** (Ekaterinburg)  
**Radik R. Mulyukov** (Ufa)  
**Vitaly V. Muravyov** (Izhevsk)  
**Aleksandr P. Nichipuruk** (Ekaterinburg)  
**Oleg A. Plekhov** (Perm)  
**Anna M. Povlotskaya** (Ekaterinburg)  
**Artemiy A. Popov** (Ekaterinburg)  
**Nataliya B. Pugacheva** (Ekaterinburg)  
**Igor Yu. Pyshmintsev** (Chelyabinsk)  
**Evgeniy Yu. Raskatov** (Ekaterinburg)  
**Anatoly B. Rinkevich** (Ekaterinburg)  
**Roman A. Savray** (Ekaterinburg)  
**Alexander S. Smirnov** (Ekaterinburg)  
**Alexander I. Ulyanov** (Izhevsk)  
**Yuliya V. Khudorozhkova** (Ekaterinburg)  
**Vladimir P. Shveikin** (Ekaterinburg)

**Eelena E. Verstakova**, editor of the English translation

**Olga A. Verstakova**, editor of Russian texts

**Anna V. Garieva**, maker-up

**Galina V. Torlopova**, associate editor

**Raul N. Shakirov**, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,  
Ekaterinburg, Russian Federation  
phone: +7 (343) 375-35-83,  
fax: +7 (343) 374-53-30  
e-mail: [dream-journal@mail.ru](mailto:dream-journal@mail.ru)  
<http://dream-journal.org>

**Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.**  
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**  
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

**Буренин Анатолий Александрович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Горячева Ирина Георгиевна**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Грум Янез**, Ph.D, (Республика Словения)  
**Лебедев Михаил Петрович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Леонтьев Леопольд Игоревич**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Ломакин Евгений Викторович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Матвеев Валерий Павлович**, академик РАН, д.т.н. (Россия)  
**Махутов Николай Андреевич**, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)  
**Морозов Никита Федорович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Москвичев Владимир Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Панин Сергей Викторович**, д.т.н. (Россия)  
**Фомин Василий Михайлович**, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)  
**Шао Вэнь-чжу**, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

**Артемьев Борис Викторович**, д.т.н., (Москва)  
**Батаев Владимир Андреевич**, д.т.н. (Новосибирск)  
**Батаев Иван Анатольевич**, д.т.н. (Новосибирск)  
**Беляев Александр Константинович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)  
**Буров Сергей Владимирович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Васьковский Владимир Олегович**, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Вичужанин Дмитрий Иванович**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Дегтярь Владимир Григорьевич**, академик РАН, д.т.н. (Миасс)  
**Емельянов Игорь Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Задворкин Сергей Михайлович**, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Залазинский Александр Георгиевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Коновалов Анатолий Владимирович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Костин Владимир Николаевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Любимова Татьяна Петровна**, д.ф.-м.н. (Пермь)  
**Макаров Алексей Викторович**, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Мионов Владимир Александрович**, д.м.н. (Екатеринбург)  
**Мулюков Радик Рафикович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)  
**Муравьев Виталий Васильевич**, д.т.н. (Ижевск)  
**Ничипурук Александр Петрович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Плехов Олег Анатольевич**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Пермь)  
**Поволоцкая Анна Моисеевна**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Попов Артемий Александрович**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Пугачева Наталия Борисовна**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Пышминцев Игорь Юрьевич**, д.т.н. (Челябинск)  
**Раскатов Евгений Юрьевич**, д.т.н. (Екатеринбург)  
**Ринкевич Анатолий Брониславович**, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)  
**Саврай Роман Анатольевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Смирнов Александр Сергеевич**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Ульянов Александр Иванович**, д.т.н. (Ижевск)  
**Худорожкова Юлия Викторовна**, к.т.н. (Екатеринбург)  
**Швейкин Владимир Павлович**, д.т.н. (Екатеринбург)

**Верстакова Елена Евгеньевна** – редактор перевода текста на английский язык  
**Верстакова Ольга Андреевна** – редактор текста  
**Гариева Анна Валерьевна** – верстальщик текста  
**Торлопова Галина Викторовна** – помощник редактора  
**Шакиров Рауль Нурович**, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН  
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30  
e-mail: [dream-journal@mail.ru](mailto:dream-journal@mail.ru)  
<http://dream-journal.org>

**CONTENTS**

<b>Kazakov A. L. and Spevak L. F.</b> Self-similar solutions to a multidimensional singular heat equation with power nonlinearity .....	6
<b>Emelyanov I. G. and Ogorelkov D. A.</b> The stress state of a thick-walled shell with allowance for contact with a hydrogen-containing medium .....	20
<b>Goruleva L. S., Obabkov I. I., and Prosviryakov E. Yu.</b> Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for convective stokes flows .....	36
<b>Bokhoeva L. A., Baldanov A. B., and Rogov V. E.</b> The features of interlayer fracture of composite materials with a variable layup angle under impact loading .....	50
<b>Sharapova V. A., Shveykin V. P., Margamov I. G., Ivanov V. Yu., and Ryabukhin O. V.</b> Infrared spectroscopy for evaluating the effect of electron beam sterilization on polyethylene terephthalate medical tubes .....	61

**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Казиков А. Л., Спевак Л. Ф.</b> Автомодельные решения многомерного вырождающегося уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью .....	6
<b>Емельянов И. Г., Огорелков Д. А.</b> Напряженное состояние толстостенной оболочки с учетом контакта с водородсодержащей средой .....	20
<b>Горулева Л. С., Обабков И. И., Просвиряков Е. Ю.</b> Точные решения для уравнений Обербека – Буссинеска для конвективных течений стокса .....	36
<b>Бохоева Л. А., Балданов А. Б., Рогов В. Е.</b> Особенности межслойного разрушения при ударном нагружении композиционных материалов с переменным углом укладки слоев .....	50
<b>Шарапова В. А., Швейкин В. П., Маргамов И. Г., Иванов В. Ю., Рябухин О. В.</b> Инфракрасная спектроскопия для оценки воздействия электронно-лучевой стерилизации на медицинские пробирки из полиэтилентерефталата .....	61

**Received:** 01.02.2024

**Revised:** 27.02.2024



**Accepted:** 26.04.2024



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019

## SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO A MULTIDIMENSIONAL SINGULAR HEAT EQUATION WITH POWER NONLINEARITY

A. L. Kazakov<sup>a)</sup> and L. F. Spevak<sup>b)</sup>, \*

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>a)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a\_kazakov@mail.ru;

<sup>b)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  lfs@imach.uran.ru

\*Corresponding author. E-mail: lfs@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia  
Tel.: +7 (343) 362-3022; Fax: +7 (343) 374-5330

The paper deals with the construction of exact solutions to a singular heat equation with power nonlinearity in the case of numerous independent variables with spatial (e.g. axial or central) symmetry. A new class of self-similar solutions is proposed, which reduce to solving the Cauchy problem for a second-order nonlinear ordinary differential equation having singularities at the higher derivative with respect to the required function and/or the independent variable. The ordinary differential equation is studied in two ways: analytically and numerically. The analytical study uses a truncated Taylor series with recurrently computed coefficients, for which explicit formulas are obtained. The numerical solution to the problem uses an iteration algorithm based on the collocation method and radial basis functions. The numerical analysis shows the convergence of the proposed numerical algorithm and its sufficient accuracy enabling one to use the found self-similar solutions to verify approximate solutions to the original heat equation. Besides, the numerical analysis has allowed the radius of convergence of the constructed Taylor series to be evaluated. The form of the constructed self-similar solutions, namely their unboundedness near the symmetry center (axis), enables us to study the behavior and exactness of the numerical solutions to the nonlinear singular parabolic-type equation that have been obtained by the stepwise solution method proposed by us earlier and possess the same property.

**Keywords:** nonlinear heat equation, exact solution, self-similar solution, ordinary differential equation, power series, collocation method, radial basis functions

### Acknowledgment

*The work was performed under the state assignment from the Russian Ministry of Science and Higher Education, theme No. 124020600042-9.*

### References

1. Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics. Partial Differential Equations*: vol. 2, Interscience, New York, 1962, 830 p.
2. Evans, L. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*: vol. 19, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, 749 p.
3. Samarskii, A.A. and Gulin, A.V. *Ustoychivost raznostnykh skhem [Stability of Difference Schemes]*. Librokom Publ., Moscow, 2009, 383 p. (In Russian).
4. Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., and Mikhailov, A.P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1995, 534 p.

5. Vazquez, J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Clarendon Press, Oxford, 2007, 648 p.
6. DiBenedetto, E. *Degenerate parabolic equations*, Springer, New York, NY, 1993, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
7. Ladyženskaja, O.A., Solonnikov, V. A., and Ural'ceva, N.A. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs Ser.:* vol. 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968, 648 p.
8. Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*, CRC Press, Boca Raton, London, 2022, 382 p. DOI: 10.1201/9781003042297.
9. Kazakov, A.L. and Orlov, S.S. On some exact solutions to a nonlinear heat equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, 22 (1), 112–123. (In Russian).
10. Kazakov, A.L. and Orlov, S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, 59 (3), 427–441. DOI: 10.1134/S0037446618030060.
11. Kazakov, A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskiye Izvestiya*, 2019, 16, 1057–1068. (In Russian). DOI: 10.33048/semi.2019.16.073.
12. Kazakov, A.L., Nefedova, O.A., and Spevak, L.F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, 59 (6), 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.
13. Kudryashov, N.A. and Chmykhov, M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, 47, 107–117. DOI: 10.1134/S0965542507010113.
14. Chen, W., Fu, Zh.-J., and Chen, C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Heidelberg, Berlin, 2013, 90 p.
15. Chen, C., Karageorghis, A., and Smyrlis, Y. *The Method of Fundamental Solutions: A Meshless Method*, Dynamic Publishers, Atlanta, 2008.
16. Nardini, N. and Brebbia, C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 1983, 7 (3), 157–162. DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
17. Kazakov, A.L., Spevak, L.F. and Nefedova, O.A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, 6, 100–116. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
18. Kazakov, A.L., Spevak, L.F., Spevak, E.L. On numerical methods for constructing benchmark solutions to a nonlinear heat equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, 5, 26–44. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044. Available at: <http://dream-journal.org/issues/2020-5/2>
19. Kazakov, A.L. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type. *Symmetry*, 2021, 13 (5), 871. DOI: 10.3390/sym13050871.
20. Kazakov, A. and Lempert, A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, 10 (2), 232. DOI: 10.3390/math10020232.
21. Kazakov, A. and Spevak, L. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10 (9), 1559. DOI: 10.3390/math10091559.
22. Sidorov, A.F. *Izbrannye trudy. Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2001, 576 p. (In Russian).
23. Sedov, L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, Boca Raton, 1993, 496 p. DOI: 10.1201/9780203739730.
24. Arnold, V.L. *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press, 1978, 280 p.
25. Kozlov, V.V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person. *Russian Mathematical Surveys*, 2000, 55 (6), 1175–1192. DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.

26. Buhmann, M.D. *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 259 p. DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
27. Fornberg, B. and Flyer, N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, 24, 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130. 914000130.



Подана в журнал: 01.02.2024



УДК 517.958:519.633



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Л. Казаков<sup>а)</sup>, Л. Ф. Спевак<sup>б)</sup>, \*

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [ifs@imach.uran.ru](mailto:ifs@imach.uran.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-22; Факс: +7 (343) 374-53-30

Работа посвящена проблеме построения точных решений вырождающегося уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью в случае многих независимых переменных при наличии пространственной (например, осевой или центральной) симметрии. Предложен новый класс автомодельных решений, нахождение которых сводится к решению задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, имеющего особенности при старшей производной относительно искомой функции и/или независимой переменной. Изучение обыкновенного дифференциального уравнения проводится двумя способами: аналитическим и численным. В ходе аналитического исследования применяются отрезки рядов Тейлора с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, для которых получены явные формулы. Для численного решения задачи используется итерационный алгоритм, основанный на методе коллокаций и радиальных базисных функциях. Проведенный численный анализ показал сходимость предложенного численного алгоритма, а также его достаточную точность, позволяющую использовать найденные автомодельные решения для верификации приближенных решений исходного уравнения теплопроводности. Также численный анализ позволил оценить радиус сходимости построенных рядов Тейлора. Вид построенных автомодельных решений, а именно их неограниченность вблизи центра (оси) симметрии, дал возможность исследовать поведение и точность обладающих тем же свойством численных решений нелинейного вырождающегося уравнения параболического типа, полученных с помощью предложенного авторами ранее пошагового метода решения.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение теплопроводности, точное решение, автомодельное решение, обыкновенное дифференциальное уравнение, степенной ряд, метод коллокаций, радиальные базисные функции

### 1. Введение

Проблема построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (ДУ с ЧП) является одной из ключевых в математической физике [1, 2]. Причина этого заключается в том, что подобные математические объекты значительно проще изучать. Это позволяет получить дополнительную информацию о содержательных нелинейных свойствах рассматриваемых постановок. Также они оказываются весьма полезными при верификации результатов численных расчетов в случаях, когда сходимость приближенного метода не доказана [3]. Особую значимость указанные обстоятельства приобретают при наличии в ДУ с ЧП вырождения.

Одним из классических уравнений математической физики, обладающих указанными свойствами, является нелинейное уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью [4], которое в зарубежной научной литературе именуется также *the porous medium equation* [5]. Это параболическое уравнение [6] второго порядка вырождается [7] на многообразии, где обращается в нуль искомая функция. Известно достаточно много точных решений для этого уравнения [8], однако они обычно относятся к плоскосимметрическому случаю и/или не обращаются в нуль. Исключением являются работы авторов [9–11], в которых получены новые классы точных решений искомого вида (вырождающихся) для случаев центральной и осевой симметрии. Полученные точные решения применялись для верификации численных расчетов, выполненных с помощью разработанных авторами эвристических приближенных методов [12].

В случае если точное решение получено в виде квадратуры, его изучение можно провести общеизвестными методами математического анализа. Более сложная картина наблюдается, когда его построение сводится к интегрированию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), которое само по себе зачастую оказывается нетривиальным математическим объектом, особенно при наличии вырождения. Здесь для получения свойств решения обычно приходится выполнять серьезное математическое исследование [13]. Одним из эффективных подходов здесь является разработка алгоритмов численного решения задач Коши для получаемых ОДУ. В случае достаточной точности алгоритмов построенные приближенные решения позволяют проводить комплексный численный анализ для изучения свойств исследуемых задач, а также построить решения исходной задачи для ДУ с ЧП, которые могут использоваться в качестве референсных решений. Отметим, что применение классических разностных методов для решения упомянутых задач Коши затруднено особенностями, которые ОДУ наследует у исходного ДУ с ЧП. В связи с этим эффективным может оказаться применение бессеточных методов, таких как метод двойственной взаимности [14], метод фундаментальных решений [15], метод коллокаций [16].

Ранее авторы численно и аналитически изучали некоторые постановки задач Коши для вырождающихся ОДУ второго порядка, возникающих при построении точных решений нелинейных параболических уравнений, имеющих вид тепловой (диффузионной) волны [17–21]. Настоящая работа является продолжением ранее проведенных исследований, рассмотрен новый вид точных решений, которые актуальны, прежде всего, в неоднородном случае.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение второго порядка (уравнение нелинейной теплопроводности со степенной нелинейностью [4], *the porous medium equation* [5], уравнение нелинейной фильтрации [22])

$$T_t = \Delta(T^\alpha), \quad (1)$$

где  $T$  – искомая функция (температура);  $t$  – время; лапласиан  $\Delta$  берется по пространственным переменным  $x_1, \dots, x_n$ ;  $\alpha > 1$  – константа. Заметим, что при  $\alpha = 1$  имеем классическое линейное уравнение теплопроводности.

При наличии пространственной симметрии уравнение (1) путем несложных преобразований можно представить в виде

$$u_t = uu_{pp} + \frac{1}{\sigma} u_p^2 + \frac{vuu_p}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma = \alpha - 1 > 0$ ,  $\nu = \mu - 1$ ,  $u = T^\sigma$ ,  $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_\mu^2}$ . Появляющаяся при этом константа может быть легко убрана за счет линейной замены независимой переменной  $t$ . Наиболее содержательными здесь являются случаи плоской ( $\nu = 0$ ), осевой ( $\nu = 1$ ) и центральной ( $\nu = 2$ ) симметрии; тем не менее, предстоящее исследование относится также и к случаям более высокой размерности ( $\nu = 3, 4, \dots$ ).

### 3. Аналитическое построение решения

Решение уравнения (2) допускает следующее представление:

$$u = \rho w \left( \frac{t}{\rho} \right). \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в уравнение (2) и приведя подобные слагаемые, получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) вида

$$\xi^2 \left( w w'' + \frac{1}{\sigma} (w')^2 \right) - \xi \left( \frac{2}{\sigma} + \nu \right) w w' - w' + \left( \frac{1}{\sigma} + \nu \right) w^2 = 0, \quad (4)$$

где  $\xi = t/\rho$ . Переменную  $\xi$  в литературе обычно называют *автомодельной* [23]. Решения вида (3), строго говоря, автомодельными не являются, но отличаются от них только множителем  $\rho$ , поэтому сохраним для них данное наименование.

Для уравнения (4) рассмотрим задачу Коши стандартного вида

$$w(\xi_0) = w_0, \quad w'(\xi_0) = w_1. \quad (5)$$

В случае если  $\xi_0 w_0 \neq 0$ , задача Коши (4), (5) подпадает под действие классических теорем существования и единственности [24], поэтому он интереса не представляет и далее не рассматривается.

Если же  $\xi_0 w_0 = 0$ , то, как легко можно видеть, в уравнении (4) обращается в нуль множитель перед старшей (второй) производной. Классические теоремы тогда оказываются неприменимы. Именно этот случай и будет предметом дальнейшего изучения.

**Теорема.** Пусть  $\xi_0 w_0 = 0$ . Тогда задача (4), (5) имеет единственное решение, представимое в виде ряда Тейлора, в следующих случаях: 1)  $w_0 = 0$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ ,  $w_1 = 0$ ; 2)  $w_0 = 0$ ,  $\xi_0 \neq 0$ ,  $w_1 = \sigma/\xi_0^2$ ; 3)  $w_0 \neq 0$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $w_1 = (\nu + 1/\sigma)w_0^2$ . При этом в случае 1 решение тривиальное (все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю), а в случаях 2 и 3 – нетривиальное. При прочих условиях Коши задача (4), (5) решений не имеет.

Для доказательства теоремы построим решение задачи (4), (5) в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{(\xi - \xi_0)^k}{k!}, \quad w_k = \left. \frac{d^k w}{d\xi^k} \right|_{\xi=\xi_0}, \quad (6)$$

коэффициенты которого будем определять индукцией по  $k$ . При этом из условий Коши имеем, что для  $k = 0, 1$  коэффициенты известны, т. е. база индукции формируется из условия теоремы. Подставив эти значения в уравнение (4), можно убедиться, что полученное соотношение будет совместно только при значениях  $w_1$ , указанных в условии теоремы.

Дальнейшее построение проводится посредством последовательного дифференцирования уравнения (4) с последующей подстановкой найденных ранее значений. Легко убедиться, что в случае 1 имеем, что  $w_0 = w_1 = w_2 = \dots = 0$ , т. е. решение действительно тривиальное.

Случаи 2 и 3 необходимо рассматривать отдельно. Отметим, что линейная замена переменных  $\tilde{w} = Aw$ ,  $\tilde{\xi} = B\xi$  не меняет вид уравнения (4), если выполнено равенство  $AB = 1$ . Это позволяет, не теряя общности рассмотрения, принять, что  $w_0 = 0$ ,  $\xi_0 = 1$  в случае 2 и  $w_0 = 1$ ,  $\xi_0 = 0$  в случае 3.

Случай 2. Для нахождения  $w_2$  продифференцируем уравнение (4) по  $\xi$  и положим  $\xi_0 = 1$ ,  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = \sigma$ . Приведя подобные и разрешив выражение относительно  $w_2$ , получим, что

$$w_2 = \frac{\nu w_1^2}{\sigma + 1} = \frac{\nu \sigma^2}{\sigma + 1} \geq 0. \quad (7)$$

И так далее. Пусть найдены  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k$ . Для отыскания  $w_{k+1}$  продифференцируем уравнение (4)  $k$  раз и подставим значения, известные в силу предположения индукции. Получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k C_k^i \left( w_i w_{k+2-i} + \frac{w_{i+1} w_{k+1-i}}{\sigma} \right) + k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left( w_i w_{k+1-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-i}}{\sigma} \right) + \\ & + k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i \left( w_i w_{k-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-1-i}}{\sigma} \right) - \left( \nu + \frac{2}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k+1-i} - \\ & - \left( \nu + \frac{2}{\sigma} \right) k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i w_i w_{k-i} - w_{k+1} + \left( \nu + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k-i} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Разрешив данное соотношение относительно старшего коэффициента, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} w_{k+1} = & -\frac{1}{1+k\sigma} \left[ \sum_{i=2}^k C_k^i w_i w_{k+2-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^{k-1} C_k^i w_{i+1} w_{k+1-i} + k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left( w_i w_{k+1-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-i}}{\sigma} \right) + \right. \\ & + k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i \left( w_i w_{k-i} + \frac{w_{i+1} w_{k-1-i}}{\sigma} \right) - \left( \nu + \frac{2}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k+1-i} - \\ & \left. - \left( \nu + \frac{2}{\sigma} \right) k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i w_i w_{k-i} - w_{k+1} + \left( \nu + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^k C_k^i w_i w_{k-i} \right], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$ . Поскольку  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k$  известны в силу предположения индукции, причем  $w_0 = 0$ , по формуле (9)  $w_{k+1}$  определяется однозначно. При этом в случае плоской симметрии ( $\nu = 0$ ) имеем, что  $w_2 = w_3 = \dots = w_k = \dots = 0$ , т. е. ряд обрывается, и решение имеет вид  $w = \sigma(\xi - 1)$ . При  $\nu \neq 0$  подобного эффекта не наблюдается.

Случай 3. Аналогично предыдущему случаю имеем, что

$$\begin{aligned} w_1 = \nu + \frac{1}{\sigma} > 0, \quad w_2 = \nu \left( \nu + \frac{1}{\sigma} \right) \geq 0, \quad w_3 = 2\nu \left( \nu + \frac{1}{\sigma} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right), \\ w_4 = \left( 6 - \nu - \frac{4}{\sigma} \right) w_0 w_3 + 3(2 - \nu) w_1 w_2 = \nu \left( \nu + \frac{1}{\sigma} \right) \left( 12 + 4\nu - 3\nu^2 - \frac{14 + \nu}{\sigma} + \frac{8}{\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_{k+1} = \sum_{i=2}^k C_k^i \left[ (k-i)(k-i-1) + \left( \frac{i-2}{\sigma} - \nu \right) (k-i) + \nu + \frac{1}{\sigma} \right] w_i w_{k-i}, \quad k = 4, 5, \dots$$

Как и в случае 2, по формуле (10)  $w_{k+1}$  определяется однозначно; при  $\nu = 0$  ряд обрывается и решение имеет вид  $w = \xi/\sigma + 1$ .

Таким образом, во всех допустимых случаях ряд (6) построен. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Вопрос о сходимости построенных рядов требует дополнительного изучения, которое является сложной самостоятельной задачей, выходящей за рамки настоящей статьи. Тем не менее, выскажем предположение о том, что в случае 2 ряд (5) будет локально сходиться при любых допустимых начальных данных, а в случае 3 при некоторых значениях входных параметров возможна его расходимость.

**Замечание 2.** Решение (4), (5) в случае 2 позволяет построить автомодельное решение уравнения (2), имеющее тип *тепловой волны*, следующего вида:

$$u = \begin{cases} 0, & \rho \geq t/\xi_0; \\ \rho w(t/\rho), & \rho \leq t/\xi_0. \end{cases} \quad (11)$$

Исходя из физических соображений, здесь предполагается, что  $\xi_0 > 0$ .

**Замечание 3.** Решение (4), (5) в случае 3 позволяет построить автомодельное решение уравнения (2)  $u = \rho w(t/\rho)$ , удовлетворяющее начальному условию  $u|_{t=0} = w_0 \rho$ . Известен пример С. В. Ковалевской [25], который показывает, что задача с начальными данными для уравнения теплопроводности может иметь формальное решение в виде ряда Тейлора, который, однако, расходится всюду, за исключением момента времени  $t = 0$ . Аналогичные результаты были получены для нелинейного уравнения в плоскосимметричном случае в работе одного из авторов [19].

**Замечание 4.** Если  $\nu = 0$  (плоская симметрия), обрыв ряда приводит к линейному решению уравнения (2). В случае 2 оно имеет вид  $u = \sigma t - \sigma \rho$ ; в случае 3:  $u = t/\sigma + \rho$ .

#### 4. Численный анализ

Решения задачи (4), (5) в случае 2 могут быть использованы в качестве теста для численных алгоритмов решения уравнения (2) с краевым условием, задающим движение фронта тепловой волны:

$$u|_{\rho=t/\xi_0} = 0. \quad (12)$$

Чтобы построить нетривиальное решение задачи (2), (12) (соответствующее второй строке в правой части уравнения (11)) в момент времени  $t > 0$ , нужно найти решение задачи (4), (5) на отрезке  $\xi \in [\xi_0 + \infty)$ . Отметим, что при  $\nu > 0$  уравнение (2) имеет особенность в точке  $\rho = 0$ , соответствующей бесконечно большому значению  $\xi$ , поэтому его численное решение в момент времени  $t$  можно построить лишь на отрезке  $\rho \in [\rho^{(t)}, t/\xi_0]$ , где  $\rho^{(t)} > 0$  – некоторое близкое к нулю число. С учетом этого для построения решения задачи (2), (12) на интервале  $t \in [0, T]$  в области  $\rho \geq \rho_0 > 0$  требуется найти решение задачи (4), (5) на отрезке  $\xi \in [\xi_0, T/\rho_0]$ .

Численное решение задачи (4), (5) будем строить итерационно, с использованием метода коллокаций [14] и радиальных базисных функций (РБФ) [26, 27]. Для этого представим задачу в следующем виде:

$$w'' = F(\xi, w, w'), \quad (13)$$

$$w(\xi_0) = 0, \quad w'(\xi_0) = \frac{\sigma}{\xi_0^2}. \quad (14)$$

$$\text{Здесь } F(\xi, w, w') = \frac{1}{w} \left( \frac{w'}{\xi^2} - \frac{(w')^2}{\sigma} \right) + \frac{1}{\xi} \left( \frac{2}{\sigma} + \nu \right) w' - \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{1}{\sigma} + \nu \right) w.$$

Итерационные алгоритмы решения задач, подобных (13), (14), были подробно описаны в наших работах [17, 18, 21]. Поэтому изложим вычислительную процедуру кратко. Решение задачи (13), (14) на отрезке  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$  будем искать в виде  $w(\xi) = p(\xi) + h(\xi)$ , где  $p(\xi)$  – частное решение уравнения (13),  $h(\xi)$  – решение соответствующей задачи для однородного уравнения:

$$h'' = 0, \quad h(\xi_0) = -p(\xi_0), \quad h'(\xi_0) = \frac{\sigma}{\xi_0^2} - p'(\xi_0). \quad (15)$$

Итерационный процесс имеет вид:

$$p_{(0)} \equiv 0, \quad (16)$$

$$h_{(n)} = \left( \frac{\sigma}{\xi_0^2} - (p'_{(n)})(\xi_0) \right) (\xi - \xi_0) - p_{(n)}(\xi_0), \quad (17)$$

$$w_{(n)}(\xi) = p_{(n)}(\xi) + h_{(n)}(\xi), \quad (18)$$

$$p_{(n+1)} = F(\xi, w_{(n)}, w'_{(n)}). \quad (19)$$

Здесь  $w_{(n)}$ ,  $p_{(n)}$ ,  $h_{(n)}$  –  $n$ -е итерации решений. Уравнение (19) решается методом коллокаций с использованием РБФ [14, 21]. Итерационный процесс (16) – (19) останавливается, когда при заданном параметре  $\varepsilon > 0$  выполняется условие

$$\left| \frac{w_{(n+1)}(\xi_1) - w_{(n)}(\xi_1)}{w_{(n)}(\xi_1)} \right| < \varepsilon. \quad (20)$$

Прежде чем перейти к описанию результатов расчетов, отметим, что при  $\nu = 0$  процедура (15)–(19) уже на первой итерации приводила к линейному точному решению (см. Замечание 4).

Задача (13), (14) была решена с помощью алгоритма (16) – (20) при  $\sigma = 2$ ,  $\xi_0 = 1$  и различных значениях параметров  $\nu$ ,  $\xi_1$  и числа точек коллокации  $M$ , используемых при решении уравнения (19) и расположенных на отрезке  $[\xi_0, \xi_1]$ . Оценка точности расчетов производилась с помощью невязки уравнения (4) при подстановке полученных численных решений:

$$\delta(w) = \max_{\xi \in [\xi_0, \xi_1]} \left| \xi^2 \left( w w'' + \frac{(w')^2}{\sigma} \right) - \xi \left( \frac{2}{\sigma} + \nu \right) w w' - w' + \left( \frac{1}{\sigma} + \nu \right) w^2 \right|. \quad (21)$$

Приведенные в табл. 1 значения невязок позволяют сделать следующие выводы. Предложенный алгоритм сходится относительно числа точек коллокации. Увеличение  $\xi_1$ , т. е. увеличение интервала времени, на котором нужно построить решение задачи (2), (12), приводит к снижению точности решения и требует увеличения числа точек коллокации.

Таблица 1

Невязки уравнения (4) для численных решений

$v$	$\xi_1$	$M$	$\delta(w)$	$v$	$\xi_1$	$M$	$\delta(w)$
1	2	10	$3,8 \cdot 10^{-5}$	2	2	10	$4,4 \cdot 10^{-5}$
		20	$9,5 \cdot 10^{-7}$			20	$1,1 \cdot 10^{-6}$
		50	$1,8 \cdot 10^{-7}$			50	$5,3 \cdot 10^{-7}$
	5	10	$3,4 \cdot 10^{-2}$		5	10	$5,4 \cdot 10^{-2}$
		20	$1,7 \cdot 10^{-4}$			20	$5,1 \cdot 10^{-4}$
		50	$4,8 \cdot 10^{-6}$			50	$4,1 \cdot 10^{-5}$
	8	20	$1,4 \cdot 10^{-2}$		8	20	$1,1 \cdot 10^{-2}$
		50	$2,6 \cdot 10^{-4}$			50	$2,3 \cdot 10^{-4}$
		100	$9,2 \cdot 10^{-5}$			100	$1,2 \cdot 10^{-4}$

Аналогичная оценка точности была проведена для отрезков ряда (6),

$$w^{(n)} = \sum_{k=0}^n w_k \frac{(\xi - \xi_0)^k}{k!}, \tag{22}$$

построенных в соответствии с доказательством теоремы. Невязки уравнения (4) при  $\sigma = 2$ ,  $\xi_0 = 1$  и различных значениях параметров  $v$ ,  $\xi_1$  и степени отрезка ряда  $n$  приведены в табл. 2. Отметим, что если для численного решения значение  $\xi_1$  является параметром итерационного алгоритма (для разных  $\xi_1$  мы имеем разные решения), то при оценке точности решения (22)  $\xi_1$  лишь задает отрезок, на котором мы оцениваем невязку (см. (21)). Приведенные в табл. 2 результаты дают основания полагать, что в обоих рассмотренных случаях ряд (6) имеет радиус сходимости не менее 1/2. Приведенные данные также показывают, что область сходимости рядов ограничена и невелика, в связи с чем использовать отрезки рядов (22) для построения решений задачи (2), (12) можно лишь на небольшом интервале времени.

Таблица 2

Невязки уравнения (4) для решений в виде отрезков рядов

$v$	$\xi_1$	$n$	$\delta(w)$	$v$	$\xi_1$	$n$	$\delta(w)$
1	1,3	10	$3,4 \cdot 10^{-4}$	2	1,3	10	$7,2 \cdot 10^{-4}$
		20	$3,1 \cdot 10^{-8}$			20	$1,6 \cdot 10^{-7}$
		30	$2,1 \cdot 10^{-12}$			30	$2,5 \cdot 10^{-11}$
	1,5	10	$6,8 \cdot 10^{-2}$		1,5	10	$1,4 \cdot 10^{-1}$
		20	$1,0 \cdot 10^{-3}$			20	$5,2 \cdot 10^{-3}$
		30	$1,1 \cdot 10^{-5}$			30	$1,4 \cdot 10^{-4}$
	1,7	10	2,2		1,6	10	$9,6 \cdot 10^{-1}$
		20	$9,5 \cdot 10^{-1}$			20	$2,2 \cdot 10^{-1}$
		30	$3,0 \cdot 10^{-1}$			30	$3,6 \cdot 10^{-2}$
	1,9	10	$3,1 \cdot 10^1$		1,8	10	$2,1 \cdot 10^1$
		20	$1,5 \cdot 10^2$			20	$8,4 \cdot 10^1$
		30	$6,8 \cdot 10^2$			30	$2,4 \cdot 10^2$

Автомодельные решения уравнения (2), полученные по формуле (11) из найденных решений задачи (13), (14), были сопоставлены с решениями задачи (2), (12) с помощью пошагового алгоритма, представленного в работах [17, 21]. На рис. 1 показано сравнение полученных решений при  $\sigma = 2, \nu = 1, \xi_0 = 1$  в четыре момента времени.

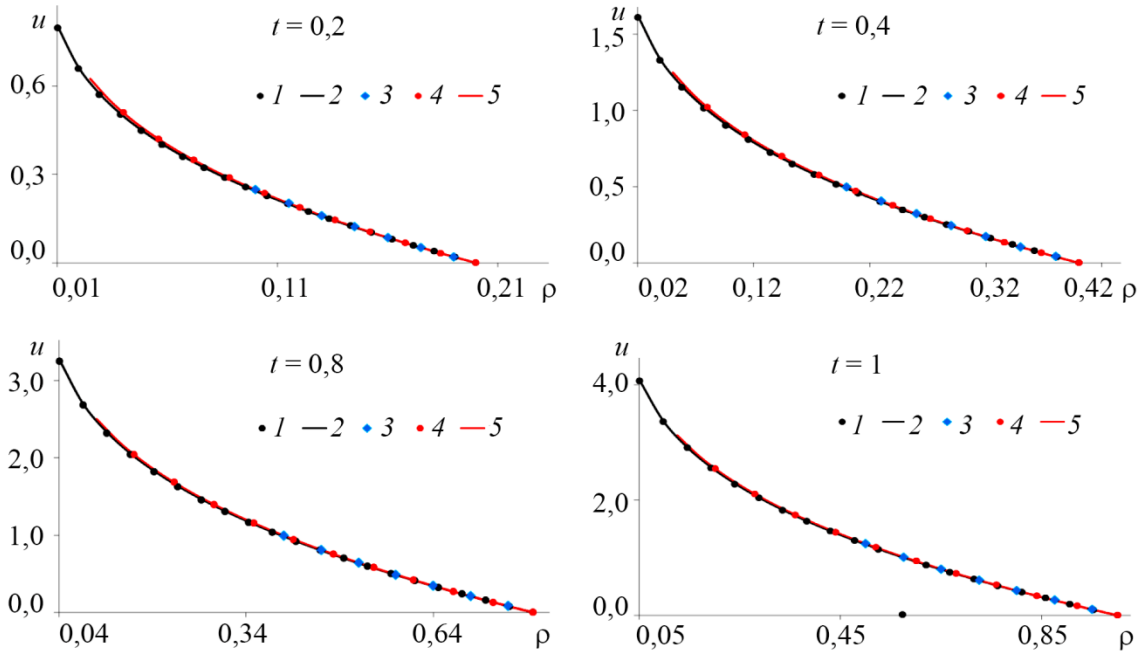


Рис. 1. Сравнение численных и точных решений задачи (2), (12): 1 – пошаговое численное решение с шагом  $h = 0,1$ ; 2 – пошаговое численное решение с шагом  $h = 0,05$ ; 3 – автомодельное решение при  $\xi_1 = 2$ ; 4 – автомодельное решение при  $\xi_1 = 5$ ; 5 – автомодельное решение при  $\xi_1 = 8$

Прокомментируем подробно графики, соответствующие моменту  $t = 0,2$ .

Поскольку решение задачи (2), (12) в каждый момент времени неограниченно возрастает при  $\rho \rightarrow 0$ , при реализации пошагового алгоритма на каждом шаге  $t = t_k$  нужно было задать область решения, не содержащую нулевое значение переменной  $\rho$ . Нами в качестве такой области был принят отрезок  $\rho \in [0,05t_k, t_k]$ , поскольку нулевой фронт в рассматриваемом случае имеет вид  $\rho = t$ . Таким образом, пошаговые решения (графики 1 и 2) определены при  $t = 0,2$  на отрезке  $\rho \in [0,01, 0,2]$ .

Напомним, что решение задачи (2), (12) (его ненулевая часть), найденное по формуле (11) из решения задачи (13), (14) при заданном значении  $\xi_1$ , в каждый момент времени  $t$  имеет смысл на отрезке  $\rho \in [t/\xi_1, t]$ . Следовательно, при  $t = 0,2$  график 3 определен для  $\rho \in [0,1, 0,2]$ , график 4 – для  $\rho \in [0,04, 0,2]$ , график 5 – для  $\rho \in [0,025, 0,2]$ .

В остальные моменты времени области определения приведенных графиков аналогичны.

Проиллюстрированные на рис. 1 результаты расчетов можно интерпретировать следующим образом. Сходимость пошагового алгоритма решения задачи (2), (12) подтверждена для рассматриваемого случая, когда на каждом шаге  $t = t_k$ , по сути, требуется найти решение в открытой области  $\rho \in (0, t_k]$ . Автомодельные решения, построенные с помощью численного решения задачи (13), (14) при различных значениях параметра  $\xi_1$ , близки в общей части области определения. Это говорит о стабильности использованного алгоритма. Кроме этого, можно сделать вывод, что, несмотря на снижение точности решения задачи (13), (14) с ростом  $\xi_1$  (см. табл. 1), полученные даже при достаточно больших значениях  $\xi_1$  автомодельные решения могут быть использованы для тестирования методов приближенного решения зада-



чи (2), (12). При этом чем больше  $\xi_1$ , тем в большей области можно провести верификацию приближенного решения.

## 5. Заключение

В статье исследован новый класс автомодельных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью (*the porous medium equation*). Показано, что при наличии пространственной симметрии построение таких решений можно свести к интегрированию ОДУ второго порядка. Наибольший интерес представляют те решения ОДУ, которые соответствуют случаю, когда зануляется множитель перед старшей (второй) производной. Это происходит, если в нуль обращается автомодельная переменная и/или искомая функция. Тогда классические теоремы существования и единственности оказываются неприменимыми, и требуется специальное исследование, которое проводилось двумя способами: во-первых, аналитически, с использованием представления решения в виде Ряда Тейлора с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, для которых в некоторых случаях получены приближенные оценки радиусов сходимости; во-вторых, численно, с помощью алгоритма, основанного на методе коллокаций и радиальных базисных функций. Численный анализ показал достаточную точность предложенного алгоритма решения ОДУ, что позволяет использовать полученные решения для построения автомодельных решений исходного уравнения теплопроводности, которые, в свою очередь, могут служить для верификации приближенных решений типа тепловой волны, в частности, с помощью разработанного авторами ранее пошагового метода.

Таким образом, построенные решения ОДУ интерпретированы с точки зрения исходного уравнения в частных производных. Показано, что в одном из рассмотренных случаев их можно использовать для построения тепловой волны, которая распространяется по нулевому фону с конечной скоростью.

Особо следует отметить, что найденные автомодельные решения в неоднмерных случаях имеют существенное отличие от полученных авторами ранее точных решений нелинейного уравнения теплопроводности, а именно: они неограниченно возрастают вблизи центра (оси) симметрии. С помощью этих решений авторам впервые удалось верифицировать предложенный ими пошаговый алгоритм численного решения для подобного случая, когда в каждый момент времени нетривиальное решение определено в открытой пространственной области.

## Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема № 124020600042-9).*

## Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными / пер. с англ. Т. Д. Вентцель. – М. : Мир, 1964. – 832 с.
2. Evans L. Partial Differential Equations. Vol. 19 : Graduate Studies in Mathematics. – 2nd ed. – Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2010. – 749 p.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. – М. : Либроком, 2009. – 383 с.
4. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
5. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p.

6. DiBenedetto E. Degenerate parabolic equations. – New York : Springer–Verlag, 1993. – 388 p.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.
8. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. – Boca Raton, London : CRC Press, 2022. – 382 p. – DOI: 10.1201/9781003042297.
9. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 112–123.
10. Казаков А. Л., Орлов С. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сибирский математический журнал. – 2018. – Т. 59, № 3. – С. 544–560. – DOI: 10.17377/smzh.2018.59.306.
11. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073.
12. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 6. – С. 1047–1062. – DOI: 10.1134/S0044466919060085.
13. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.
14. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. – 90 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
15. The method of fundamental solutions: a meshless method / ed. by C. S. Chen, A. Karageorghis, Y. S. Smyrlis. – Atlanta : Dynamic Publishers, 2008.
16. Nardini N., Brebbia C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // Applied Mathematical Modelling. – 1983. – Vol. 7, iss. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
17. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6\\_232.html](http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html)
18. Kazakov A. L., Spevak L. F., Spevak E. L. On numerical methods for constructing benchmark solutions to a nonlinear heat equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 5. – P. 26–44. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.5.026-044. – URL: <http://dream-journal.org/issues/2020-5/2>
19. Kazakov A. L. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 871. – DOI:10.3390/sym13050871.
20. Kazakov A. L., Lempert A. A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – 232. – DOI: 10.3390/math10020232.
21. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusionwave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.
22. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
23. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
24. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : МЦНМО, 2018. – 344 с.

25. Kozlov V. V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person // *Russian Mathematical Surveys*. – 2000. – Vol. 55, iss. 6. – P. 1175–1192. – DOI: <https://doi.org/10.1070/rm2000v055n06ABEH000353>
26. Buhmann M. D. *Radial Basis Functions*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 259 p. – DOI: [10.1017/CBO9780511543241](https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241).
27. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica*. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: [10.1017/S0962492914000130](https://doi.org/10.1017/S0962492914000130).

**Received:** 26.10.2023

**Revised:** 14.02.2024



**Accepted:** 26.04.2024



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2024.2.020-035

## THE STRESS STATE OF A THICK-WALLED SHELL WITH ALLOWANCE FOR CONTACT WITH A HYDROGEN-CONTAINING MEDIUM

I. G. Emelyanov<sup>a)</sup>, \* and D. A. Ogorelkov<sup>b)</sup>

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>a)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  [emelyanov.ig.2016@mail.ru](mailto:emelyanov.ig.2016@mail.ru);

<sup>b)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-7412-3316>  [ogorelkov.dimon@yandex.ru](mailto:ogorelkov.dimon@yandex.ru)

\*Corresponding author. Email: [emelyanov.ig.2016@mail.ru](mailto:emelyanov.ig.2016@mail.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

Tel.: +7 (343) 362-3018; fax: +7 (343) 362-3018

Numerical and experimental methods are used to solve a multidisciplinary problem on determining the stress state of a steel shell of revolution under mechanical loading and thermal effect with allowance for its contact with a hydrogen-containing medium. The study uses a well-developed mathematical tool for solving heat conduction problems in order to solve the problem of hydrogen diffusion into metal. The effective stresses and their invariants are determined by solving the nonlinear boundary value problem of thermoplasticity of a thick-walled shell of revolution in a three-dimensional formulation. The study takes into account the experimentally found effect of changes in the mechanical properties of steel affected by hydrogen. The correctness of the proposed method and the performed calculations is quantitatively estimated by comparison with a well-known problem having an analytical solution. The paper shows that it is possible and necessary to take into account the change in mechanical properties when determining the stress state of steel structures operating in contact with a hydrogen-containing medium.

**Keywords:** thick-walled shell, steel, hydrogen, diffusion, experiment, mechanical properties, stress state

### Acknowledgment

*The work was performed under the state assignment for the IES UB RAS, No. AAAA-A18-118020790140-5.*

### References

1. Karpenko, G.V. and Kripyakevich, R.I. *Vliyanie vodoroda na svoystva stali* [The Effect of Hydrogen Upon the Properties of Steel]. Metallurgizdat Publ., Moscow, 1962, 192 p. (In Russian).
2. Shreider, A.V., Shparber, I.S., and Archakov, Yu.I. *Vliyanie vodoroda na neftyanoe i khimicheskoe oborudovanie* [Effect of Hydrogen on Oil and Chemical Equipment]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1976, 144 p. (In Russian).
3. Archakov, Yu.I. *Vodorodnaya korroziya stali* [Hydrogen Corrosion of Steel]. Metallurgiya Publ., Moscow, 1985, 192 p. (In Russian).
4. Rebyakov, Yu.N., Cherniavsky, A.O., and Cherniavsky, O.F. Deformation and destruction of materials and structures in the diffusion. *Vestnik YuUrGU*, 2010, 10, 4–16. (In Russian).
5. Ovchinnikov, I.I. and Ovchinnikov, I.G. Effect of hydrogen-containing environment at high temperature and pressure on the behavior of metals and structures. *Naukovedenie*, 2012, 14. (In Russian). Available at: <https://naukovedenie.ru/PDF/60tvn412.pdf>

6. Tehrani, A. and Curtin, W.A. The role of atomistic simulations in probing hydrogen effects on plasticity and embrittlement in metals. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, 216, 106502. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106502.
7. Baek, S.-W., Song, E.J., Kim, J.H., Jung, M., Baek, U.B., and Nahm, S.H. Hydrogen embrittlement of 3-D printing manufactured austenitic stainless-steel part for hydrogen service. *Scripta Materialia*, 2017, 130, 87–90. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2016.11.020.
8. Dasa, T., Legrand, E., Brahimia, S.V., Songa, J., and Yue, S. Evaluation of material susceptibility to hydrogen embrittlement (HE): an approach based on experimental and finite element (FE) analyses. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, 224, 106714. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106714.
9. Shishvana, S.S., Csányi, G., and Deshpande, V.S. Hydrogen induced fast-fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 134, 103740. DOI: 10.1016/j.jmps.2019.103740.
10. Ogawa, Y., Okazaki, S., Takakuwa, O., and Matsunaga, H. The roles of internal and external hydrogen in the deformation and fracture processes at the fatigue crack tip zone of metastable austenitic stainless steels. *Scripta Materialia*, 2018, 157, 95–99. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2018.08.003.
11. Merson, E.D., Myagkikh, P.N., Klevtsov, G.V., Merson, D.L., and Vinogradov, A. Effect of fracture mode on acoustic emission behavior in the hydrogen embrittled low-alloy steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, 210, 342–357. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.05.026.
12. Anand, L., Mao, Y., and Talamini, B.L. On modeling fracture of ferritic steels due to hydrogen embrittlement. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 122, 280–314. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.09.012.
13. Pradhan, A., Vishwakarma, M., and Dwivedi, S.K. A review: the impact of hydrogen embrittlement on the fatigue strength of high strength steel. *Materials Today: Proceedings*, 2020, 26 (2), 3015–3019. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.02.627.
14. Tehrani, A. and Curtin, W.A. Atomistic study of hydrogen embrittlement of grain boundaries in nickel. I. Fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 101, 150–165. DOI: 10.1016/j.jmps.2017.01.020.
15. Yu, H., Cocks, A.C.F., and Tarleton, E. The influence of hydrogen on Lomer junctions. *Scripta Materialia*, 2019, 166, 173–177. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2019.03.022.
16. Mironov, V.I., Emelyanov, I.G., Vichuzhanin, D.I., Zamaraev, L.M., Ogorelkov, D.A., and Yakovlev, V.V. Effect of hydrogenation temperature and tensile stress on the parameters of the complete deformation diagram for steel 09G2S. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, 1, 24–33. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.024-033. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1\\_279.html](http://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1_279.html)
17. Mironov, V.I., Emelyanov, I.G., Vichuzhanin, D.I., Kamantsev, I.S., Yakovlev, V.V., Ogorelkov, D.A., and Zamaraev, L.M. A method for experimental investigation of degradation processes in materials. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, 2, 16–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.016-027. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2\\_246.html](http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_246.html)
18. *Metody rascheta obolochek: v 5 t. T. 3.* Shevchenko, Yu.N. and Prokhorenko, I.V. *Teoriya uprugoplasticheskikh obolochek pri neizotermicheskikh protsessakh nagruzheniya* [Theory of Elastoplastic Shells under Nonisothermal Loading Processes, vol. 3. In: Methods for Calculating Shells]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981, 296 p. (In Russian).
19. *Metody rascheta obolochek: v 5 t. T. 4.* Grigorenko, Ya.M. and Vasilenko, A.T. *Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti* [The theory of Shells of Variable Stiffness, vol. 4. In: Methods for Calculating Shells]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981, 544 p. (In Russian).
20. Lykov, A.V. *Teplomassoobmen* [Heat-mass exchange: Reference Book]. Energiya Publ., Moscow, 1978, 480 p. (In Russian).
21. Aramanovich, I.G. and Levin, V.I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Nauka Publ., Moscow, 1969, 288 p. (In Russian).

22. Vorobyev, A.Kh. *Diffuzionnyye zadachi v khimicheskoy kinetike: uchebnoe posobie* [Diffusional Problems in Chemical Kinetics]. MGU Publ., Moscow, 2003, 98 p. (In Russian).
23. Cherdantsev, Yu.P., Chernov, I.P., and Tyurin, Yu.I. *Metody issledovaniya sistem metall-vodorod: uchebnoe posobie* [Methods for Studying Metalhydrogen Systems]. TPU Publ., Tomsk, 2008, 286 p. (In Russian).
24. Galaktionova, N.A. *Vodorod v metallakh* [Hydrogen in Metals]. Metallurgizdat Publ., Moscow, 1959, 255 p. (In Russian).
25. Shevchenko, Yu.N., Babeshko, M.E., Piskun, V.V., Prokhorenko, I.V., and Savchenko V.G. *Reshenie osesimmetrichnoy zadachi termoplastichnosti dlya tonkostennykh i tolstostennykh tel vrashcheniya na ES EVM* [The Solution of the Axisymmetric Problem of Thermoplasticity for Thin-Walled and Thick-Walled Bodies of Revolution on the EU Computer]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1980, 196 p. (In Russian).
26. Shevchenko, Yu.N. *Termoplastichnost pri peremennykh nagruzheniyakh* [Thermoplasticity Under Variable Loads]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1970, 288 p. (In Russian).
27. Ilyushin, A.A. *Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii* [Plasticity. Foundations of the General Mathematical Theory]. Izd-vo AN SSSR, Moscow, 1963. 271 p. (In Russian).
28. Emelyanov, I.G. and Mironov, V.I. A thermodiffusion problem of hydrogenation of a steel shell structure. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2018, 3, pp. 27–35. (In Russian). DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.03.
29. Emelyanov, I.G. and Mironov, V.I. The method for estimation of shell hydrogenation with variable geometrical and physics-mechanicals parameters. *AIP Conference Proceedings*, 2018, 2053, 030012. DOI: 10.1063/1.5084373.
30. Emelyanov, I.G., Mironov, V.I., and Hodak, A.S. The boundary value problem of determining hydrogen concentration and the stress state in a titanium shell. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176, 030005. DOI: 10.1063/1.5135129.
31. Syrotyuk, A.M., Leshchak, R.L., and Dorosh, M.I. Experimental and analytic investigation of the hydrogenation of pipe steels. *Materials Science*, 2018, 53, 811–817. DOI: 10.1007/s11003-018-0140-0.
32. Ivanytskyi, Ya.L., Hembara, O.V., and Chepil, Ya.O. Determination of the durability of elements of power-generating equipment with regard for the influence of working media. *Materials Science*, 2015, 51, 104–113. DOI: 10.1007/s11003-015-9815-y.
33. Khismatulin, E.R., Korolev, E.M., Livshits, V.I. et al. *Sosudy i truboprovody vysokogo davleniya: spravochnik* [High-Pressure Vessels and Pipelines: Handbook]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1990, 384 p. (In Russian).
34. Pisarenko, G.S., Yakovlev, A.P., and Matveev, V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook on Strength of Materials]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1988, 736 p. (In Russian).

Подана в журнал: 26.10.2023



УДК 620.172.2:51-72



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.020-035

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ КОНТАКТА С ВОДОРОДСОДЕРЖАЩЕЙ СРЕДОЙ

И. Г. Емельянов<sup>а)</sup>, \*, Д. А. Огорелков<sup>б)</sup>

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  [emelyanov.ig.2016@mail.ru](mailto:emelyanov.ig.2016@mail.ru);

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-7412-3316>  [ogorelkov.dimon@yandex.ru](mailto:ogorelkov.dimon@yandex.ru)

\*Ответственный автор. Электронная почта: [emelyanov.ig.2016@mail.ru](mailto:emelyanov.ig.2016@mail.ru)  
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия  
Тел.: +7 (343) 362–30–18; факс: +7 (343) 362–30–18

С использованием численных и экспериментальных методов решена мультидисциплинарная задача определения напряженного состояния стальной оболочки вращения в условиях механического нагружения и температурного воздействия с учетом ее контакта с водородсодержащей средой. В работе используется разработанный математический аппарат решения задач теплопроводности для решения задачи диффузии водорода в металл. Действующие напряжения и их инварианты определяются решением нелинейной краевой задачи термопластичности толстостенной оболочки вращения в трехмерной постановке. В работе учитывается экспериментально зафиксированный эффект изменения механических свойств стали под воздействием водорода. Даны количественные оценки правильности предлагаемого метода и выполненных расчетов путем сравнения с известной задачей, имеющей аналитическое решение. Показана возможность и необходимость учитывать изменение механических свойств при определении напряженного состояния стальных конструкций, работающих в условиях контакта с водородсодержащей средой.

**Ключевые слова:** толстостенная оболочка, сталь, водород, диффузия, эксперимент, механические свойства, напряженное состояние

### 1. Введение

Различные металлические конструкции часто эксплуатируются при контакте с агрессивными водородсодержащими средами. Известно, что под влиянием агрессивных сред изменяются механические свойства металлов [1–7]. Этот факт необходимо учитывать при оценке прочности длительно эксплуатируемых элементов конструкций, например трубопроводов и резервуаров, предназначенных для транспортировки и хранения водородсодержащих сред, которые рассматриваются как объекты повышенной опасности. Нестационарное термомеханическое воздействие на трубопровод и контакт с агрессивной средой способствуют образованию дефектов в металле при длительной эксплуатации, которые могут привести к аварийным ситуациям. Требования к эксплуатационной надежности устройств для хранения и транспортировки водородсодержащих сред определяют особый интерес исследователей к задачам прочности и безопасности конструкций в условиях наводороженного металла.

Влияние агрессивной среды проявляется в эффектах двух типов: поверхностных и объемных. Поверхностные эффекты выражаются в растворении материала вследствие химического взаимодействия со средой или в изменении вязкости разрушения вследствие взаимодействия вершин трещин с молекулами среды [8–10].

Объемные эффекты более многообразны. Например, под действием водорода изменяются свойства сталей: происходит водородное охрупчивание, выражающееся в изменении показателей прочности и пластичности вследствие химических взаимодействий. Природа механизма водородного охрупчивания до конца пока не изучена. Не удалось построить универсальную модель, дающую надежные прогнозы срока службы оборудования, работающего в водородсодержащих средах [11]. Предложенные модели описывают воздействие водорода для конкретных классов сталей: ферритных [12], низкоуглеродистых [13] и т. д. Поэтому для понимания сложного механизма охрупчивания требуется большой объем теоретических и экспериментальных исследований.

Поскольку водородсодержащая среда оказывает негативное воздействие на металлические конструкции, то влияние водорода на механические характеристики материалов в настоящее время активно изучается. Например, влияние водорода на системы, масштабы которых сравнимы с размером ячейки кристаллической решетки материала, изучают физическими методами [14, 15], а для образцов, размеры которых значительно превышают характерные размеры структурных составляющих материала, применяют механические испытания [16, 17].

В данной работе предложена численно-экспериментальная методика решения мультидисциплинарной задачи определения напряженного состояния стальной оболочки вращения в условиях механического нагружения и температурного воздействия с учетом ее контакта с водородсодержащей средой. В работе используется хорошо разработанный математический аппарат решения задач теплопроводности для решения задачи диффузии водорода в металл. Для определения напряженного состояния используется математическая модель, описывающая пространственное напряженное состояние тела вращения с возможной термопластической деформацией. Для определения механических параметров материала конструкции экспериментально исследуются образцы из материала, предварительно насыщенного водородом. Определено напряженное состояние стальной оболочки вращения в трехмерной постановке в условиях механического нагружения с учетом изменения свойств материала при наводороживании. При упругой деформации исследуемой оболочки получено хорошее совпадение результатов решения по предлагаемой методике с известными результатами решения задачи теории упругости.

## 2. Методы математического и экспериментального моделирования

### 2.1. Уравнения упругопластического тела вращения с учетом диффузии

Предложенная методика демонстрируется на конструкции в виде оболочки вращения. Внешняя поверхность оболочки контактирует с водородсодержащей средой с избыточным давлением. Отнесем данную оболочку вращения с толщиной  $h$  к непрерывной срединной поверхности с криволинейными ортогональными координатами, где  $s$  – меридиональная, а  $\theta$  – окружная координата. Через  $\gamma$  обозначим координату в направлении внешней нормали к поверхности оболочки. На рис. 1 показана цилиндрическая оболочка под внешней распределенной нагрузкой  $q$ .

Известно, что распространения температуры  $T$  в оболочке вращения описываются дифференциальным уравнением [18]

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( H_1 H_2 \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $H_1, H_2$  – коэффициенты Ламе [19];  $t$  – время;  $a$  – коэффициент теплопроводности.



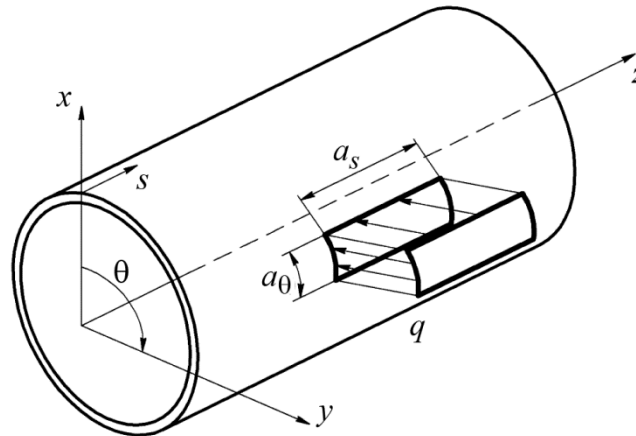


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Коэффициенты  $H_1$  и  $H_2$  определяются через главные радиусы оболочки  $k_1 = R_s^{-1}$  и  $k_2 = R_\theta^{-1}$ :

$$H_1 = A(1 + k_1\gamma), \quad H_2 = B(1 + k_2\gamma). \quad (2)$$

Параметры Ламе для оболочек вращения будут  $A = 1$ ,  $B = r$ , где  $r(s)$  – текущий радиус оболочки. Радиусы главных кривизн  $R_s$  и  $R_\theta$  будут равны радиусу кривизны меридиана и длине отрезка нормали к поверхности до оси вращения оболочки  $z$  [19].

Температуру на поверхности оболочки в каждый момент времени необходимо задавать граничными условиями. В задачах теплопроводности обычно используют три вида граничных условий [20]. Если использовать наиболее простое граничное условие первого рода, то необходимо задавать на поверхности оболочки распределение температуры

$$T\left(\gamma = \frac{h}{2}, t\right) = T_H, \quad (3)$$

где  $T_H$  – начальная температура на внешней поверхности оболочки;  $h$  – толщина оболочки.

В результате контакта оболочки с водородсодержащей средой происходит процесс наводороживания металла. Процессы нагрева и диффузии развиваются за счет различных физических носителей, однако при решении прикладных задач обычно принимают гипотезу о том, что при математическом описании процесса диффузии можно использовать уравнение теплопроводности, заменив коэффициент температуропроводности  $a$  коэффициентом диффузии  $D$  [20–22]. Коэффициент температуропроводности  $a$  является коэффициентом переноса тепла, а коэффициент  $D$  характеризует эффективность диффузионного перемещения исследуемого вещества. При этом оба коэффициента имеют размерность  $\text{м}^2/\text{с}$ . Следовательно, процесс диффузии можно представить уравнением

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial c}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( H_1 H_2 \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right) \right] = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $c$  – концентрация водорода.

Концентрация водорода в металлах измеряется его содержанием в ppm ( $1,12 \text{ см}^3/100 \text{ г}$ ). Известно, что растворимость водорода в сталях может достигать 300–400 ppm, а в титановых сплавах – 40 000 ppm [23, 24].

Процесс диффузии в значительной степени зависит от температуры тела. Соотношение Эйнштейна [22] связывает подвижность молекулы с коэффициентом диффузии и температурой. Таким образом, при решении прикладных задач диффузии можно использовать вычислительные методы, которые применяются при решении задач теплопроводности, с учетом того, что коэффициент диффузии будет зависеть от температуры,  $D(T)$ .

Поскольку рассматриваем конструкцию в виде толстостенной цилиндрической оболочки под действием внешнего давления водородсодержащей среды, то термомеханическая задача будет осесимметричной. Следовательно, на внешней поверхности оболочки будет постоянная концентрация водородсодержащей среды. Таким образом, при решении задачи диффузии концентрация водорода будет зависеть только от координаты  $\gamma$ .

Уравнение теплопроводности (1) в цилиндрической системе координат  $z, r$  ( $z$  – координата оси вращения) для тела вращения при осесимметричном нагреве было получено в работе [25]. По аналогии с этим уравнением теплопроводности представим уравнение диффузии (4) для тела вращения в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (5)$$

где  $r(z)$  – радиус тела вращения.

Граничными условиями для данного уравнения будут служить значения концентрации водорода на поверхности. Принимая предположение о быстром перемешивании водородсодержащей среды, для этой задачи зададим граничные условия первого рода

$$c(r_{\max}, t) = c_H, \quad c(r_{\min}, t) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $c_H$  – начальная концентрация водорода на внешней поверхности оболочки.

Таким образом, на первом этапе решения задачи после решения уравнения (5) может быть найдено распределение концентрации водорода в исследуемой цилиндрической оболочке  $c(r, z, t)$  в любой момент времени.

На втором этапе решения задачи необходимо найти напряженное состояние цилиндрической оболочки под действием механической нагрузки с учетом установившегося в ней распределения концентрации водорода.

Напряженное состояние оболочки будем определять в трехмерной постановке с учетом осесимметричного деформирования. Будем использовать дифференциальные уравнения равновесия тензора напряжений без учета кручения тела [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + F_z &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $F_z = q_z/z$ ,  $F_r = q_r/z$  – компоненты погонной силы.

Для описания изменения механических характеристик тела будем использовать физические уравнения пластичности для прямолинейных траекторий деформирования. Компоненты тензора напряжений и деформаций для осесимметричной задачи тела связаны соотношениями [26]

$$\sigma_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij} + \lambda^* \theta \delta_{ij} - \sigma_{ij}^d, \quad (8)$$

где индексы  $i, j$  принимают значения 1, 2, 3;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, равный единице при  $i = j$  и равный нулю при  $i \neq j$ ;  $\theta$  – объемная деформация,

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad 2G^* = \frac{1}{\psi} = \frac{S}{H}, \quad \lambda^* = \frac{2G^* \nu^*}{1 - 2\nu^*}, \quad (9)$$

$$\nu^* = \frac{2G(1+\nu)\psi - (1-2\nu)}{4G(1+\nu)\psi + (1-2\nu)}, \quad \sigma_{ij}^d = K\varepsilon_T \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^P, \quad K = \frac{2G^*(1+\nu^*)}{1-2\nu^*}.$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $K$  – модуль объемного расширения,  $\varepsilon_{ij}^P$  – компоненты пластической деформации,  $\varepsilon_T$  – тепловая деформация. В соотношениях (9)  $S$  и  $H$  – интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига, которые определяются следующими равенствами (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3):

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad H = \sqrt{\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}}. \quad (10)$$

Здесь  $S_{ij}, e_{ij}$  – компоненты девиаторов напряжений и деформаций, определяемые как

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

В соотношениях (11) компоненты пластической деформации определяются равенством

$$\varepsilon_{ij}^P = \omega e_{ij}, \quad (12)$$

где  $\omega$  – функция пластичности [25–27],

$$\omega = 1 - \frac{G^*}{G}. \quad (13)$$

Модуль сдвига  $G$  в общем случае зависит от температуры оболочки  $T$  и концентрации водорода  $c$ . В нашем случае интенсивность касательных напряжений будет функционалом от интенсивности деформаций сдвига  $H$  и концентрации водорода:

$$S = F[H, c]. \quad (14)$$

## 2.2. Численные методы решения задачи

Итак, сначала необходимо решить краевую задачу диффузии (5). Для этого используем вычислительную программу расчета нестационарной теплопроводности. Для решения задачи теплопроводности используем подход, основанный на том, что уравнение теплопроводности заменяется эквивалентным вариационным уравнением [25]. Это уравнение решается

методом конечных элементов по явной схеме решения задачи теплопроводности. Результаты решения для цилиндрического стержня сравнивались с известными результатами для задачи, имеющей аналитическое решение. Примеры решения задач нестационарной теплопроводности и диффузии рассматривались в работах [28–30].

При определении осесимметричного напряженного состояния тела вращения, описанного уравнениями (7)–(14), также используется метод конечных элементов. В качестве конечного элемента принят плоский треугольный элемент. Для этого уравнения равновесия со статическими граничными условиями заменяются эквивалентными вариационными уравнениями.

Сведение разрешающих уравнений к системе алгебраических уравнений и линеаризация физически нелинейной задачи приведены в работе [25]. Таким образом, может быть вычислено напряженное состояние  $\sigma_{ij}(r, z, c(t))$ , которое будет зависеть от распределения концентрации водорода в исследуемой конструкции.

### 2.3. Экспериментальные исследования, необходимые для решения задачи

Для решения задачи определения напряженного состояния исследуемой конструкции необходимы экспериментальные данные при растяжении образцов из материала конструкции, находящихся в водородсодержащей среде. Экспериментальных данных, демонстрирующих феноменологический эффект изменения механических свойств различных материалов в зависимости от времени насыщения или концентрации водорода, в научной литературе не так много. Для решения поставленной задачи были взяты данные из проведенного эксперимента на растяжение образцов из стали [16]. В работе [16] приведены записанные машинные кривые растяжения в виде полных диаграмм деформирования. Образцы, показанные на рис. 2, испытывались без водорода и после процесса наводороживания. Исследуемая рабочая часть образца представляет собой стальную цилиндрическую оболочку длиной  $l = 2$  мм, толщиной  $h = 0,5$  мм и внешним диаметром  $D = 3$  мм, изготовленную из конструкционной стали для сварных конструкций 09Г2С по российскому стандарту ГОСТ 19281-2014. Механические испытания образцов выполнялись на разрывной машине Instron 8801.

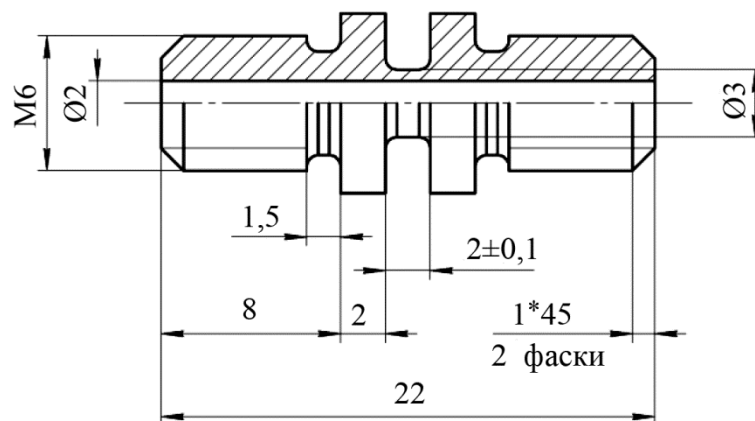


Рис. 2. Образец для испытания

При проведении испытаний образец устанавливают в спроектированном устройстве и закрывают колпаком, образующим герметичную камеру, в которой поддерживается давление водорода  $p = 5$  МПа. Для увеличения скорости наводороживания образцы нагревались. После наводороживания, длившегося около 3 часов, образцы снимались со стенда и сразу, чтобы исключить дегазацию водорода, испытывались на разрывной машине. Следовательно, можно считать, что феноменологический эффект изменения механических свойств обусловлен не только наводороживанием, но и остаточной температурой образца.

На рис. 3 показаны восходящие кривые растяжения образцов без наводороживания при температуре 20 °С (кривая 1) и после их наводороживания при температуре 580 °С (кривая 2).

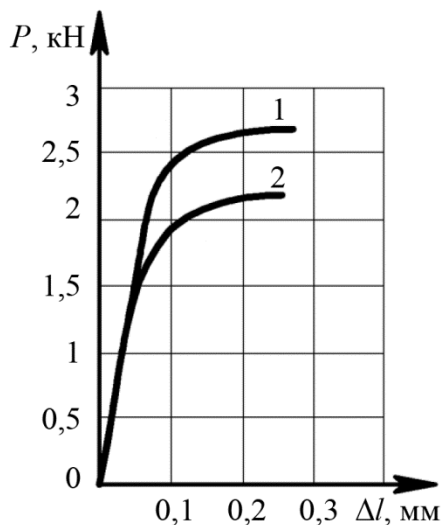


Рис. 3. Машинные диаграммы стали 09Г2С: кривая 1 – без наводороживания; кривая 2 – наводороживание при температуре 580 °С

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1. Результаты решения с использованием программы SolidWorks

Поскольку испытывались образцы нестандартной формы и с короткой рабочей длиной 2 мм, то сначала для демонстрации предложенного метода определяли напряженное состояние металлических конструкций в виде центральной части образца под действием растягивающей силы на торцах. С использованием вычислительной программы SolidWorks, предназначенной для создания моделей и проведения инженерного анализа, определено напряженное состояние центральной части образца с буртиками при температуре 20 °С в физически линейной постановке (при упругих деформациях) без наводороживания.

На рис. 4 показано распределение интенсивности деформаций сдвига  $H$  в центральной части образца.

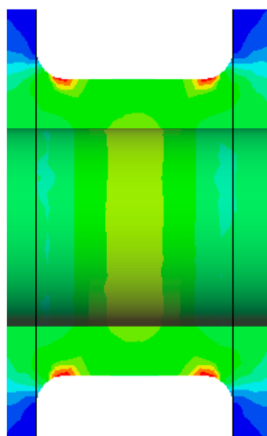


Рис. 4. Распределение интенсивности деформаций сдвига  $H$  в центральной части образца длиной 2 мм

Из рис. 4 следует, что в срединной части образца длиной 2 мм, за исключением концентрации напряжений вблизи начала буртика, интенсивность деформации сдвига  $H$  практи-

чески постоянна. Следовательно, вычисленные осевые напряжения в центре образца будут достаточно точно определять механические свойства при растяжении исследуемого материала. Для полного исключения краевого эффекта, обусловленного геометрией образца, в дальнейшем модель конструкции принимается в виде цилиндрической оболочки.

### 3.2. Результаты решения с помощью предлагаемой методики

Геометрическая модель исследуемой конструкции принимается в виде цилиндрической оболочки (трубы) со свободными краями длиной 2 мм и толщиной 0,5 мм. Поскольку отношение достаточно большое ( $R_{cp}/h = 2,5$ , где  $R_{cp}$  – срединный радиус цилиндра), то этот исследуемый элемент должен описываться уравнениями для толстостенного цилиндра, т. е. с использованием пространственной теории упругости.

На первом этапе для определения распределения концентрации водорода в исследуемом цилиндре решается краевая задача диффузии (5). Коэффициент диффузии для стали 09Г2С принят  $D = 4 \times 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$  для температуры  $T = 580 \text{ }^\circ\text{C}$ . Необходимо добавить, что коэффициенты диффузии, приведенные в различных литературных источниках для одного и того же материала при повышенных температурах, могут сильно отличаться, что объясняется, по-видимому, различными методиками проведения эксперимента.

Для реализации граничного условия (6) необходимо определить концентрацию водорода на поверхности цилиндра, определяемую давлением водородсодержащей среды  $p$ , температурой  $T$  и состоянием поверхности. Некоторые аналитические и экспериментальные соотношения для определения концентрации водорода на поверхности тела и внутри рассмотрены в работах [31, 32]. Концентрацию водорода на поверхности  $c_H$  в ppm в зависимости от парциального давления водорода в газовой фазе  $p_{H_2}$  (МПа) и температуры можно определить соотношением [33]

$$c_H = K_0 \exp\left\{-\frac{\Delta H}{2R(T + 273)}\right\} \sqrt{p_{H_2}}, \quad (15)$$

где  $K_0$  – безразмерные коэффициенты;  $\Delta H$  – теплота растворения;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Учитывая соотношение (15), можно найти значения  $c_H$  для граничного условия первого рода (6). Для рассматриваемой задачи начальная концентрация водорода на внешней поверхности цилиндра  $c_H$  составит 1,52 ppm при  $T = 580 \text{ }^\circ\text{C}$ . Из-за высокой температуры процесс насыщения водородом идет достаточно быстро. На рис. 5 показано распределение концентрации водорода по толщине стенки цилиндра (толщина стенки  $h = 0,5 \text{ мм}$  разделена на 10 частей). Кривые 1–6 соответствуют 1, 2, 3, 4, 5 и 10 секундам диффузии. Следовательно, после проведенного испытания по всей толщине образца концентрация водорода  $c_H$  составит 1,52 ppm.

На втором этапе решения задачи для определения напряженного состояния необходимо задать свойства материала. При определении упругопластического напряженного состояния цилиндра необходимо знать зависимость  $\sigma = f(\epsilon)$  при  $T = \text{const}$  и  $c = \text{const}$  для исследуемого материала. Для элементов конструкций из стали 09Г2С такие зависимости в виде диаграмм растяжения можно аппроксимировать кусочно-линейным представлением. С целью решения задач для элементов конструкций при насыщении водородом с концентрацией  $c = 1,52 \text{ ppm}$  диаграмма растяжения (рис. 3, кривая 2) представлялась точками, показанными в таблице (безразмерная деформация  $\epsilon$ , напряжение  $\sigma$  в МПа).

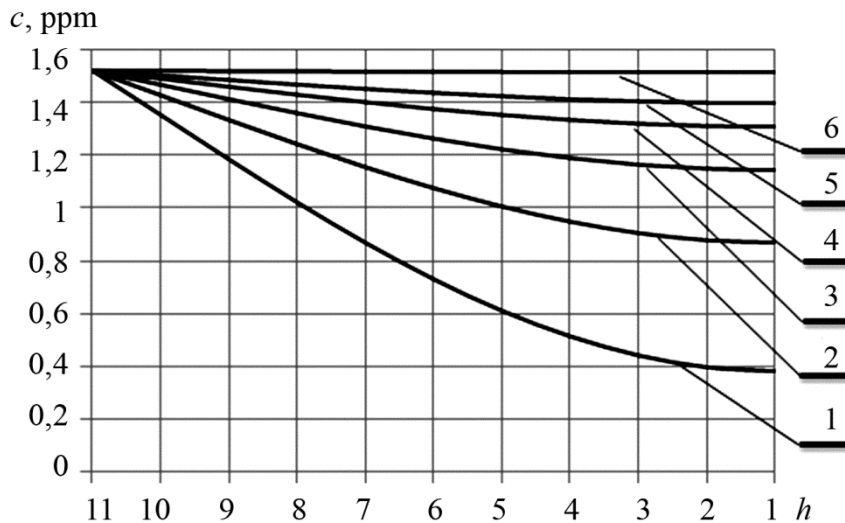


Рис. 5. Распределение концентрации водорода  $c$  по толщине стенки

Таблица

Аппроксимация диаграммы растяжения (рис. 3, кривая 2)

$\varepsilon_1 = 0,0$	$\varepsilon_2 = 0,0013$	$\varepsilon_3 = 0,03$	$\varepsilon_4 = 0,06$	$\varepsilon_5 = 0,1$	$\varepsilon_6 = 0,15$
$\sigma_1 = 0,0$	$\sigma_2 = 254$	$\sigma_3 = 381$	$\sigma_4 = 508$	$\sigma_5 = 559$	$\sigma_6 = 584$

При геометрическом моделировании цилиндра его толщина делилась на четыре прямоугольных микроподобласти. Количество данных подобластей в меридиональном направлении зависит от длины оболочки. Для данной задачи принималось  $4 \times 10 = 40$  микроподобластей. Затем каждая микроподобласть делилась на четыре треугольных конечных элемента. Результаты решения задачи по определению компонент напряженного состояния приводятся для середины каждого конечного элемента, т. е. в восьми точках по радиусу и двадцати точках по длине оболочки. Торцевые поверхности цилиндра принимались свободными.

Таким образом, на втором этапе определены компоненты напряженного состояния (окружное  $\sigma_{\theta\theta}$ , радиальное  $\sigma_{rr}$  и осевое  $\sigma_{zz}$  напряжения) для цилиндра с механическими свойствами (таблица), на внешнюю поверхность которого действует давление водорода  $p = 5$  МПа.

На рис. 6 показано распределение окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  по длине цилиндра на внешней (кривая 1) и внутренней (кривая 2) поверхностях.

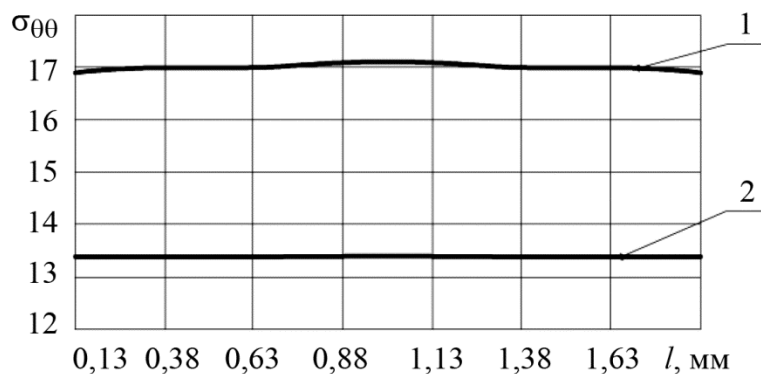


Рис. 6. Распределение окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  по длине цилиндра

На рис. 7 показано распределение радиального напряжения  $\sigma_{rr}$  по длине цилиндра на внешней (кривая 1) и внутренней (кривая 2) поверхностях.

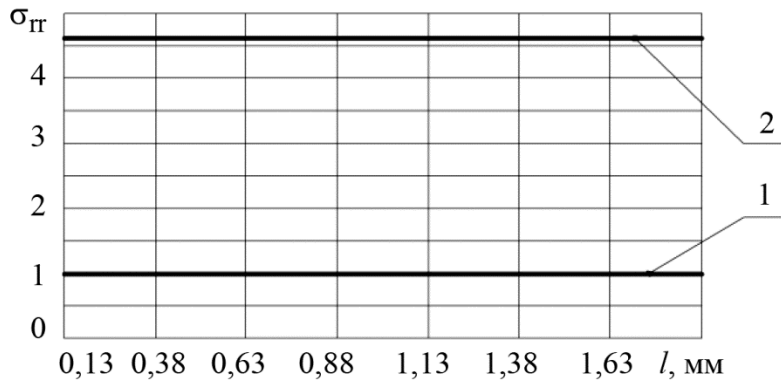


Рис. 7. Распределение радиального напряжения  $\sigma_{rr}$  по длине цилиндра

На рис. 8 показано распределение интенсивности касательных напряжений сдвига  $S$  в зависимости от внешнего давления  $p$  для точки с координатой  $z = 0,5l$  на внешней поверхности цилиндра.  $S$  определяется формулой

$$S = \sqrt{[(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{zr}] \frac{1}{6}} . \quad (16)$$

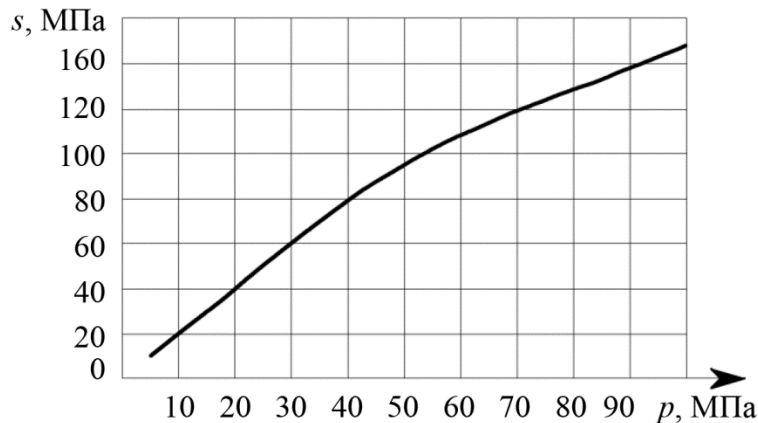


Рис. 8. Распределение интенсивности касательных напряжений сдвига  $S$  в зависимости от внешнего давления  $p$

### 3.3. Обсуждение и верификация результатов решения

Из рис. 5 следует, что из-за небольшой толщины (0,5 мм) и большого коэффициента диффузии достаточно быстро в цилиндре устанавливается постоянная концентрация водорода по всей толщине,  $c = 1,52$  ppm. Следовательно, для расчетов напряженного состояния цилиндра можно использовать механические свойства исследуемого материала, полученные при данной концентрации.

Из проведенных расчетов следует, что при упругой деформации при внешнем давлении  $p = 5$  МПа в центре цилиндра ( $z = 0,5l$ ) на внешней поверхности ( $r = 1,44$  мм – центр тяжести конечного элемента) окружное напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  равно  $-13,4$  МПа (рис. 6), а радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  составляет  $-4,6$  МПа (рис. 7). На внутренней поверхности ( $r = 1,06$  мм – центр тяжести конечного элемента) окружное напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  равно  $-17,1$  МПа, а радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  равно  $-1,0$  МПа. Полученные по предложенной методике напряжения практически совпа-



дают с напряжениями, вычисленными с использованием аналитических формул для толстостенного плосконапряженного цилиндра, нагруженного внешним давлением [34]:

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) p, \quad \sigma_{rr} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) p. \quad (17)$$

Здесь  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 1,5$  мм.

Вычисления по формулам (17) привели к следующим результатам: при  $r = 1,44$  мм  $\sigma_{\theta\theta} = -13,36$  МПа,  $\sigma_{rr} = -4,65$  МПа; при  $r = 1,06$  мм  $\sigma_{\theta\theta} = -17,0$  МПа,  $\sigma_{rr} = -0,99$  МПа. Следовательно, в области упругих деформаций напряженное состояние толстостенного цилиндра, вычисленное по предлагаемой методике, совпадает с напряженным состоянием, вычисленным с использованием известного решения классической теории упругости.

Из рис. 8 следует, что при давлении  $p$  более 80 МПа задача становится физически нелинейной (распределение интенсивности касательных напряжений сдвига  $S$  отклоняется от прямолинейной траектории). Как показано выше, нелинейный эффект изменения механических свойств, обусловленный наводороживанием и остаточной температурой образцов, приводит к нелинейному напряженному состоянию исследуемого толстостенного цилиндра. Величину интенсивности касательных напряжений сдвига  $S$ , учитывающую феноменологический эффект от наводороживания металла, можно использовать для оценки прочности исследуемого элемента конструкции.

Поскольку с использованием предложенной выше численно-экспериментальной методики определены компоненты напряженного состояния оболочки (окружное  $\sigma_{\theta\theta}$ , радиальное  $\sigma_{rr}$  и осевое  $\sigma_{zz}$  напряжения), то по этим напряжениям, применяя какую-либо теорию прочности, можно произвести оценку прочности для рассматриваемой оболочки. Но это самостоятельная, далеко не тривиальная задача, которая не входит в круг проблем, затрагиваемых в данной статье. Например, в работе [34] приведено более десятка различных теорий прочности. В простейшем варианте, который часто применяется в прикладных задачах, считается, что прочность оболочки обеспечивается, если интенсивность касательных напряжений сдвига  $S$  не превышает временного сопротивления материала  $\sigma_b$ . Следовательно, для приведенного в статье примера  $S$  не должно превышать  $\sigma_b = 584$  МПа (таблица).

#### 4. Заключение

Таким образом, с использованием численных методов и результатов экспериментальных исследований решена мультидисциплинарная задача по определению напряженного состояния толстостенной стальной оболочки вращения в условиях механического нагружения при контакте с водородсодержащей средой. При этом решено уравнение диффузии и определено распределение концентрации водорода по телу цилиндрической оболочечной конструкции; определены компоненты напряженно-деформированного состояния для цилиндрической оболочки с учетом механических свойств материала, зависящих от концентрации водорода; даны количественные оценки правильности предлагаемого метода и выполненных расчетов; показано, как можно произвести оценку прочности цилиндрической конструкции, контактирующей с водородсодержащей средой при механическом нагружении.

#### Благодарность

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН (тема АААА-А18-118020790140-5).*

#### Литература

1. Карпенко Г. В., Крипьякевич Р. И. Влияние водорода на свойства стали. – М. : Металлургиздат, 1962. – 192 с.
2. Шрейдер А. В., Шпарбер И. С., Арчаков Ю. И. Влияние водорода на нефтяное и химическое оборудование. – М. : Машиностроение, 1976. – 144 с.
3. Арчаков Ю. И. Водородная коррозия стали. – М. : Металлургия, 1985. – 192 с.
4. Ребяков Ю. Н., Чернявский А. О., Чернявский О. Ф. Деформирование и разрушение материалов и конструкций в условиях диффузии // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – № 10. – С. 4–16.
5. Овчинников И. И., Овчинников И. Г. Влияние водородосодержащей среды при высоких температурах и давлениях на поведение металлов и конструкций из них // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2012. – № 4. – URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/60tvn412.pdf>
6. Tehranchi A., Curtin W. A. The role of atomistic simulations in probing hydrogen effects on plasticity and embrittlement in metals // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 216. – P. 106502. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106502.
7. Hydrogen embrittlement of 3-D printing manufactured austenitic stainless-steel part for hydrogen service / S.-W. Baek, E. J. Song, J. H. Kim, M. Jung, U. B. Baek, S. H. Nahm // Scripta Materialia. – 2017. – Vol. 130. – P. 87–90. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2016.11.020.
8. Evaluation of material susceptibility to hydrogen embrittlement (HE): an approach based on experimental and finite element (FE) analyses / T. Dasa, E. Legrand, S. V. Brahmia, J. Song, S. Yue // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 224. – P. 106714. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106714.
9. Shishvana S. S., Csányi G., Deshpande V. S. Hydrogen induced fast-fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2020. – Vol. 134. – P. 103740. – DOI: 10.1016/j.jmps.2019.103740.
10. The roles of internal and external hydrogen in the deformation and fracture processes at the fatigue crack tip zone of metastable austenitic stainless steels / Y. Ogawa, S. Okazaki, O. Takakuwa, H. Matsunaga // Scripta Materialia. – 2018. – Vol. 157. – P. 95–99. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2018.08.003.
11. Effect of fracture mode on acoustic emission behavior in the hydrogen embrittled low-alloy steel / E. D. Merson, P. N. Myagkikh, G. V. Klevtsov, D. L. Merson, A. Vinogradov // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 210. – P. 342–357. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.05.026.
12. Anand L., Mao Y., Talamini B. L. On modeling fracture of ferritic steels due to hydrogen embrittlement // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2019. – Vol. 122. – P. 280–314. – DOI: 10.1016/j.jmps.2018.09.012.
13. Pradhan A., Vishwakarma M., Dwivedi S. K. A review: The impact of hydrogen embrittlement on the fatigue strength of high strength steel // Materials Today: Proceedings. – 2020. – Vol. 26, part 2. – P. 3015–3019. – DOI: 10.1016/j.matpr.2020.02.627.
14. Tehranchi A., Curtin W. A. Atomistic study of hydrogen embrittlement of grain boundaries in nickel: I. Fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2017. – Vol. 101. – P. 150–165. – DOI: 10.1016/j.jmps.2017.01.020.
15. Yu H., Cocks A. C. F., Tarleton E. The influence of hydrogen on Lomer junctions // Scripta Materialia. – 2019. – Vol. 166. – P. 173–177. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2019.03.022.
16. Effect of hydrogenation temperature and tensile stress on the parameters of the complete deformation diagram for steel 09G2S / V. I. Mironov, I. G. Emelyanov, D. I. Vichuzhanin, L. M. Zamaraev, D. A. Ogorelkov, V. V. Yakovlev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 1. – P. 24–33. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.024-033. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1\\_279.html](http://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1_279.html)
17. A Method for experimental investigation of degradation processes in materials / V. I. Mironov, I. G. Emelyanov, D. I. Vichuzhanin, I. S. Kamantsev, V. V. Yakovlev, D. A. Ogorelkov, L. M. Zamaraev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 2. – P. 16–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.016-027. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2\\_246.html](http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_246.html)

18. Методы расчета оболочек : в 5 т. / отв. ред. А. Н. Гузь. Т. 3 : Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – Киев : Наукова думка, 1981. – 296 с.
19. Методы расчета оболочек : в 5 т. / отв. ред. А. Н. Гузь. Т. 4 : Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев : Наукова думка, 1981. – 544 с.
20. Лыков А. В. Тепломассообмен : справочник. – М. : Энергия, 1978. – 480 с.
21. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
22. Воробьев А. Х. Диффузионные задачи в химической кинетике : учебное пособие. – М. : МГУ, 2003. – 98 с.
23. Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И. Методы исследования систем металл-водород : учебное пособие. – Томск : Изд-во ТПУ, 2008. – 286 с.
24. Галактионова Н. А. Водород в металлах. – М. : Metallurgizdat, 1959. – 255 с.
25. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ / Ю. Н. Шевченко, М. Е. Бабешко, В. В. Пискун, И. В. Прохоренко, В. Г. Савченко. – Киев : Наукова думка, 1980. – 196 с.
26. Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев : Наукова думка, 1970. – 288 с.
27. Илюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
28. Емельянов И. Г., Миронов В. И. Термодиффузионная задача наводороживания стальной оболочечной конструкции // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 3. – С. 27–35. – DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.03.
29. Emelyanov I. G., Mironov V. I. The method for estimation of shell hydrogenation with variable geometrical and physics-mechanicals parameters // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – P. 030012. – DOI: 10.1063/1.5084373.
30. Emelyanov I. G., Mironov V.I., Hodak A. S. The boundary value problem of determining hydrogen concentration and the stress state in a titanium shell // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2176. – P. 030005. – DOI: 10.1063/1.5135129.
31. Syrotyuk A. M., Leshchak R. L., Dorosh M. I. Experimental and analytic investigation of the hydrogenation of pipe steels // Materials Science. – 2018. – Vol. 53. – P. 811–817. – DOI: 10.1007/s11003-018-0140-0.
32. Ivanytskyi Ya. L., Nembara O. V., Chepil Ya. O. Determination of the durability of elements of power-generating equipment with regard for the influence of working media // Materials Science. – 2015. – Vol. 51. – P. 104–113. – DOI: 10.1007/s11003-015-9815-y.
33. Сосуды и трубопроводы высокого давления : справочник / Хисматулин Е. Р., Королев Е. М., Лившиц В. И. и др. – М. : Машиностроение, 1990. – 384 с.
34. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев : Наукова думка, 1988. – 736 с.

Received: 15.01.2024

Revised: 29.02.2024

Accepted: 26.04.2024



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049


## EXACT SOLUTIONS TO THE OBERBECK–BOUSSINESQ EQUATIONS FOR CONVECTIVE STOKES FLOWS



L. S. Goruleva<sup>1, 2, a)</sup>, I. I. Obabkov<sup>2, b)</sup>, and E. Yu. Prosviryakov<sup>1, 2, c), \*</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>2</sup>*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

a)  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  [sherlarisa@yandex.ru](mailto:sherlarisa@yandex.ru);

b)  <https://orcid.org/0009-0008-8729-529X>;

c)  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

\*Corresponding author. Email: [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

To study large-scale convective flows (fluid motion in a thin layer), it is possible, for initial studies, to consider the Stokes approximation when integrating the Oberbeck–Boussinesq equation. The convective derivative in the momentum transfer equations and in the heat conduction equation is in this case assumed to be identically equal to zero. The paper discusses several approaches to constructing exact solutions for slow (creeping) flows of a non-uniformly heated fluid. Formulas for three-dimensional flows in the Lin–Sidorov–Aristov class are given for steady flows. The hydrodynamic fields are described by polynomials. Exact solutions are given for the velocity field nonlinearly depending on two spatial coordinates (longitudinal, or horizontal) with coefficients of nonlinear forms, which depend on the third coordinate. The study shows how it is possible to automate the computation of unknown coefficients for the formation of hydrodynamic fields (velocities and temperatures).

**Keywords:** exact solution, Navier–Stokes equation, Oberbeck–Boussinesq equation, Stokes approximation, convection

### References

1. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem. Technical Memorandum Ser., 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
2. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskii, E.M. *Convective Stability of Incompressible Liquid*, Wiley, Keter Press, Jerusalem, 1976, 330 p.
3. Gershuni, G.Z., Zhukhovitskii, E.M., and Nepomnyashchii, A.A. *Ustoychivost konvektivnykh techeniy* [Stability of Convective Flows]. Nauka Publ., Moscow, 1989, 318 p. (In Russian).
4. Getling, A.V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Sov. Phys. Usp.*, 1991, 34 (9), 737–776. DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Andreev, V.K., Gaponenko, Ya.A., Goncharova, O.N., and Pukhnachev, V.V. *Mathematical Models of Convection*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics Ser., Walter De Gruyter, Berlin, 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Aristov, S.N. and Schwarz, K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkkih sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Layers of Liquid]. FGBOU VPO VyatGU Publ., Kirov, 2011, 206 p. (In Russian).
7. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, 7, 43–44. DOI: 10.1007/bf00914697.

8. Shliomis, M.I. and Yakushin, V.I. The convection in a two-layer binary system with evaporation. *Uchenye Zapiski Permskogo Gosuniversiteta, Seriya Gidrodinamika*, 1972, 4, 129–140. (In Russian).
9. Gershuni, G.Z. On the stability of plane convective motion of a fluid. *Zh. Tekh. Fiz.*, 1953, 23 (10), 1838–1844. (In Russian).
10. Batchelor, G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math.*, 1954, 12 (3), 209–233. DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz, K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dyn.*, 2014, 49 (4), 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
12. Knyazev, D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, 52 (2), 212–217. DOI:10.1134/S0021894411020088.
13. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, 9 (4), 651–657. (In Russian).
14. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (2), 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
15. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2015, 8 (4), 445–456. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin, C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, 1, 391–395. DOI:10.1007/BF00298016.
17. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Synopsis of Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
19. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, 48, 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
20. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
22. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, 25 (3), 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
23. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release. *Optics and Spectroscopy*, 2022, 130 (6), 365–370. DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
24. Burmasheva, N., Ershkov, S., Prosviryakov, E., and Leshchenko, D. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction. *Fluids*, 2023, 8 (4), 123. DOI: 10.3390/fluids8040123.
25. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
26. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.

27. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2022, 56 (3), 331–338. DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2022, 48, 258–262, DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for magnetohydrodynamics equations to describe convective flows of binary liquids. *Khimicheskaya Fizika i Mezokopiya*, 2023, 25 (4), 447–462. (In Russian). DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1\\_393.html](http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html)
31. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)
32. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 5, 39–52. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1\\_393.html](http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html)
33. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Steady convective Couette flow for quadratic heating of the lower boundary fluid layer. *Nelineinaya Dinamika*, 2018, 14 (1), 69–79. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova, S.S. and Prosviryakov, E.Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronautics*, 2016, 59 (4), 529–535. DOI: 10.3103/S1068799816040140.
35. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2016, 12 (2), 167–178. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Planar linear Bénard-Rayleigh convection under quadratic heating of the upper boundary of a viscous incompressible liquid layer. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2015, 2, 6–13. (In Russian).
37. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of thermocapillary convection during localized heating of a flat layer of viscous incompressible liquid. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2014, 3, 7–12. (In Russian).
38. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Marangoni viscous incompressible fluid. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, 3 (32), 110–118. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, 2, 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2\\_170.html](http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html)
40. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, 22 (3), 532–548. DOI: 10.14498/vsgtu1638.

Подана в журнал: 15.01.2024

УДК 517.958



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049


## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЕРБЕКА – БУССИНЕСКА ДЛЯ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СТОКСА



Л. С. Горулера<sup>1, 2, а)</sup>, И. И. Обабков<sup>2, б)</sup>, Е. Ю. Просвирыков<sup>1, 2, в)</sup>, \*

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет,  
ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

а)  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  sherlarisa@yandex.ru;

б)  <https://orcid.org/0009-0008-8729-529X>;

в)  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen\_pros@mail.ru

\*Ответственный автор. Электронная почта: evgen\_pros@mail.ru  
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия  
Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

При изучении конвективных крупномасштабных течений (движение жидкости в тонком слое) можно для первоначальных исследований рассматривать приближение Стокса при интегрировании уравнения Обербека – Буссинеска. В этом случае конвективную производную в уравнениях переноса импульса и в уравнении теплопроводности полагают тождественно равной нулю. В статье рассмотрено несколько подходов к построению точных решений для медленных (ползущих) течений неоднородно нагретой жидкости. Для установившихся течений приведены формулы для трехмерных течений в классе Линя – Сидорова – Аристовы. Гидродинамические поля описываются полиномами. Приведены точные решения для поля скоростей, нелинейно зависящего от двух пространственных координат (продольных, или горизонтальных) с коэффициентами нелинейных форм, зависящими от третьей координаты. Показано, как можно автоматизировать вычисления неизвестных коэффициентов для формирования гидродинамических полей (скоростей и температуры).

**Ключевые слова:** точное решение, уравнение Навье – Стокса, уравнение Обербека – Буссинеска, аппроксимация Стокса, конвекция

### 1. Введение

подавляющее большинство процессов в природе протекает при изменении температуры [1–6]. В жидкостях и газах при наличии градиента температуры происходит интенсивное вихревое движение – конвекция. Данный вид теплообмена (теплопередачи) является самым распространенным и наблюдаемым способом переноса энергии во Вселенной [4–6]. Безусловно, конвекция индуцируется не только неоднородностью теплового поля. Конвективное движение может быть вызвано неоднородным распределением примесей в растворе, наличием магнитного, электрического полей и других силовых факторов. Механизм конвекции существенно зависит от силового поля, в котором течет жидкость или газ, что позволяет классифицировать конвективное движение на две группы: естественное и вынужденное [2–4].

Для теоретического изучения конвекции используется система Обербека – Буссинеска, которая состоит из уравнений Навье – Стокса, уравнения непрерывности (несжимаемости) и уравнения теплопроводности [2, 3]. Напомним, что система Обербека – Буссинеска является приближенной. В уравнениях Навье – Стокса принята аппроксимация плотности по Буссинеску: плотность зависит от температуры и учитывается только в объемной силе Архимеда.

химеда [2, 3]. В уравнениях непрерывности линейное распределение плотности от температуры заменяют постоянной плотностью, которую имеет жидкость до нагрева или охлаждения, поэтому используется уравнение несжимаемости [2, 3].

Сложность описания конвективных течений несжимаемых сред мотивирует разрабатывать новые теоретические подходы к интегрированию уравнений Обербека – Буссинеска. Важным вкладом в исследование течения жидкостей является нахождение новых классов класс Остроумова – Бириха и построенное на основе этого класса семейство Шлиомиса [6–13]. точных решений. Первым точным решением для уравнений Обербека –Буссинеска является Кроме того, существует класс точных решений Линя – Сидорова – Аристова для интегрирования трехмерных уравнений естественной и вынужденной конвекции [13–19]. Семейство точных решений Линя – Сидорова – Аристова представляет собой суперпозицию аддитивного и мультипликативного разделения переменных [16–18, 20]. Такой вид позволяет использовать этот класс для геометрически анизотропных областей и для изучения поперечной структуры течений, где затруднено или невозможно экспериментальное исследование полей скорости, давления и температуры [5, 20].

С использованием формул представления гидродинамических полей Линя – Сидорова – Аристова были получены классы точных решений для описания конвективных течений жидкостей с термодиффузией [20], для течений многослойных жидкостей [21, 22], для описания движений с учетом вибрации [6]. Был использован класс Линя – Сидорова – Аристова для изучения течений жидкостей с учетом диссипативной функции Рэлея [23], для решения задач геофизической гидродинамики с учетом объемной силы трения Рэлея [24]. Кроме того, найдены классы точных решений для изотермических и конвективных течений жидкостей с полем скоростей, нелинейным относительно двух координат [25–32].

Можно констатировать, что для теоретического описания нелинейных процессов конвекции имеется довольно большой запас точных решений. Важную роль при изучении конвективных движений играет приближение Стокса [2–5]. Аппроксимацию Стокса используют для описания медленных (ползущих) течений, полагая приближенно равной нулю конвективную производную в уравнениях переноса импульса и теплопроводности [2–5]. Построение точных решений для линейной системы Обербека – Буссинеска имеет самостоятельный интерес. В данной статье рассматриваются точные решения системы Обербека – Буссинеска для течений Стокса в полиномиальных классах точных решений, а для установившихся течений выписаны формулы гидродинамических полей в явном виде.

## 2. Уравнения движения

Система уравнений Обербека – Буссинеска для описания конвективных течений жидкостей в неоднородном поле температуры записывается в векторной форме следующим образом [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g\beta T\mathbf{i}_3, \\ \frac{dT}{dt} &= \chi \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) использована аппроксимация Буссинеска для плотности  $\rho = \rho_0(1 - \alpha T)$ , где  $\rho_0$  – средняя плотность жидкости,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $T$  – отклонение температуры от равновесного значения;  $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$  – вектор скорости;  $P$  – отклонение давления от гидростатического, деленное на  $\rho_0$ ;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;



$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор Гамильтона;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  – орты декартовой прямоугольной системы координат;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$  – полная производная (индивидуальная производная, материальная производная, производная в частице, производная вдоль траектории), состоящая из суммы локальной (местной) и конвективной производных.

Рассмотрим далее приближение Стокса для системы (1). Полагаем в уравнениях (1) выполнение равенств для конвективных слагаемых  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$  и  $\mathbf{V} \cdot \nabla T = 0$  полной производной в эйлеровых координатах. После данной редукции, которая физически является асимптотической, получим следующие линейные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g \beta T \mathbf{i}_3, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) приведем в координатной форме записи в декартовой прямоугольной системе координат и запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g \beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Точное решение линейной системы уравнений в частных производных (3) будем находить в классе Линя – Сидорова – Аристова [16–18, 20]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t) + x u_1(z, t) + y u_2(z, t), \\ V_y &= V(z, t) + x v_1(z, t) + y v_2(z, t), \\ V_z &= w(z, t), \\ P &= P_0(z, t) + P_1(z, t)x + P_2(z, t)y + P_{11}(z, t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(z, t)xy + P_{22}(z, t)\frac{y^2}{2}, \\ T &= T_0(z, t) + T_1(z, t)x + T_2(z, t)y + T_{11}(z, t)\frac{x^2}{2} + T_{12}(z, t)xy + T_{22}(z, t)\frac{y^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4), полученные суперпозицией применения аддитивного и мультипликативного методов разделения переменных, описывают поле скоростей линейными формами

относительно координат  $x$  и  $y$ , а поля давления и температуры – квадратичными формами этих же координат. Коэффициенты линейных и квадратичных форм (4) зависят от третьей координаты  $z$  и времени  $t$ .

Отметим, что точное решение (4) может быть обобщено до представления гидродинамических полей следующими формами [25]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t) + xu_1(z, t) + yu_2(z, t) + u_3(z, t)\frac{x^2}{2} + u_4(z, t)xy + u_5(z, t)\frac{y^2}{2}, \\ V_y &= V(z, t) + xv_1(z, t) + yv_2(z, t) + v_3(z, t)\frac{x^2}{2} + v_4(z, t)xy + v_5(z, t)\frac{y^2}{2}, \\ V_z &= w(z, t) + xw_1(z, t) + yw_2(z, t), \\ P &= P_0(z, t) + P_1(z, t)x + P_2(z, t)y + P_3(z, t)\frac{x^2}{2} + P_4(z, t)xy + P_5(z, t)\frac{y^2}{2} + \\ &+ P_6(z, t)\frac{x^3}{3!} + P_7(z, t)\frac{x^2y}{2} + P_8(z, t)\frac{xy^2}{2} + P_9(z, t)\frac{y^3}{3!}, \\ T &= T_0(z, t) + T_1(z, t)x + T_2(z, t)y + T_{11}(z, t)\frac{x^2}{2} + T_{12}(z, t)xy + T_{22}(z, t)\frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

Изучение свойств данного решения не является целью данной статьи, но иллюстрирует возможность дальнейшего обобщения результатов.

Подставим формулы для гидродинамических полей (4) в систему уравнений (3). Получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -(P_1 + xP_{11} + yP_{12}) + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -(P_2 + yP_{22} + xP_{12}) + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial P_0}{\partial z} + x \frac{\partial P_1}{\partial z} + y \frac{\partial P_2}{\partial z} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial P_{11}}{\partial z} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial P_{22}}{\partial z} + xy \frac{\partial P_{12}}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \\ &+ g\beta \left( T_0 + xT_1 + yT_2 + \frac{x^2}{2} T_{11} + \frac{y^2}{2} T_{22} + xyT_{12} \right), \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} &= \chi \left( T_{11} + T_{22} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial z} + u_1 + v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  и  $y$  в (5), получим следующую систему, состоящую из девятнадцати нестационарных нелинейных уравнений в частных производных, для определения неизвестных девятнадцати функций:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - P_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - P_{11},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - P_{12}, & \frac{\partial V}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - P_2, \\
 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - P_{12}, & \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - P_{22}, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial P_0}{\partial z} - g\beta T_0, \\
 \frac{\partial P_1}{\partial z} &= g\beta T_1, & \frac{\partial P_2}{\partial z} &= g\beta T_2, \\
 \frac{\partial P_{11}}{\partial z} &= g\beta T_{11}, & \frac{\partial P_{12}}{\partial z} &= g\beta T_{12}, & \frac{\partial P_{22}}{\partial z} &= g\beta T_{22}, \\
 \frac{\partial T_0}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + \chi(T_{11} + T_{22}), \\
 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, & \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \\
 \frac{\partial T_{11}}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2}, & \frac{\partial T_{12}}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2}, & \frac{\partial T_{22}}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Система (6) состоит из четырнадцати однородных и неоднородных простейших уравнений типа теплопроводности и пяти уравнений градиентного типа.

### 3. Установившееся течение

Система уравнений (6) при установившемся течении редуцируется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 T_1}{dz^2} &= 0, & \frac{d^2 T_2}{dz^2} &= 0, \\
 \frac{d^2 T_{11}}{dz^2} &= 0, & \frac{d^2 T_{22}}{dz^2} &= 0, & \frac{d^2 T_{12}}{dz^2} &= 0, \\
 \frac{d^2 T_0}{dz^2} &= -(T_{11} + T_{22}), \\
 \frac{dP_1}{dz} &= g\beta T_1, & \frac{dP_2}{dz} &= g\beta T_2, \\
 \frac{dP_{11}}{dz} &= g\beta T_{11}, & \frac{dP_{12}}{dz} &= g\beta T_{12}, & \frac{dP_{22}}{dz} &= g\beta T_{22}, \\
 \nu \frac{d^2 U}{dz^2} &= P_1, & \nu \frac{d^2 u_1}{dz^2} &= P_{11}, \\
 \nu \frac{d^2 u_2}{dz^2} &= P_{12}, & \nu \frac{d^2 V}{dz^2} &= P_2, \\
 \nu \frac{d^2 v_1}{dz^2} &= P_{12}, & \nu \frac{d^2 v_2}{dz^2} &= P_{22}, \\
 \frac{dw}{dz} + u_1 + v_2 &= 0, \\
 \frac{dP_0}{dz} &= \nu \frac{d^2 w}{dz^2} + g\beta T_0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения системы (7) выписаны в том порядке, в котором далее осуществляется аналитическое интегрирование.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений тридцать первого порядка (7) начнем с определения коэффициентов квадратичной формы для поля температуры:

$$\begin{aligned} T_1 &= c_1 z + c_2, \quad T_2 = c_3 z + c_4, \\ T_{11} &= c_5 z + c_6, \quad T_{12} = c_7 z + c_8, \quad T_{22} = c_9 z + c_{10}, \\ T_0 &= -(c_5 + c_9) \frac{z^3}{3!} - (c_6 + c_{10}) \frac{z^2}{2!} + c_{11} z + c_{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, поле температуры для установившегося конвективного течения Стокса описывается следующим многочленом от трех переменных:

$$\begin{aligned} T &= -(c_5 + c_9) \frac{z^3}{3!} - (c_6 + c_{10}) \frac{z^2}{2!} + c_{11} z + c_{12} + (c_1 z + c_2) x + (c_3 z + c_4) y + \\ &+ (c_5 z + c_6) \frac{x^2}{2} + (c_7 z + c_8) xy + (c_9 z + c_{10}) \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

Далее определим горизонтальные градиенты давления и коэффициенты, стоящие перед квадратичными мономерами:

$$\begin{aligned} P_1 &= g\beta \left( c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z \right) + c_{13}, \\ P_2 &= g\beta \left( c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z \right) + c_{14}, \\ P_{11} &= g\beta \left( c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z \right) + c_{15}, \\ P_{12} &= g\beta \left( c_7 \frac{z^2}{2} + c_8 z \right) + c_{16}, \\ P_{22} &= g\beta \left( c_9 \frac{z^2}{2} + c_{10} z \right) + c_{17}. \end{aligned}$$

Для удобства коэффициенты для квадратичной формы, описывающей поле давления, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 &= g\beta \left( c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z + c_{13} \right), \\ P_2 &= g\beta \left( c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z + c_{14} \right), \\ P_{11} &= g\beta \left( c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z + c_{15} \right), \end{aligned}$$

$$P_{12} = g\beta \left( c_7 \frac{z^2}{2} + c_8 z + c_{16} \right),$$

$$P_{22} = g\beta \left( c_9 \frac{z^2}{2} + c_{10} z + c_{17} \right).$$

Перейдем к интегрированию уравнений для определения фоновых скоростей  $U$  и  $V$ , а также горизонтальных градиентов скоростей (компонент пространственного ускорения):

$$U = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_1 \frac{z^4}{4!} + c_2 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{13}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{18} z + c_{19},$$

$$V = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_3 \frac{z^4}{4!} + c_4 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{13}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{20} z + c_{21},$$

$$u_1 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_5 \frac{z^4}{4!} + c_6 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{15}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{22} z + c_{23},$$

$$u_2 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{16}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{24} z + c_{25},$$

$$v_1 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{16}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{26} z + c_{27}$$

$$v_2 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{c_{29}}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_{28} z + c_{29},$$

$$w = -\frac{g\beta}{\nu} \left( c_5 \frac{z^5}{5!} + c_9 \frac{z^5}{5!} + c_6 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^4}{4!} \right) -$$

$$-(c_{15} + c_{17}) \frac{z^3}{3!} - (c_{26} + c_{28}) \frac{z^2}{2} - (c_{27} + c_{29}) z + c_{30}.$$

Очевидно, что при соответствующей нормировке постоянных интегрирования выражения можно переписать следующим образом:

$$U = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_1 \frac{z^4}{4!} + c_2 \frac{z^3}{3!} + c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{18} z + c_{19} \right),$$

$$V = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_3 \frac{z^4}{4!} + c_4 \frac{z^3}{3!} + c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{20} z + c_{21} \right),$$

$$u_1 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_5 \frac{z^4}{4!} + c_6 \frac{z^3}{3!} + c_{15} \frac{z^2}{2} + c_{22} z + c_{23} \right),$$

$$u_2 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} + c_{16} \frac{z^2}{2} + c_{24} z + c_{25} \right),$$

$$v_1 = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} + c_{16} \frac{z^2}{2} + c_{26} z + c_{27} \right),$$

$$v_z = \frac{g\beta}{\nu} \left( c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^3}{3!} + c_{17} \frac{z^2}{2} + c_{28}z + c_{29} \right),$$

$$w = V_z = -\frac{g\beta}{\nu} \left( c_5 \frac{z^5}{5!} + c_9 \frac{z^5}{5!} + c_6 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^4}{4!} + (c_{15} + c_{17}) \frac{z^3}{3!} \right. \\ \left. + (c_{26} + c_{28}) \frac{z^2}{2} + (c_{27} + c_{29})z + c_{30} \right).$$

Линейные формы, описывающие горизонтальные скорости, в силу найденных решений являются многочленами трех переменных:

$$\frac{\nu}{g\beta} V_x = \left( c_1 \frac{z^4}{4!} + c_2 \frac{z^3}{3!} + c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{18}z + c_{19} \right) + x \left( c_5 \frac{z^4}{4!} + c_6 \frac{z^3}{3!} + c_{15} \frac{z^2}{2} + c_{22}z + c_{23} \right) + \\ + y \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} + c_{16} \frac{z^2}{2} + c_{24}z + c_{25} \right),$$

$$\frac{\nu}{g\beta} V_y = \left( c_3 \frac{z^4}{4!} + c_4 \frac{z^3}{3!} + c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{20}z + c_{21} \right) + x \left( c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} + c_{16} \frac{z^2}{2} + c_{26}z + c_{27} \right) + \\ + y \left( c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^3}{3!} + c_{17} \frac{z^2}{2} + c_{28}z + c_{29} \right).$$

Выражение для фонового давления после интегрирования имеет вид

$$P_0 = g\beta \left( -2(c_5 + c_9) \frac{z^4}{4!} - 2(c_6 + c_{10}) \frac{z^3}{3!} + c_{11} \frac{z^2}{2} + c_{12}z \right) - \\ - \nu \left( -(c_{15} + c_{17}) \frac{z^2}{2!} - (c_{26} + c_{28})z - (c_{27} + c_{29}) \right) + c_{31}.$$

Здесь  $c_i$ , где  $i = \overline{1; 31}$ , – постоянные интегрирования точного решения системы уравнений (7). Отметим, что частные случаи краевых задач (плоская конвекция) были рассмотрены в статьях [33–40], где была показана возможность стратификации гидродинамических полей скорости, давления и температуры.

#### 4. Заключение

В статье представлено точное решение для медленных (ползущих) конвективных течений вязкой жидкости. Аппроксимация конвективной производной выполнена по Стоксу. В этом случае нелинейная система Обербека – Буссинеска редуцируется к линейной системе уравнений в частных производных. Было показано, что для установившихся течений поле скорости, поле давления и поле температуры в классе Линя – Сидорова – Аристова описываются многочленами от трех переменных. Эти многочлены иллюстрируют сложную стратификацию гидродинамических полей для широкого класса граничных условий.

## Литература

1. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. Ser. Technical Memorandum. – No. 1407. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
3. Гершуни Г. З. Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М. : Наука, 1989. – 318 с.
4. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection // *Sov. Phys. Usp.* – 1991. – 34 (9). – P. 737–776. – DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Mathematical Models of Convection. Ser. De Gruyter Studies in Mathematical Physics / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin : Walter De Gruyter, 2012. – 417 p. – DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2011, 206 с.
7. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1966. – No. 7. – P. 43–44. – DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // *Ученые записки Пермского государственного университета. Сер. Гидродинамика.* – 1972. – № 4. – С. 129–140.
9. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного течения жидкости // *Журнал технической физики.* – 1953. – Т. 23, № 10. – С. 1838–1844.
10. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // *Quart. Appl. Math.* – 1954. – Vol. 12, No. 3. – P. 209–233. – DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // *Fluid Dynaics.* – 2014. – Vol. 49, No. 4. – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
12. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2011. – Vol. 52, No. 2. – P. 212–217. – DOI: 10.1134/S0021894411020088.
13. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // *Нелинейная динамика.* – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 651–657.
14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2016. – Vol. 50 (2). – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.
15. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
17. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 1989. – Vol. 30, No. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук : 01.02.05. – Владивосток, 1990. – 303 с.
19. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // *Fluid Dynamics.* – 2013. – Vol. 48. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.

20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2022. – Vol. 18, No. 3. – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. – 2021. – Vol. 25 (3). – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.
23. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A New class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with allowance for internal heat release // *Optics and Spectroscopy*. – 2022. – Vol. 130, No. 6. – P. 365–370. – DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
24. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction / N. Burmasheva, S. Ershkov, E. Prosviryakov, D. Leshchenko // *Fluids*. – 2023. – Vol. 8 (4). – P. 123. – DOI: 10.3390/fluids8040123.
25. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2019. – Vol. 53, No. 1. – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
26. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
27. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid // *Theor. Found. Chem. Eng.* – 2022. – Vol. 56, No. 3. – P. 331–338. – DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // *Technical Physics Letters*. – 2022. – Vol. 48. – P. 258–262. – DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики для описания конвективных течений бинарных жидкостей // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2023. – Т. 25, № 4. – С. 447–462. – DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1\\_393.html](http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html)
31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)
32. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2023. – Iss. 5. – P. 39–52. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1\\_393.html](http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html)
33. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное конвективное течение Куэтта–Хименца при квадратичном нагреве нижней границы слоя жидкости // *Нелинейная динамика*. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 69–79. – DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova S. S., Prosviryakov E. Y. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary // *Russian Aeronautics*. – 2016. – Vol. 59, No. 4. – P. 529–535. – DOI: 10.3103/S1068799816040140.



35. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12, № 2. – С. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Плоская линейная конвекция Бенара-Рэлея при квадратичном нагреве верхней границы слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2015. – № 2. – С. 6–13.
37. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2014. – № 3. – С. 7–12.
38. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физ.-мат. науки». – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118. – DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2\\_170.html](http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html)
40. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. – 2018. – Vol. 22 (3). – P. 532–548. – DOI: 10.14498/vsgtu1638.

Received: 22.02.2024

Revised: 29.02.2024

Accepted: 26.04.2024

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.050-060



## THE FEATURES OF INTERLAYER FRACTURE OF COMPOSITE MATERIALS WITH A VARIABLE LAYUP ANGLE UNDER IMPACT LOADING



L. A. Bokhoeva<sup>1, 3, a)</sup>, A. B. Baldanov<sup>1, b)</sup>, \* and V. E. Rogov<sup>2, c)</sup>



<sup>1</sup>East Siberia State University of Technology and Management,  
40V/1 Klyuchevskaya St., Ulan-Ude, Buryat Rep., 670013, Russia

<sup>2</sup>Baikal Institute of Nature Management, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
6 Sakhianovoy St., Ulan-Ude, Buryat Rep., 670047, Russia

<sup>3</sup>Irkutsk National Research Technical University,  
83 Lermontova St., Irkutsk, 664074, Russia

a)  <https://orcid.org/0000-0001-6986-4307>  bohoeva@yandex.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0001-7655-215X>  aldarbaldanov@gmail.com;

c)  <https://orcid.org/0000-0002-2249-0827>  rogov54v@mail.ru

\*Corresponding author. Email: aldarbaldanov@gmail.com

Address for correspondence: ul. Klyuchevskaya, 40V/1, Ulan-Ude, 670013, Russia  
Tel.: +7 (951) 630-4150

Interlayer defects in structural components made of composite materials are caused by the imperfection of the manufacturing process, complex interactions of the constituents, and the effect of impact loads. The presence of these defects decreases the strength of such components and severely affects residual strength. The paper presents a numerical and experimental study of the behavior of a composite material plate with a variable layup angle under impact loading. Impactor velocities before and after multilayer plate perforation, as well as the dimensions of delamination-type defects, are determined experimentally. The Ansys LS-DYNA software in double precision mode is used to simulate the failure of composite plates under impact loading. It has been found that a significant contribution to the decrease in the impact energy is made by the delamination dimensions depending on the layup angle in the stack. The delamination area is related to the residual velocity of the impactor; namely, the larger the delamination area, the greater the decrease in the impactor velocity.

**Keywords:** composite materials, impact loading, numerical simulation, experiment, layup angle, delamination, multilayer specimens, plate, impactor

### Acknowledgment

*The work was subsidized by the grant Young Scientists of the ESSUTM 2023 and grant No. 412 21.12.2023 of the Buryat Republic. It was performed under the state assignment for the Baikal Institute of Nature Management SB RAS, No. 0273-2021-0007.*

### References

1. Dubinskiy, S.V., Feygenbaum, Yu.M., Selikhov, A.A., Gvozdev, S.A., and Ordyntsev, V.M. Study of accidental in-service impacts into wing of commercial aircraft. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2016, 18 (4–3), 604–611. (In Russian).
2. Feygenbaum, Y.M. and Dubinskiy, S.V. Influence of accidental in-service damages on structural durability and aircraft operation life. *Nauchnyi Vestnik MGTUGA*, 2013, 187, 83–91. (In Russian).

3. Ushakov, A., Stewart, A., Mishulin, I., and Pankov, A. Probabilistic design of damage tolerant composite aircraft structures. Report DOT/FAA/AR-01/55, U.S. Dept. of Transportation, Federal Aviation Administration, Washington DC, 2002.
4. Fawcett, A.J. and Oaks, G.D. Boeing composite airframe damage tolerance and service experience, workshop for composite damage tolerance and maintenance. Presentation #2 of Session 1, National Institute for Aviation Research, Chicago, IL, 2006.
5. Andreev, A.S., Bychkov, A.S., and Kondratyev, A.V. Operational load-carrying capacity of domestic and foreign transport category aircraft structures made of polymeric composite materials. Part 2. Analysis of types, nature and frequency of operational damage. *Vestnik ONMU*, 2016, 2 (48), 180–194. (In Russian).
6. Sapozhnikov, S.B. and Zhikharev, M.V. Types of damage of woven GFRP and repair of low velocity impact delaminations. *Composites and Nanostructures*, 2014, 6 (3), 68–75. (In Russian).
7. Abrate, S. Impact on laminated composite materials. *Applied Mechanics Reviews*, 1991, 44 (4), 155–190. DOI: 10.1115/1.3119500.
8. Olsson, R. Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, 31 (8), 879–887. DOI:10.1016/S1359-835X(00)00020-8.
9. Cantwell, W.J. and Morton, J. The impact resistance of composite materials – a review. *Composites*, 1991, 22 (5). DOI: 10.1016/0010-4361(91)90549-V.
10. Medvedskiy, A.L., Martirosov, M.I., and Khomchenko, A.V. Numerical analysis of layered composite panel behavior with interlaminar defects subject to dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2019, 15 (2), 127–134. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-127-134. (In Russian).
11. *Interlaminar Responce of Composite Materials*, ed. by N.J. Pagano, Elsevier Science Publishers Ltd, North Holland, 1989, 268 p.
12. Postnov, V.I., Postnova, M.V., Barannikov, A.A., and Veshkin, E.A. Temporary laminated stoppers: materials, properties, application. *Trudy VIAM*, 2020, 4–5, 32–41. DOI:10.18577/2307-6046-2020-0-45-32-41. (In Russian).
13. Bohoeva, L.A., Baldanov, A.B., and Chermoshentseva, A.S. Optimal structure of multi-layer wing console of unmanned aerial vehicle with experimental validation. *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2020, 27 (1), 65–75. DOI: 10.34759/vst-2020-1-65-75. (In Russian).
14. Bokhoeva, L.A., Rogov, V.E., Baldanov, A.B., and Ivanov, Yu.N. Simulation of an optimal multilayer plate from composite materials for speed reduction after impact. *Mashinostroenie i Inzhenernoe Obrazovanie*, 2022, 3–4 (70), 3–11. (In Russian).
15. Heimbs, S., Heller, S., and Middendorf, P. Simulation of low velocity impact on composite plates with compressive preload. In: *Proceeding of the 7th LS-DYNA Anwenderforum*, Bamberg, Germany, 2008.
16. Hou, J.P., Petrinic, N., Ruiz, C., and Hallett, S.R. Prediction of impact damage in composite plates. *Composites Science and Technology*, 2000, 60 (2), 273–281. DOI: 10.1016/S0266-3538(99)00126-8.

Подана в журнал: 22.02.2024

УДК 620.1

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.050-060



## ОСОБЕННОСТИ МЕЖСЛОЙНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ УКЛАДКИ СЛОЕВ



Л. А. Бохоева<sup>1, 3, а)</sup>, А. Б. Балданов<sup>1, б), \*</sup>, В. Е. Рогов<sup>2, в)</sup>



<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления», ул. Ключевская, д. 40В, строение 1, г. Улан-Удэ, Республика Бурятия, 670013, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Байкальский институт природопользования Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Сахьяновой, д. 6, Улан-Удэ, Республика Бурятия, 670047, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет», ул. Лермонтова, д. 83, Иркутск, 664074, Россия

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-6986-4307>  bohoeva@yandex.ru;

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-7655-215X>  aldarbaldanov@gmail.com;

<sup>в)</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2249-0827>  rogov54v@mail.ru

\*Ответственный автор. Электронная почта: aldarbaldanov@gmail.com

Адрес для переписки: ул. Ключевская, д. 40В, строение 1, г. Улан-Удэ, Республика Бурятия, 670013, Россия  
Тел.: +7 (951) 630-41-50

Наличие в элементах конструкций из композиционных материалов межслойных дефектов, связанных с несовершенством технологии их изготовления, сложными взаимодействиями компонентов, воздействием ударных нагрузок, приводит к снижению прочности таких элементов и оказывает серьезное влияние на остаточную прочность. В работе проведено численно-экспериментальное исследование поведения при ударном нагружении пластины из композиционного материала с переменным углом укладки слоев. Экспериментально определены скорости ударника до и после пробития многослойной пластины, а также размеры межслойных дефектов в виде расслоений. Для моделирования процесса разрушения пластин из композиционных материалов при ударном нагружении использовали программное обеспечение Ansys LS-DYNA в режиме двойной точности. Выявлено, что значительную роль в снижении энергии удара играют размеры расслоений в зависимости от угла укладки слоев в пакете. Получена зависимость между площадью расслоения и остаточной скоростью ударника: чем больше площадь дефекта типа «расслоение», тем больше снижение скорости ударника.

**Ключевые слова:** композиционные материалы, ударное нагружение, численное моделирование, эксперимент, угол укладки слоев, расслоение, многослойные образцы, пластина, ударник

### 1. Введение

Использование многослойных композиционных материалов в машиностроении, особенно в авиастроении, требует учета присущих им специфических особенностей, таких как вероятность присутствия скрытых дефектов в виде нарушения сплошности материала по поверхностям раздела отдельных слоев. Наличие в элементах конструкций из композиционных материалов (КМ) межслойных дефектов, связанных с несовершенством технологии их изготовления, сложными взаимодействиями компонентов, воздействием ударных нагрузок приводит к снижению прочности таких элементов и оказывает серьезное влияние на остаточную

прочность. Образование ударных нагрузок на летательные аппараты (ЛА) из КМ, причины их появления и величина ударов подробно отражены в исследованиях [1–4]. Отмечено, что удары приводят к размягчению КМ, вмятинам, пробоинам [5]. Особенно опасны повреждения в виде расслоений, которые возникают при воздействии посторонних объектов (отлетевшие с корпуса ЛА осколки льда, град и т. п.) на корпуса ЛА, гоночных болидов, легких судов, обшивки скоростных поездов, малых БПЛА самолетного типа. Такие расслоения могут привести к снижению несущей способности конструкций на величину до 45 %, особенно при сжимающих нагрузках [6]. Поэтому необходимы дополнительные исследования по воздействию скоростных ударных нагрузок (от 400 до 1000 м/с) на многослойные элементы конструкций из КМ. Исследования по влиянию средних и высоких скоростей на КМ отмечены в работах [7–9]. Такие удары приводят обычно к сквозному пробитию с образованием обширного расслоения. В работе [11] предложено несколько способов для уменьшения размеров межслойных дефектов:

- 1) последовательность укладки слоев композита;
- 2) усиление зоны свободной кромки прошивкой или обмоткой;
- 3) использование пластичных смол;
- 4) изменение механических свойств отдельных слоев в зоне, опасной с точки зрения расслоений;
- 5) добавление или замена некоторых слоев на пластичные материалы, подобные адгезионной пленке;
- 6) использование стопперов [12].

Свойства КМ зависят от свойств матрицы, волокон и способа армирования. Известны следующие схемы укладки пакета волокнистых КМ: однонаправленная схема (композит образован из слоев, армированных параллельными непрерывными волокнами по основе под углом 0 или 90°); ортотропная схема (чередование слоев в одном направлении по основе и по утку под углом 0 и 90°); квазиизотропная схема (чередование слоев с продольной и поперечной укладкой под углом ±45°). Наиболее распространенной является квазиизотропная укладка, которая позволяет получать равнопрочную укладку в плоскости пакета. Основными направлениями считаются 0 (главная ось нагрузки), +45, -45 и 90° (нагрузки, поперечные по отношению к основной оси). При проектировании и изготовлении силовых конструкций возможно управлять структурой КМ и проектировать элементы конструкций в зависимости от действия нагрузок, поэтому схема укладки волокон в слое в пакете КМ может существенно меняться. В работе [13] авторы предложили оптимальную схему укладки волокон в слое при действии постоянной статической нагрузки. Однако исследований, направленных на оценку влияния углов укладки слоев слоистого композиционного материала на межслойные дефекты от действия ударной нагрузки, недостаточно.

Целью работы является исследование влияния угла укладки волокон в слое многослойных КМ на размеры межслойных дефектов при ударном нагружении. Рассмотрены следующие варианты укладки стеклоткани:

- однонаправленная ([0] или [90]);
- ортотропная ([±45] или [0/90]);
- квазиизотропная ([0/90/45]).

## 2. Эксперимент

Предметом исследования является слоистый композиционный материал из стеклопластика, изготовленный по технологии прессования (согласно ГОСТ 33347) из стеклоткани. Матрица – эпоксидная смола ЭД-20, отверждающий агент – полиэтиленполиамин ТУ 2413-357-00203447-99. Отношение связующей матрицы к отвердителю – 10:1. Образцы изготавливались по следующей технологии: слои из стеклоткани Т10 нарезали в заданный размер; на подготовленную стальную оснастку укладывали тефлоновую пленку (для лучшего последу-

ющего снятия изделий); каждый пропитанный клеем слой стеклопластика пропускали через вальцы для равномерного распределения связующего вещества; на пленку последовательно накладывали заданное количество слоев ткани. Пластины накрывали тефлоновой пленкой и ответной стальной плитой. Оснастку устанавливали в гидравлический пресс (сила давления – 2 т). Выдержка пластин под давлением – 24 часа (рис. 1).



Рис. 1. Изготовление многослойных образцов из композиционных материалов

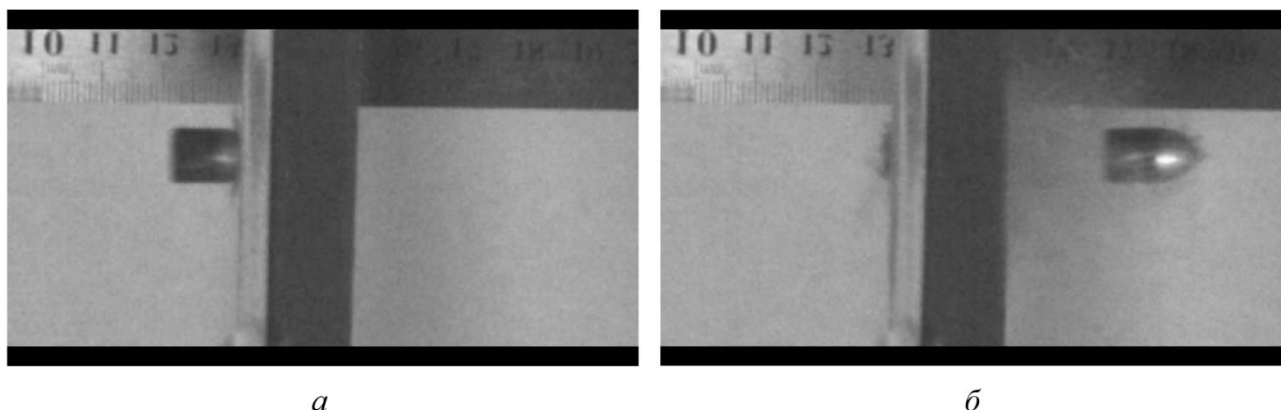


Рис. 2. Сквозное пробитие КМ: момент удара (а); пробитие (б)



Рис. 3. Образцы после испытания

Изготовлены образцы из 5, 10 и 20 слоев с различными схемами укладки слоев: однонаправленная укладка  $[0]_5$ ,  $[0]_{10}$ , двунаправленная укладка  $[0/90]_{10}$ , квазиизотропные последовательности укладки  $[\pm 30/90]_8$ , а также слои с укладкой  $[0_2/\pm 45_2/90_2]_0_2$ . После изготовления образцов были проведены испытания на удар с использованием высокоскоростной камеры для определения скорости удара и разрушения КМ. Образец зажимали болтовым соединением рамок по торцам КМ, обеспечивая жесткую заделку. Масса ударника составляет 7,45 г,

диаметр – 9,01 мм. На фотографиях высокоскоростной камеры (рис. 2) представлен натуральный эксперимент на удар стеклопластика из 20 слоев с укладкой  $[0/90]_{10}$ . Из снимков видно, что ударник не деформируется после пробития пластины. Определена скорость до удара (360 м/с) и после пробития (307 м/с), а также размеры расслоений. На фотографиях (рис. 3) представлены образцы после испытаний.

### 3. Конечно-элементный анализ

На основе полученных экспериментальных данных испытаний на удар построили численную модель удара с учетом скорости ударника после пробития, размеров и формы повреждений для многослойных КМ.

Для моделирования процесса разрушения пластин из КМ при ударном нагружении использовали программное обеспечение Ansys LS-DYNA в режиме двойной точности. Конечно-элементные сетки пластины и ударника представлены на рис. 4. Ударник представлен как жесткое тело. Композиционный материал смоделирован из отдельных слоев, состоящих из 4320 элементов, сгущенных в области удара. По торцам пластина жестко закреплена. Для решения нелинейной контактной задачи в Ansys LS-DYNA заложены следующие методы: метод штрафных функций, расширенный метод Лагранжа, метод множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов Лагранжа, метод внутренних многоточечных связей. Для решения контактной задачи и моделирования расслоения использован метод штрафного контакта Contact Automatic One-Way Surface-to-Surface Tiebreak, основанный на применении контактной «пружины» для определения контактной области между двумя поверхностями. Механические характеристики слоя, которые были определены в работе [14], даны в табл. 1. Расчет механических характеристик заключается в следующем: экспериментально определяются характеристики волокна и матрицы и их процентное содержание в слое. Определяются жесткостные характеристики отдельного слоя в зависимости от угла укладки волокон в слое: жесткость на растяжение вдоль и поперек волокон и на сдвиг. После определения жесткостных характеристик для одного слоя переходят к другому слою и суммируют жесткости.

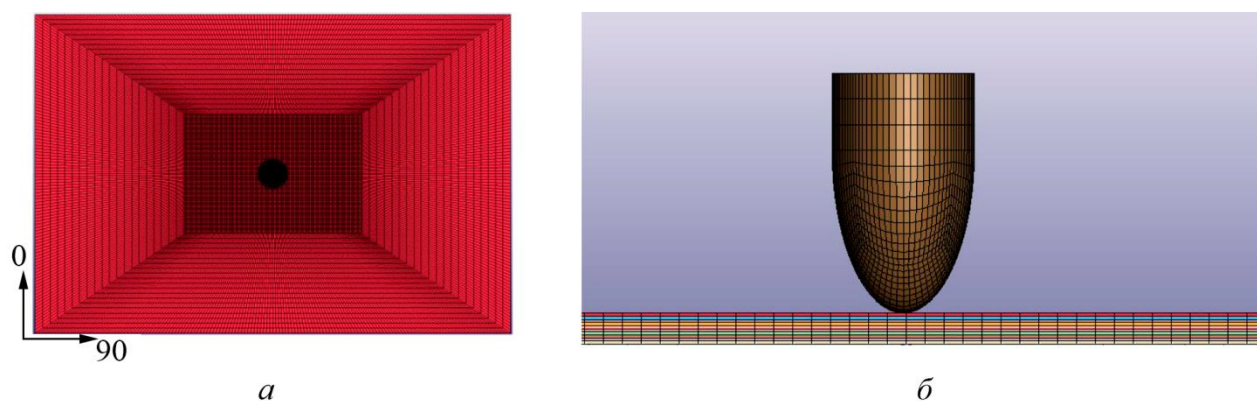


Рис. 4. Конечно-элементная модель пластины из КМ и ударника в программном комплексе Ansys LS-DYNA: вид сверху пластины и ударника (а); вид спереди (б)

Для моделирования слоистых ортотропных материалов, подверженных динамическому нагружению, была использована модель материала MAT54 (MAT\_ENHANCED\_COMPOSITE\_DAMAGE) [15], учитывающая 4 критерия разрушения Хашина для волокна и матрицы:

при растяжении волокон: если  $\sigma_{11} \geq 0$ , тогда  $E_1 = E_2 = G_{12} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$ ,

$$e_f^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right) + \beta \left( \frac{\sigma_{12}}{S_c} \right) - 1;$$

при сжатии волокон: если  $\sigma_{11} < 0$ , тогда  $E_1 = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$ ,

$$e_c^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 - 1;$$

при растяжении матрицы: если  $\sigma_{22} \geq 0$  тогда  $E_2 = \nu_{21} = G_{12} = 0$ ,

$$e_m^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_c} \right)^2 - 1;$$

при сжатии матрицы: если  $\sigma_{22} > 0$ , тогда  $E_2 = \nu_{12} = \nu_{21} = G_{12} = 0$ ,

$$e_d^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{2S_c} \right)^2 + \left[ \left( \frac{Y_c}{2S_c} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_c} \right)^2 - 1,$$

где прочность волокна на растяжение  $X_t$ , прочность волокна на сжатие  $X_c$ , прочность матрицы на растяжение  $Y_t$ , прочность матрицы на сжатие  $Y_c$  и прочность на сдвиг  $S_c$  определены экспериментально (табл. 1). Переменные  $e_f, e_c, e_m, e_d$  – функции критерия прочности Хашина. Числовые индексы 1 и 2 – осевое и поперечное направления волокна,  $\square$  – входной параметр, позволяющий явно определить влияние сдвига в режиме растяжения волокон.

Таблица 1

Входные параметры для МАТ54

Модуль упругости	МПа	Модуль сдвига	МПа	Коэффициент Пуассона	
$E_1$	$5,225 \cdot 10^4$	$G_{12}$	$4,459 \cdot 10^4$	$\nu_{12}$	0,253
$E_2$	$1,759 \cdot 10^4$	$G_{23}$	$3,962 \cdot 10^4$	$\nu_{13}$	0,253
$E_3$	$1,759 \cdot 10^4$	$G_{31}$	$4,459 \cdot 10^4$	$\nu_{23}$	0,36
Прочность при растяжении	МПа	Прочность на сжатие	МПа	Прочность на сдвиг	МПа
$X_t$	272,3	$X_c$	168,9	$S_{12}$	120
$Y_t$	64,1	$Y_c$	285,4	$S_{13}$	60

Для моделирования распространяющихся трещин использовали критерий разрушения Chang–Chang [16]. Результаты численного моделирования и расчета представлены на рисунках 5–7. На рис. 5 представлены размеры расслоений, полученных экспериментально и численным моделированием. Длина экспериментально полученного максимального расслоения  $L_{\max.э} = 4,4$  см, длина численно полученного дефекта  $L_{\max.ч} = 4,3$  см, расхождение составляет 3–4 % (рис. 5 а). Площадь дефекта и сквозное повреждение (рис. 5 б) послойно практически совпадает (1–2 % расхождения). Значения разрушающих деформаций послойно определяли



с помощью инструмента MAT54, используя замедленное разрушение конечного элемента, послойное разрушение нельзя определить экспериментально (рис. 6).

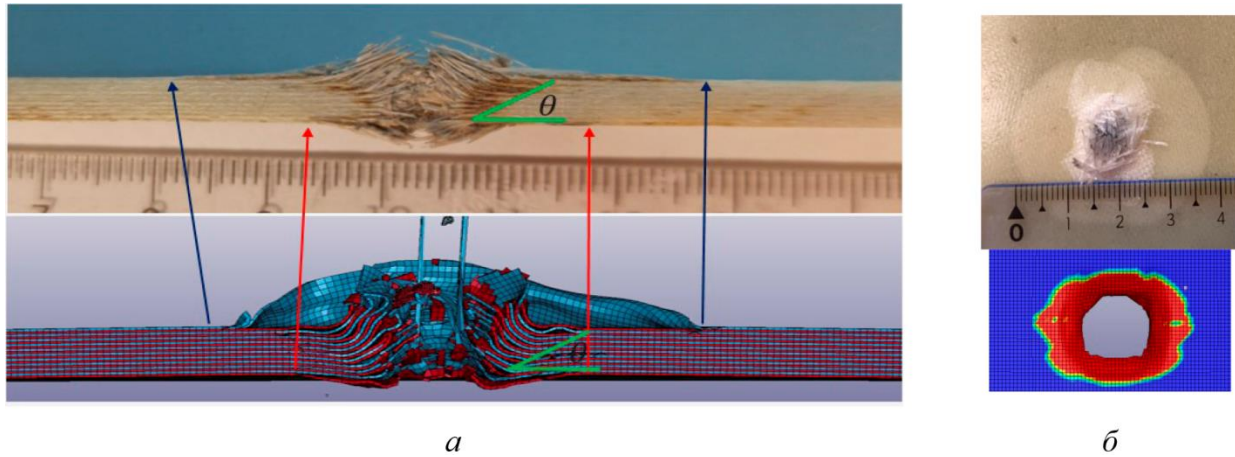


Рис. 5. Размеры расслоений в многослойных КМ, полученные экспериментально и численно: длина дефекта (а); площадь дефекта (б)

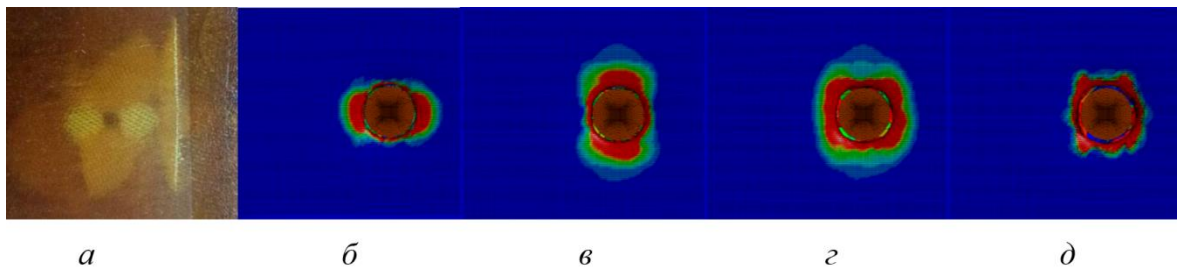


Рис. 6. Послойное разрушение КМ: результат экспериментального пробития пятислойной пластины (а); моделирование расслоения между слоями 1 и 2 (б), 2 и 3 (в), 3 и 4 (з), 4 и 5 (д)

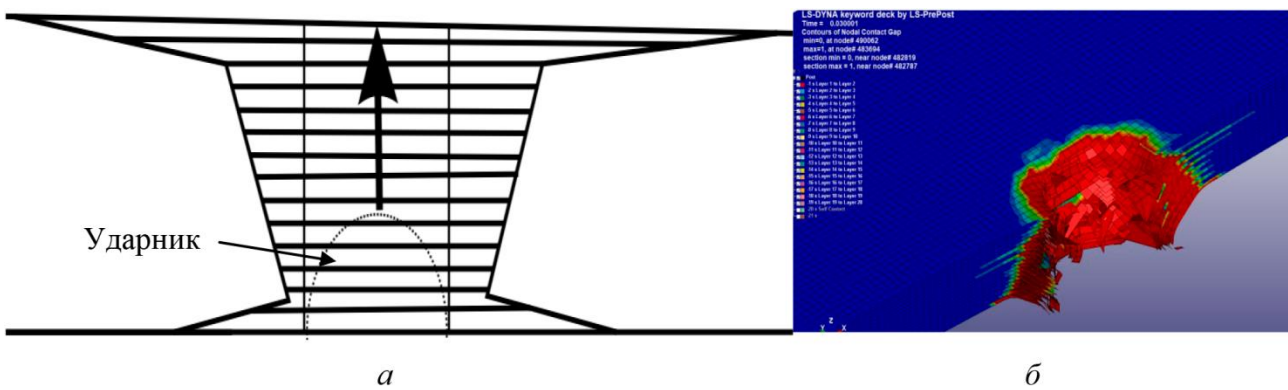


Рис. 7. Форма повреждения пакета КМ с 20 слоями при пробитии ударником: схема повреждения (а); модель повреждения (б)

На рис. 7 а и 8 а представлены схемы повреждения пластины от удара (срезы расщепления слоев), которые первоначально параллельны поверхности КМ. На рис. 7 представлена пластина из 20 слоев, а на рис. 8 – пластина из 10 слоев. Красным цветом отмечены зоны разрушения (рис. 7 б, 8 б), полученные нарушением межслойной прочности за счет растягивающих сдвиговых напряжений, вызванных распространением интенсивной волны сжатия и волны разгрузки. Области расслоения образуют обширные зоны снижения прочности клеявого соединения (зеленый цвет на рис. 7 б). Расслоения имеют эллиптическую форму, вытянутую вдоль направления армирования нижнего слоя от точки удара (рис. 7 б). Повреждения

для 20-слойных образцов, схематично показанные на рис. 7 *a*, в 3–4 раза превышают размер ударника. Для тонких пластин (до 10 слоев) форма повреждения имеет упрощенный вид конуса (рис. 8 *a*). Во время удара направление слоев меняется вблизи стенок повреждения пластины: ближе к лицевой поверхности удара они поворачиваются в сторону, противоположную направлению удара, за счет действия волны разгрузки, что соответствует эксперименту на 1-м кадре (рис. 2 *a*). Вблизи тыльной поверхности слои поворачиваются в направлении удара. Таким образом, отдельные слои играют роль своеобразных внутренних меток, фиксирующих картину течения материала.

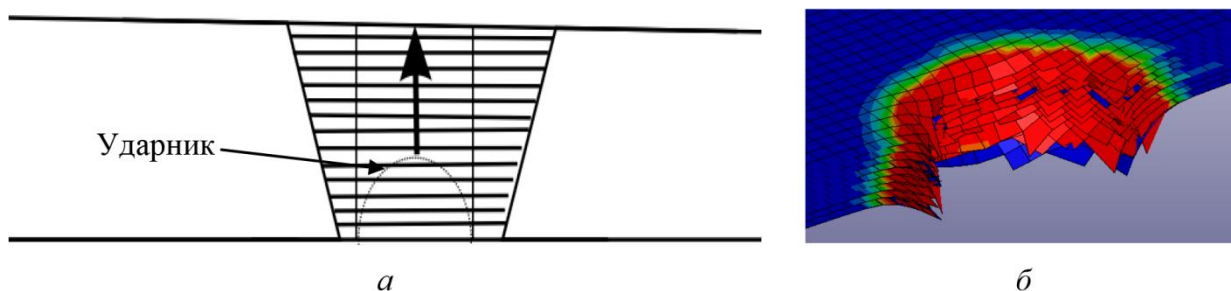


Рис. 8. Форма повреждения пакета из КМ толщиной до 10 слоев при пробитии ударником: схема повреждения (*a*); модель повреждения (*б*)

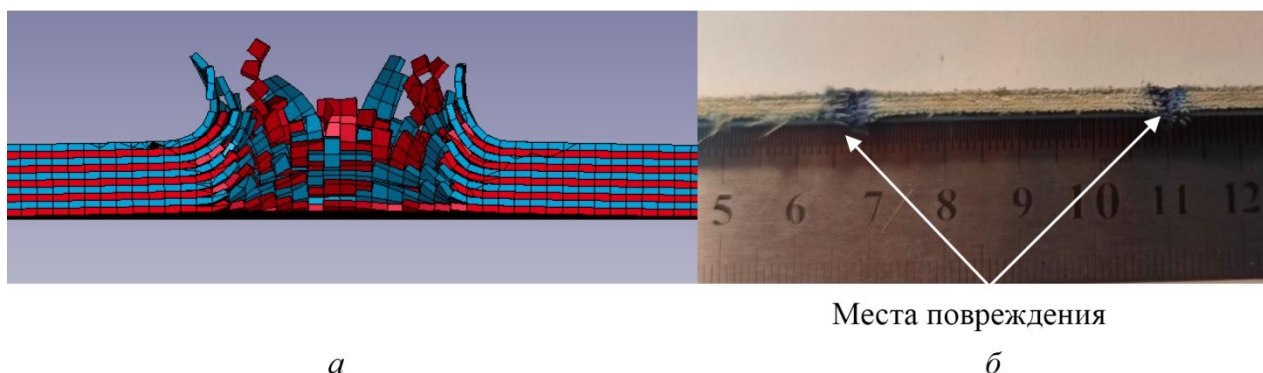


Рис. 9. Повреждение пластины: моделирование послойного повреждения (*a*); эксперимент (*б*)

Таблица 2

Результаты численного расчета размеров повреждений и остаточной скорости после удара

Укладка	№ 1 [0] <sub>10</sub>	№ 2 [±45] <sub>5</sub>	№ 3 [0 <sub>2</sub> /±45 <sub>2</sub> /90 <sub>2</sub> ] <sub>0</sub> <sub>2</sub>	№ 4 [0/90/±45] <sub>2</sub> <sub>0</sub> <sub>2</sub>	№ 5 [±30/90] <sub>3</sub> <sub>3</sub> <sub>0</sub>	№ 6 [0/90] <sub>10</sub>
Общая площадь повреждения, мм <sup>2</sup>	1732,9	1589,1	1620,5	1546,7	1835,4	1839,6
Остаточная скорость, м/с	310	315	312	316	309	307

В табл. 2 представлены результаты численного расчета размеров повреждений для различных вариантов укладки слоев 10-слойной пластины из КМ и остаточной скорости после удара. Начальная скорость удара составляет 360 м/с. Наблюдается зависимость между площадью расслоения и остаточной скоростью ударника.

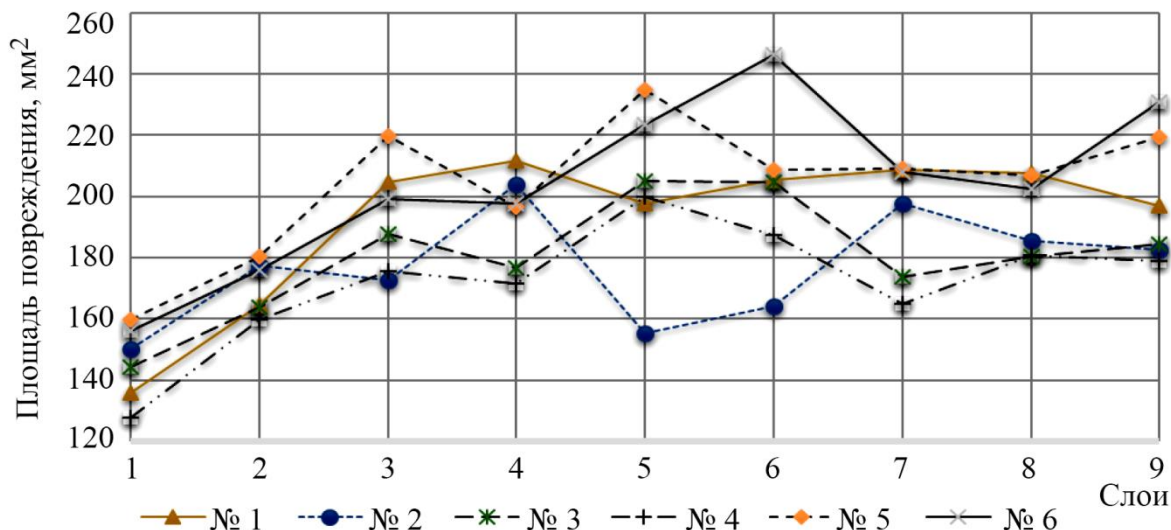


Рис. 10. Размеры повреждений между слоями КМ из 10 слоев для 6 вариантов укладки слоев: № 1 –  $[0]_{10}$ ; № 2 –  $[\pm 45]_5$ ; № 3 –  $[0_2/\pm 45_2/90_2]_{10}$ ; № 4 –  $[0/90/\pm 45]_2 0_2$ ; № 5 –  $[\pm 30/90]$ ; № 6 –  $[0/90]_{10}$

Площади повреждений между каждым слоем для 6 вариантов разной укладки слоев КМ представлены на графике (рис. 10). Отметим, что постепенный рост повреждений идет до 4–5-го слоев, далее идет затухание повреждений. Такие расчеты можно получить только численно, без экспериментального подтверждения.

#### 4. Заключение

В слоистых композиционных образцах при скоростном ударе образуются межслойные дефекты типа «расслоение», которые зависят от толщины пластины и углов укладки слоев. Для пластин толщиной до 10 слоев повреждения имеют форму усеченного конуса. Площадь расслоения увеличивается, начиная с первых слоев, подобно дереву расслоений. После 3–4-го слоя размеры повреждений имеют большие расхождения, особенно у пластины с укладкой слоев  $[\pm 45]_5$ . Для пластин из 20 слоев повреждения имеют форму трех усеченных конусов, образуются обширные расслоения в точке удара и с тыльной стороны пластины. Снижение скорости ударника зависит от угла укладки слоев в пакете из КМ. Наибольшее снижение скорости ударника достигнуто при укладке  $[0/90]_{10}$ . Наибольшее снижение скорости ударника достигнуто при укладке  $[0/90]_{10}$ . Выявлена зависимость между площадью расслоения и остаточной скоростью ударника: чем больше площадь дефекта типа «расслоение», тем больше снижение скорости ударника за счет диссипации энергии удара.

#### Благодарность

Работа выполнена в рамках гранта «Молодые ученые ВСГУТУ 2023», гранта в форме субсидий РБ № 412 от 21.12.2023, государственного задания № 0273-2021-0007 Байкальскому институту природопользования СО РАН.

#### Литература

1. Закономерности реализации случайных ударных воздействий на конструкцию крыла коммерческого самолёта / С. В. Дубинский, Ю. М. Фейгенбаум, А. А. Селихов, С. А. Гвоздев, В. М. Ордынцев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 4–3. – С. 604–611.

2. Фейгенбаум Ю. М., Дубинский С. В. Влияние случайных эксплуатационных повреждений на прочность и ресурс конструкции воздушных судов // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2013. – № 1 (187). – С. 83–91.
3. Ушаков А. Е. Методологические основы конструктивно-технологического обеспечения живучести авиаконструкций, выполненных из полимерных композитных материалов : дис. ... докт. техн. наук : 05.07.04. – Москва, 1992. – 418 с.
4. Лебедев И. К. Эксплуатационная долговечность элементов авиаконструкций из композиционных материалов : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.14. – Москва, МГТУГА, 2011. – 212 с.
5. Андреев А. В., Бычков А. С., Кондратьев А. В. Эксплуатационная несущая способность конструкций отечественных и зарубежных воздушных судов транспортной категории из полимерных композиционных материалов. Ч. 2. Анализ видов, характера и частоты эксплуатационных повреждений // Вісник Одеського національного морського університету. – 2016. – Вип. 2 (48). – С. 180–194.
6. Жихарев М. В. Оценка прочности высоконагруженных пластин из композитных материалов при локальном ударном воздействии : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04. – Челябинск, 2019. – 125 с.
7. Abrate S. Impact on laminated composite materials // Applied Mechanics Reviews. – 1991. – Vol. 44 (4). – DOI: 10.1115/1.3119500.
8. Olsson R. Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates // Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2000. – Vol. 31 (8). – P. 879–887. – DOI: 10.1016/S1359-835X(00)00020-8.
9. Cantwell W. J., Morton J. The impact resistance of composite materials – a review // Composites. – 1991. – Vol. 22 (5). – DOI:10.1016/0010-4361(91)90549-V.
10. Хомченко А. В. Численное моделирование поведения слоистых элементов конструкций из полимерных композиционных материалов при наличии внутренних дефектов под действием динамических нагрузок : дис. ... канд. техн. наук : 1.1.8. – Москва, 2024. – 142 с.
11. Межслойные эффекты в композитных материалах / пер. с англ.; под ред. Н. Пэйгано. – Москва : Мир, 1993. – 343 с.
12. Temporary laminated stoppers: materials, properties, application / V. I. Postnov, M. V. Postnova, A. A. Barannikov, E. A. Veshkin // Proceedings of VIAM. – 2020. – № 4–5 (88). – P. 32–41. – DOI: 10.18577/2307-6046-2020-0-45-32-41.
13. Бохоева Л. А., Балданов А. Б., Чермошенцева А. С. Разработка оптимальной конструкции многослойной консоли крыла беспилотного летательного аппарата с экспериментальным подтверждением // Вестник Московского авиационного института. – 2020. – Т. 27 (1). – С. 65–75. – DOI: 10.34759/vst-2020-1-65-75.
14. Моделирование оптимальной многослойной пластины из композиционных материалов для снижения скорости после удара / Л. А. Бохоева, В. Е. Рогов, А. Б. Балданов, Ю. Н. Иванов // Машиностроение и инженерное образование. – 2022. – № 3–4 (70). – С. 3–11.
15. Heimbs S., Heller S., Middendorf P. Simulation of low velocity impact on composite plates with compressive preload // Proceeding of the 7th LS-DYNA Anwenderforum. – Bamberg, Germany, 2008.
16. Prediction of impact damage in composite plates / J. P. Hou, N. Petrinic, C. Ruiz, S. R. Hallett // Composites Science and Technology. – 2000. – Vol. 60 (2). – P. 273–281. – DOI: 10.1016/S0266-3538(99)00126-8.











**Received:** 02.02.2024**Revised:** 08.04.2024**Accepted:** 26.04.2024**DOI:** 10.17804/2410-9908.2024.2.061-068

## INFRARED SPECTROSCOPY FOR EVALUATING THE EFFECT OF ELECTRON BEAM STERILIZATION ON POLYETHYLENE TEREPHTHALATE MEDICAL TUBES

V. A. Sharapova<sup>1, a), \*</sup>, V. P. Shveykin<sup>2, b)</sup>, I. G. Margamov<sup>2, c)</sup>,  
V. Yu. Ivanov<sup>1, d)</sup>, and O. V. Ryabukhin<sup>1, e)</sup>

<sup>1</sup>Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia

<sup>2</sup>Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

- a)  <https://orcid.org/0000-0002-0050-2022>  [v.a.sharapova@urfu.ru](mailto:v.a.sharapova@urfu.ru);  
b)  <https://orcid.org/0000-0002-9316-1369>  [v.p.shveykin@urfu.ru](mailto:v.p.shveykin@urfu.ru);  
c)  <https://orcid.org/0000-0003-1002-8325>  [margamov@ya.ru](mailto:margamov@ya.ru);  
d)  <https://orcid.org/0000-0002-2693-4245>  [v.ivanov@urfu.ru](mailto:v.ivanov@urfu.ru);  
e)  <https://orcid.org/0000-0002-8487-8739>  [o.v.ryabuhin@urfu.ru](mailto:o.v.ryabuhin@urfu.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [v.a.sharapova@urfu.ru](mailto:v.a.sharapova@urfu.ru)

Address for correspondence: ul. Mira, 19, Ekaterinburg, 620002, Russia

Tel.: +7 (950) 649-6491

The paper studies the effect of electron beam sterilization on the polyethylene terephthalate parts of blood sampling systems. The structural state and crystallinity degree of polyethylene terephthalate are estimated from the analysis of infrared spectra. Relative intensities are calculated by the reference band (overall intensity level) at  $1410\text{ cm}^{-1}$ . The Gaussian intensities of the absorption bands for trans and gauche conformations with respect to reference band at  $1505\text{ cm}^{-1}$  are calculated. The spectral coefficients  $D_{973}/D_{795}$ ,  $D_{848}/D_{795}$ ,  $D_{1042}/D_{795}$ ,  $D_{895}/D_{795}$ ,  $D_{1098}/D_{1370}$ , and  $D_{1255}/D_{1370}$  are determined. The dose of up to 25 kGy has no significant effect on either the ratio of integral intensities or the ratio of trans and gauche conformations.

**Keywords:** polymers, irradiation embrittlement, infrared (IR) spectroscopy

### 1. Introduction

It is known that medical blood collection systems contain parts made of polyethylene terephthalate (PET), and they are subject to sterilization. Ionizing radiation causes the formation of free radicals in the polymer. The evaluation of the degree of PET degradation in products during electron beam sterilization is of great interest.

PET can exist in both amorphous and crystalline states. PET in the amorphous state does not have the ordered structure of macromolecules; it is transparent and has a low degree of crystallinity (2.1–2.5%). PET macromolecules in the crystalline state form various ordered structures depending on temperature and crystallinity, namely spherulites, crystallites, lamellae, and meander structures [1, 2]. PET crystallinity increases after machining. However, the maximum degree of PET crystallinity is no more than 50–65% [3]. PET crystallinity and macromolecule orientation determine its mechanical properties. In this regard, the study of the structural features of PET under the action of electron beam sterilization is an important task.

The IR spectra of amorphous and crystalline PET are noticeably different, and this makes it possible to use this method to assess the structural state and changes of PET crystallinity.

It is known [4–6] that for the unit cell of PET, vibrations are possible due to both the phenylenecarbonyl and ethylene glycol bonds [7].

Rotation of the unit cell about the glycol bond causes the presence of two isomers of gauche and trans conformations. Unit cell transition to the trans conformation is a prerequisite for PET crystallization, while in the amorphous state, the macromolecules are in the gauche and trans conformations in dynamic equilibrium.

The absorption bands associated with a change in polyester chain configuration caused by CH<sub>2</sub> group vibrations, as well as with the presence of gauche and trans isomers and other possible absorption groups, are shown in Table 1 [2, 4–13].

Table 1

Absorption bands of IR spectra of PET [2, 4–13]

Wave number, cm <sup>-1</sup>	The nature of vibrations	Conformation
848	Rocking vibrations of CH <sub>2</sub> in glycol	trans
895	Bending vibrations of CH <sub>2</sub> in glycol	gauche
962–975	Stretching vibrations of the C–O ester group	trans
1015	Plane bending vibrations of the C–H bond	gauche
1042	Bending vibrations of the C–O ester group	gauche
1255	Bending vibrations of the C–O ester group	trans
1340–1350	Wagging vibrations of CH <sub>2</sub>	trans
1370–1375	Wagging vibrations of CH <sub>2</sub>	gauche
1410	Ring in-plane vibrations	–
1460	Scissoring vibrations of CH <sub>2</sub>	gauche
1470	Scissoring vibrations of CH <sub>2</sub>	trans
1505	Ring in-plane vibrations	–
1712–1715	Bending vibrations of the C = O ester group	trans
1950	Vibrations of two adjacent aromatic H in p-substituted compounds and aromatic bands	–
2350	Axially symmetric deformation of CO <sub>2</sub>	–
2853	Symmetric stretching of CH <sub>2</sub>	–
2924	Asymmetric stretching of CH <sub>2</sub>	–
2960	Asymmetric stretching of CH <sub>3</sub>	–
3030–3150	Stretching vibration of CH	–
3150–3750	O–H group (hydroxyl)	–

The authors of [7] assessed the crystallinity of fine powders of recycled polyethylene terephthalate using IR spectroscopy. They revealed the structural features of fine PET powders with particle sizes from 5 to 70 μm, obtained from various PET polymer wastes (PET bottles, polyester fiber waste) by the solvent method. In this study, a similar approach is applied to PET products subjected to electron beam sterilization. It is of great interest to evaluate the possible degradation of PET using IR spectroscopy since e-beam irradiation may release free radicals, which can have a negative impact on the properties of both the PET test tube and the biomedical material stored in it.

## 2. Materials and Methods

Six series of six samples of PET test tubes for blood sampling served as the material for the study, with PET as the material of the cylindrical part of the tubes and polypropylene as the cap material. The samples were irradiated with accelerated electrons at the Innovation and Implementation Center for Radiation Sterilization affiliated to the Ural Federal University. The irradiation doses were 0, 5, 10, 15, 20, and 25 kGy at an electron energy of 8.5 MeV. The dose of 25 kGy is considered sufficient for sterilization by accelerated electrons according to the state standard [14].

The IR spectra were recorded from samples sized  $10 \times 10$  mm on a Bruker Alpha IR Fourier spectrometer in the frequency range from  $4000$  to  $500 \text{ cm}^{-1}$  at a resolution of  $1 \text{ cm}^{-1}$ . A single horizontal external total internal reflection attachment (Eco-ART) with a ZnSe crystal (transparency range  $0.5\text{--}20 \text{ }\mu\text{m}$ , refractive index  $n = 2.42$ ) was used. The results were mathematically processed by means of the Fityk software [15]. Two schemes for processing IR spectra were applied.

In order to assess the dependence of the IR spectra shape on the dose of electron beam sterilization in the first scheme, the integral intensities of the IR absorption bands in the wavenumber intervals  $3030\div 2830$ ,  $1772\div 1662$ ,  $1330\div 1185$ ,  $1110\div 1050$ , and  $750\div 635 \text{ cm}^{-1}$  were assigned to the integral intensity of the band in the range  $1425\div 1385 \text{ cm}^{-1}$  [9, 16]. The obtained values are shown in Table 2.

According to the second scheme, the absorption bands  $1490\div 1425$ ,  $1425\div 1350$ ,  $1350\div 1330$ ,  $1330\div 1160$ ,  $1160\div 925$ , and  $925\div 760 \text{ cm}^{-1}$  were selected. In each of them, the oblique linear background was subtracted from the levels of the minima surrounding the band. The obtained spectrum was automatically described in the Fityk program [17] using a certain number of Gaussian functions (Fig. 1). The number of functions was selected in such a way that the resulting curve coincided as closely as possible with the available IR spectrum of PET. The Gaussian intensities closest to the wavenumbers of interest were used to calculate the parameters given in Tables 3 and 4.

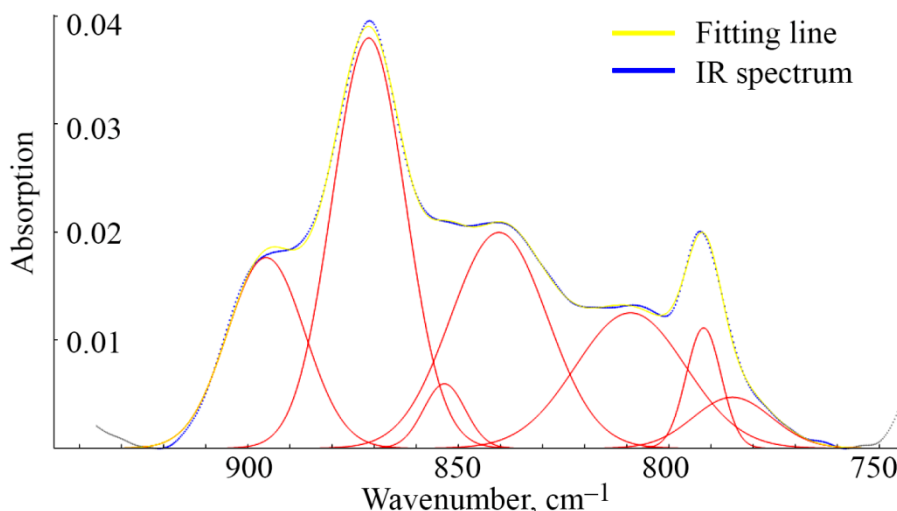


Fig. 1. An example of describing the IR spectrum of the resulting curve and the arrangement of Gaussians

Mechanical tests according to [18] in the form of uniaxial compression were carried out on 10 mm high samples cut from two test tubes: unsterilized and sterilized, with an irradiation dose of 25 kGy.

### 3. Results and discussion

From the analysis of the spectra normalized by the intensity of the  $1410 \text{ cm}^{-1}$  band (Fig. 2), we can make a preliminary conclusion that there are no significant changes in PET after exposure to radiation sterilization by accelerated electrons.

Table 2 shows the values of the relative intensities of the bands: stretching vibrations of the C–H bond group –  $3000 \text{ cm}^{-1}$ , the C=O carbonyl group –  $1712 \text{ cm}^{-1}$ , the ester group –  $1234 \text{ cm}^{-1}$ ; the totality of methylene groups and C–O bonds of the ester group –  $1084 \text{ cm}^{-1}$ ; interactions of polar groups with the benzene ring –  $720 \text{ cm}^{-1}$  [19].

Table 2

Relative intensities of IR absorption bands in the unsterilized test tube samples (spectrum I) and in the test tube samples after electron beam sterilization: 5 kGy (II); 10 kGy (III); 15 kGy (IV); 20 kGy (V); 25 kGy (VI)

Wavenumber interval, $\text{cm}^{-1}$	Spectrum number						Average value	Standard deviation
	I	II	III	IV	V	VI		
3030÷2830	1.8	1.3	1.7	1.7	1.7	2.1	1.7	0.3
1772÷1662	9.1	9.2	9.1	9.2	8.9	8.9	9.07	0.14
1330÷1185	14	14	13	15	14	14	14.0	0.6
1110÷1050	2.2	2.2	2.1	2.4	2.1	2.2	2.20	0.11
750÷635	11	11	12	13	11	12	11.7	0.8

The comparison of the IR spectra in the fingerprint region ( $1500\text{--}700\text{ cm}^{-1}$ ) makes it possible to establish conformational transitions proceeding from changes in the shape and intensity of the bands typical of trans and gauche conformations.

To quantify these changes, it is proposed to use the band of conjugated C=C bonds of the aromatic ring at  $1505\text{ cm}^{-1}$  as a reference band. We use the  $1410\text{ cm}^{-1}$  band.

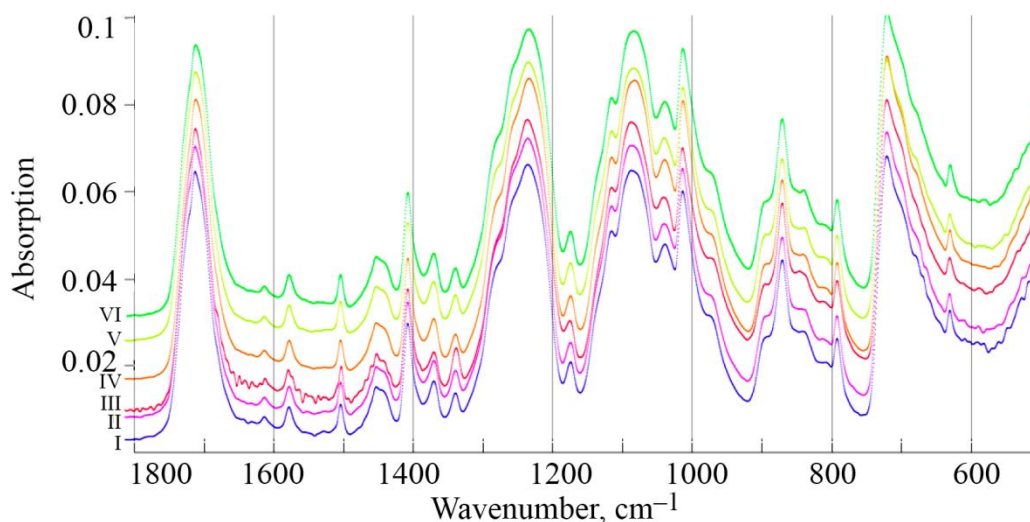


Fig. 2. IR absorption spectra of an unsterilized tube (spectrum I) and tubes after electron beam sterilization in a spectral region of  $1800\text{--}500\text{ cm}^{-1}$

The band at  $1410\text{ cm}^{-1}$  related to the in-plane vibration of the benzene ring was mentioned in [20] in connection with its use as a reference band for the normalization of spectra. It is also sensitive to conformation [2, 21, 22]. However, the peak at  $1505\text{ cm}^{-1}$ , also assigned to the in-plane ring vibration, behaves like a  $1410\text{ cm}^{-1}$  band. Sometimes  $1505\text{ cm}^{-1}$  is also used as a control band since its intensity is independent of the degree of crystallinity [23].

The relative intensities of the absorption bands typical of trans and gauche conformations were calculated for PET samples subjected to various doses of electron beam sterilization (Table 3). According to Table 3, both trans and gauche conformations are present in the PET samples. Electron beam sterilization in the PET tubes has no effect on the ratio of trans and gauche conformations in the samples at irradiation doses up to 25 kGy.



The authors of [24] attribute the increase in the intensity of trans-conformation vibrations in PET films to increased crystallinity. However, in the amorphous state, the trans and gauche conformations of PET exist in equilibrium, and it is impossible to evaluate the crystallinity of PET from changes in the vibration intensities of only trans conformations.

Table 3

Relative absorption band intensities (normalized to peak 1505 cm<sup>-1</sup>) in the unsterilized test tube samples (spectrum I) and in the test tube samples after electron beam sterilization: 5 kGy (II); 10 kGy (III); 15 kGy (IV); 20 kGy (V); 25 kGy (VI)

D <sub>x</sub> /D <sub>1505</sub>	I	II	III	IV	V	VI
Relative absorption bands (trans conformation)						
848	2.25	1.95	1.81	2.37	2.08	2.27
975	2.76	2.63	2.53	3.25	2.90	3.01
1255	2.66	2.45	2.02	2.71	3.06	2.49
1348	0.75	0.75	0.99	0.70	0.70	0.72
1470	0.37	0.39	0.42	0.36	0.32	0.40
Relative absorption bands (gauche conformation)						
1015	1.93	1.89	2.35	2.16	1.75	1.94
1042	3.04	3.14	2.99	3.45	2.95	3.06
1375	1.02	0.89	0.72	1.01	0.90	0.95
1460	0.43	0.27	0.71	0.28	0.14	0.33

In this regard, as a criterion for assessing the change in the degree of crystallinity, it is proposed to use the ratio of the intensities of various absorption bands (trans conformations, 973 and 848 cm<sup>-1</sup>; gauche conformations, 1042 and 895 cm<sup>-1</sup>) with respect to the intensity of the 795 cm<sup>-1</sup> absorption band, which changes only slightly upon transition from one conformation to the other [4, 5].

P. G. Schmidt [4] showed that the D<sub>973</sub>/D<sub>795</sub> ratio correlates well with X-ray phase analysis data and, in combination with density data, provides information on the ratio of PET trans conformations in the amorphous and crystalline phases. The ratio of the absorption bands at 1098 cm<sup>-1</sup> (stretching vibrations of C–O–C) and 1255 cm<sup>-1</sup> (bending vibrations of C–O–C), typical of PET trans conformation, to the absorption band of wagging vibrations of methylene groups at 1370–1375 cm<sup>-1</sup> can also be used to evaluate crystallinity [25]. The ratios were calculated from the IR spectra of the PET samples (Table 4).

Table 4

Spectral coefficients showing the variation of PET crystallinity in the unsterilized test tube samples (spectrum I) and in the test tube samples after electron beam sterilization: 5 kGy (II); 10 kGy (III); 15 kGy (IV); 20 kGy (V); 25 kGy (VI)

D <sub>x</sub> /D <sub>1505</sub>	I	II	III	IV	V	VI	Average value	Standard deviation
D <sub>973</sub> /D <sub>795</sub>	1.92	1.88	2.21	2.08	1.98	1.99	2.01	0.12
D <sub>848</sub> /D <sub>795</sub>	1.57	1.39	1.58	1.51	1.42	1.50	1.50	0.08
D <sub>1042</sub> /D <sub>795</sub>	2.11	2.24	2.61	2.21	2.01	2.03	2.20	0.22
D <sub>895</sub> /D <sub>795</sub>	1.61	1.56	1.56	1.55	1.57	1.52	1.56	0.03
D <sub>1098</sub> /D <sub>1370</sub>	8.01	8.41	9.55	8.79	8.73	8.43	8.7	0.5
D <sub>1255</sub> /D <sub>1370</sub>	2.62	2.74	2.79	2.69	3.39	2.63	2.81	0.29

It follows from the data in the rows of Table 4 that the spectral coefficients are independent of the irradiation dose. The observed changes in the parameters can be caused by the heterogeneity of the material itself subjected to radiation sterilization or by errors introduced by the peculiarities of the sterilization process and measurement of spectra. It seems possible to assume that the parameters under consideration, which reflect the state of crystallinity of the material, remain unchanged after sterilization. However, further research will be required to verify this reliably.

The application of the band intensity ratio correlates with the results of testing the mechanical properties. The results in Fig. 3 demonstrate the absence of a critical difference in the ability of the sample to take up load depending on the use of radiation sterilization. The ratio of the compressive force of the unsterilized sample to that of the sterilized sample at 25 kGy stabilizes after passing through a deformational displacement of 0.5 mm and does not exceed 5%.

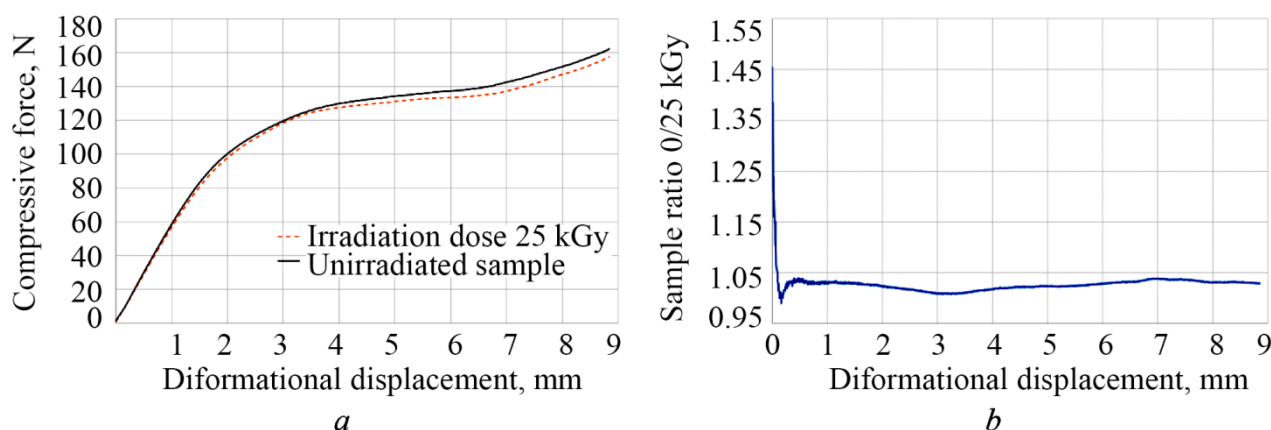


Fig. 3. Compressive force as dependent on the displacement of the walking beam of the testing machine (a); variation of the ratio of the compressive force for the unsterilized samples to that for the samples sterilized at 25 kGy (b)

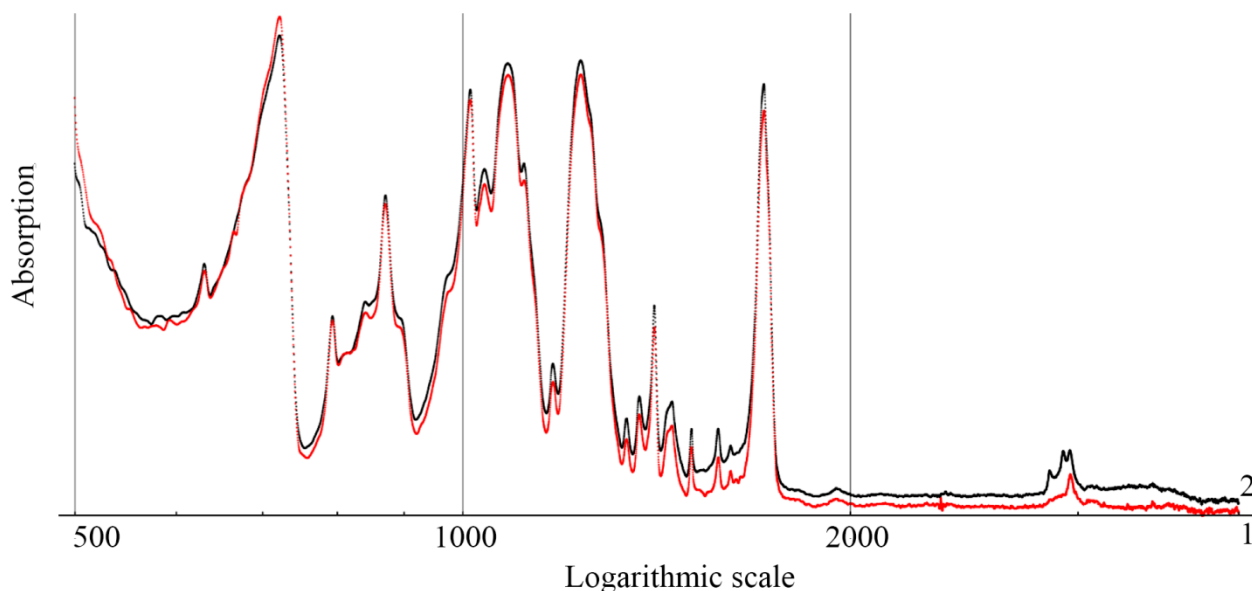


Fig. 4. Infrared spectra of initial PET (1) and after irradiation with 25 kGy (2), normalized to the absorption band at  $1410\text{ cm}^{-1}$  and shifted along the vertical axis

It follows from the analysis of the average values (Table 2) and Fig. 4 that there is a tendency towards an increase in the relative intensity of the IR absorption bands with frequencies of  $3750\text{--}3100$ ,  $3030\text{--}2820$ ,  $1712$ , and  $1084\text{ cm}^{-1}$ . This result may indicate a possible increase in the number

of O–H, C–H bond groups, C=O carbonyl groups, and the combination of methylene groups and C–O bonds of the ester group. Thus, it can be concluded that the molecular chains of the PET near-surface layer are destroyed [26]. However, the point scatter of single values over the entire set of samples raises doubts on the significance of these processes. In addition, mechanical compression testing of a test tube sample before sterilization and after 25 kGy irradiation shows no cracks on the surface of the product. For further analysis of the risk of free radical release, it is planned to use the method of electron paramagnetic resonance.

#### 4. Conclusion

The IR spectroscopic study of the structural features of PET blood collection tubes under electron beam sterilization has revealed that an irradiation dose of up to 25 kGy does not affect either the ratio of the crystalline and amorphous phases in PET or the ratio of the integrated intensities of the considered IR absorption bands.

According to the results of flattening tests, radiation sterilization with accelerated electrons in doses up to 25 kGy does not significantly impair the mechanical properties of the tube material.

#### Acknowledgment

*The work was supported by the IAEA, contract CRP F23035.*

#### References

1. Brooks, D.W. and Giles, G.A. *PET Packaging Technology*, Academic Press, Sheffield, 2002, 375 p.
2. Cole, K.C., Guèvremont J., Ajji, A., and Dumoulin, M.M. Characterization of surface orientation in poly(ethylene terephthalate) by front-surface reflection infrared spectroscopy. *Applied Spectroscopy*, 1994, 1, 1513–1521. DOI: 10.1021/ma00236a008.
3. Pintos, P.B., León, A.S., and Molina, S.I. Large format additive manufacturing of polyethylene terephthalate (PET) by material extrusion. *Additive Manufacturing*, 2024, 79, 103908. DOI: 10.1016/j.addma.2023.103908.
4. Schmidt, P.G. Polyethylene terephthalate structural studies. *Journal of Polymer Science. Part A: General Papers*, 1963, 1 (4), 1271–1292. DOI: 10.1002/pol.1963.100010417.
5. Petukhov, B. V. *Polyefirnye volokna* [Polyester Fibers]. Khimiya Publ., Moscow, 1976, 272 p. (In Russian).
6. Roberge, M., Prud'homme, R.E., and Brisson, J. Molecular modelling of the uniaxial deformation of amorphous polyethylene terephthalate. *Polymer*, 2004, 45 (4), 1401–1411. DOI: 10.1016/j.polymer.2003.04.00.
7. Shrubok, A.O. and Happi Wako, B.J. The estimation of the crystallinity degree of fine powders of secondary polyethylene terephthalate by IR-spectroscopy. In: *Trudy BGTU, Ser. 2: Chemical Engineering, Biotechnologies, Geoecology*, 2022, 2 (259), 41–48 (In Russian).
8. Chen, Z., Hay, J.N., and Jenkins, M.J. FTIR spectroscopic analysis of poly(ethylene terephthalate) on crystallization. *European Polymer Journal*, 2012, 48 (9), 1586–1610. DOI: 10.1016/j.eurpolymj.2012.06.006.
9. Dekhant, I., Dants, R., Kimmer, V., and Shmolke, R. *Infrakrasnaia spektroskopiia polimerov* [Infrared Spectroscopy of Polymers]. Khimiya Publ., Moscow, 1976. 472 p. (In Russian).
10. Cole, K.C., Ajji, A., and Pellerin, E. New insights into the development of ordered structure in poly(ethylene terephthalate). 1. Results from external reflection infrared spectroscopy. *Macromolecules*, 2002, 35 (3), 770–784. DOI: 10.1021/ma011492i.
11. Vijayakumar, S. and Rajakumar, P.R. Infrared spectral analysis of waste pet samples. *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, 2012, 4, 58–65. DOI: 10.56431/p-0wwmqk.

12. Pereira, A., Silva, M., Junior, E., Paula, A., and Tommasini, F. Processing and characterization of PET composites reinforced with geopolymer concrete waste. *Materials Research*, 2017, 20 (2). DOI: 10.1590/1980-5373-MR-2017-0734.
13. Kazitsina, L.A. and Kupletskaya, N.B. *Primenenie UV-, IR-, YaMR i mass-spektroskopii v organicheskoy khimii* [Application UV-, IR-, NMR- and Mass- Spectroscopy in the Organic Chemistry]. Izd-vo Mosk. Un-ta Publ., Moscow, 1979, 240 p. (In Russian).
14. Wojdyr, M. Fityk: a general-purpose peak fitting program. *Journal of Applied Crystallography*, 2010, 43, 1126–1128. DOI:10.1107/S0021889810030499.
15. Stas'kov, N.I. and Ivashkevich, I.V. Optical constants of poly(ethylene terephthalate) in the range of  $1410\text{-cm}^{-1}$  IR absorption band. *Polymer Science. Series B*, 2008, 50, 120–123. DOI: 10.1134/S1560090408050047.
16. Zhivulin, V.E., Evsyukov, S.E., Chalov, D.A., Morilova, V.M., Andreychuk, V.P., Khairanov, R.Kh., Margamov, I.G., and Pesin, L.A. Evolution of the molecular structure of partially dehydrofluorinated poly(vinylidene fluoride) films upon storage in air. while keeping in the air. *Journal of Surface Investigation X-ray Synchrotron and Neutron Techniques*, 2022, 16 (5), 673–681. DOI: DOI:10.1134/S1027451022050214.
17. González-Córdova, J.A., Ariza-Flores, D., Pérez-Huerta, J.S., Madrigal-Melchor, J., López-Miranda, A., and Ortega-Gallegos, J. Optical anisotropy Raman response of polyethylene terephthalate strained thin films. *Physica B: Condensed Matter*, 2023, 654, 414693. DOI: 10.1016/j.physb.2023.414693.
18. Lin, S.-B. and Koenig, J.L. Spectroscopic characterization of the rotational conformations in the disordered phase of poly(ethylene terephthalate). *Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 1982, 20 (12), 2277–2295. DOI: 10.1002/pol.1982.180201209.
19. Liu, J. and Koenig, J.L. Data processing techniques to extract pure-component spectra from mixture spectra and their application to polymeric systems. *Analytical Chemistry*, 1987, 59 (21), 2609–2615. DOI: 10.1021/ac00148a017.
20. Hofmann, G.R., Sevegney, M.S., and Kannan, R.M. A rheo-optical FTIR spectrometer for investigating molecular orientation and viscoelastic behavior in polymers. *International Journal of Polymer Analysis and Characterization*, 2004, 9 (4), 245–274. DOI: 10.1080/10236660490920237.
21. Kudashev, S.V., Arisova, V.N., Danilenko, T.I., Zheltobryukhov, V.F., Urmantsev, U.R., and Tabaev, B.V. Structural-morphological characteristics and properties of fluorine-containing surface-modified poly(ethylene terephthalate) films. *Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces*, 2015, 51 (1), 106–111. DOI: 10.1134/S2070205114050098.
22. Tzavalas, S., Mouzakis, D.E., Drakonakis, V., and Gregoriou V.G. Polyethylene terephthalate-multiwall nanotubes nanocomposites: effect of nanotubes on the conformations, crystallinity and crystallization behavior of PET. *Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2008, 46 (7), 668–676. DOI: 10.1002/polb.21378.
23. Caire-Maurisier, F., Aymes-Chodur, C., Jandard, V., Bourrel, A., and Yagoubi, N. Effects of electron beam sterilization on polyethylene terephthalate: physico-chemical modifications and formation of non-volatile organic extractables. *Annales Pharmaceutiques Françaises*, 2019, 77 (4), 276–285. DOI: 10.1016/j.pharma.2019.02.001.