http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

Received: 10.10.2024
Revised: 16.12.2024
Accepted: 20.12.2024
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267

EXACT SOLUTIONS TO THERMAL DIFFUSION EQUATIONS FOR STOKES SLOW FLOWS

L. S. Goruleva[1, 2, a], I. I. Obabkov[2, b], and E. Yu. Prosviryakov[1, 2, c, *]

[1]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*
[2]*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

[a] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[b] https://orcid.org/0009-0008-8729-529X iiobabkov@urfu.ru;
[c] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The article considers a class of exact solutions for describing Stokes slow flows of binary fluids. The family of exact solutions is constructed on the basis of the Lin–Sidrov–Aristov ansatz for the velocity field. The velocity field has a wide functional arbitrariness. It depends linearly on two coordinates (horizontal or longitudinal). The coefficients of the linear forms are functions of two variables from the third (vertical or transverse) coordinate and time. The pressure field, the temperature field, and the field of dissolved substance concentration are quadratic forms. In other words, the study takes into account not only horizontal gradients, but also the curvature of the hydrodynamic fields. The constructed exact solution describes thermal diffusion with both Soret and Dufour cross dissipative effects. A system of equations for describing unsteady flows is derived, which consists of heat conduction equations and gradient equations. Formulas of hydrodynamic fields are given to describe the Stokes slow steady-state flow of a binary fluid.

Keywords: exact solution, binary fluid, convection, diffusion, thermal diffusion, Stokes approximation, Lin–Sidorov–Aristov class

References

1. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskii, E.M. *Convective Stability of Incompressible Liquid,* Wiley, Keter Press, Jerusalem, 1976.
2. Gershuni, G.Z., Zhukhovitskii, E.M., and Nepomnyashchii, A.A. *Ustoychivost konvektivnykh techeniy* [Stability of Convective Flows]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 318 p. (In Russian).
3. Getling, A.V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Soviet Physics Uspekhi*, 1991, 34 (9), 737–776. DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
4. Andreev, V.K., Gaponenko, Ya.A., Goncharova, O.N., and Pukhnachev, V.V. *Mathematical Models of Convection,* De Gruyter, Berlin, Boston, 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
5. Aristov, S.N. and Schwarz, K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Layers of Liquid]. VyatGU Publ., Kirov, 2011, 206 p. (In Russian).
6. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu. Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review. *Symmetry*, 2023, 15, 1825. DOI: 10.3390/sym15101825.

7. Bulgakov, S.N. *Issledovaniye roli khalinnykh faktorov v formirovanii tsirkulyatsii i struktury vod Chernogo morya* [Investigation of the Role of Chaline Factors in the Formation of the Circulation and Structure of the Black Sea: Cand. Thesis]. Sevastopol, 1986, 155 p. (In Russian).
8. Bulgakov, S.N. and Korotaev, G.K. An analytical model of jet circulation in closed reservoirs. *Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal*, 1987, 3, 434–446. (In Russian).
9. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin. *Soviet Journal of Physical Oceanography*, 1991, 2, 293–298. DOI: 10.1007/BF02346081.
10. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution for Couette-type steady convective concentration flows. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, 62 (7), 155–166. DOI: 10.1134/S0021894421070051.
11. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychislitelnaya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2015, 8 (4), 445–456. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
12. Ryzhkov, I.I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoychivost* [Thermal Diffusion in Mixtures: Equations, Symmetries, Solutions and their Stability]. Izd-vo SO RAN Publ., Novosibirsk, 2013, 200 p. (In Russian).
13. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
14. Prosviryakov, E.Yu., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the flow of multicomponent fluids with internal heat generation. *Russian Aeronautics*, 2024, 67 (1), 60–69. DOI: 10.3103/S1068799824010070.
15. Koroleva, L.F., Savrai, R.A., Prosviryakov, E.Yu., Kostarev, V.A., Pavlyshko, S.V., and Kostarev, P.V. The effect of abrasive additives on the tribotechnical properties of lubricants for the wheel-rail system. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 54–64. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.054-064. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_390.html
16. Prosviryakov, E.Yu., Mikhailov S.A., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows. *Russian Aeronautics*, 2023, 66 (3), 500–509. DOI: 10.3103/S106879982303011X.
17. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to magnetohydrodynamics equations for describing convective flows of binary fluids. *Technical Physics*, 2023, 68 (10), 292–301.
18. Bashurov, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*, 2021, 25 (4), 781–793. DOI: 10.14498/vsgtu1878.
19. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Seriya Matematika*, 2021, 37, 17–30. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.17.
20. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*, 2020, 32 (8), 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
21. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15, 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
22. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows. *Dynamics*, 2022, 2 (4), 367–379. DOI: 10.3390/ dynamics2040021.

23. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem. Technical Memorandum Ser., 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
24. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7 (3), 43–44. DOI: 10.1007/bf00914697.
25. Shliomis, M.I. and Yakushin, V.I. The convection in a two-layer binary system with evaporation. *Uchenye Zapiski Permskogo Gosuniversiteta, Seriya Gidrodinamika*, 1972, 4, 129–140. (In Russian).
26. Gershuni, G.Z. On the stability of plane convective motion of a fluid. *Zh. Tekh. Fiz.,* 1953, 23 (10), 1838–1844. (In Russian).
27. Batchelor, G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math*., 1954, 12 (3), 209–233. DOI: 10.1090/qam/64563.
28. Schwarz, K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, 49 (4), 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
29. Knyazev, D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, 52 (2), 212–217. DOI: 10.1134/ S0021894411020088.
30. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, 9 (4), 651–657. (In Russian).
31. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (2), 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
32. Goruleva, L.S., Obabkov, I.I., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for convective Stokes flows. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures,* 2024, 2, 36–49. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2_437.html
33. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, 48, 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
34. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Steady convective Couette flow for quadratic heating of the lower boundary fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2018, 14 (1), 69–79. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1801007.
35. Vlasova, S.S. and Prosviryakov, E.Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronautics*, 2016, 59 (4), 529–535. DOI: 10.3103/S1068799816040140.
36. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2016, 12 (2), 167–178. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1602001.
37. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Planar linear Bénard-Rayleigh convection under quadratic heating of the upper boundary of a viscous incompressible liquid layer. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2015, 2, 6–13. (In Russian).
38. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of thermocapillary convection during localized heating of a flat layer of viscous incompressible liquid. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2014, 3, 7–12. (In Russian).
39. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of thermocapillary convection for localized heating of a flat viscous incompressible layer. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2013, 3, 34–45. (In Russian).
40. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Maragoni viscous incompressible fluid. *Vestnik Samarskogo*

Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2013, 3 (32), 110–118. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1205.
41. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, 22 (3), 532–548. DOI: 10.14498/vsgtu1638.
42. Lin, C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 1957, 1, 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
43. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
44. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Synopsis of Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
45. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Rus. J. Nonlin. Dyn*., 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
46. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki,* 2021, 25 (3), 491–507. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1860.
47. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
48. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry,* 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
49. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56 (3), 331–338. DOI: 10.1134/S0040579522030113.
50. Goruleva, L.S., Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release. *Optics and Spectroscopy*, 2022, 130 (6), 365–370. DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
51. Andreev, V.K. and Efimova, M.V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small Marangoni numbers. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2024, 18 (2), 179–191. DOI: 10.1134/S1990478924020017.
52. Andreev, V.K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a three-dimensional layer at low Marangoni numbers. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2024, 17 (2), 195–206.
53. Andreev, V.K. and Pianykh, A.A. Comparative analysis of the analytical and numerical solution of the problem of thermocapillary convection in a rectangular channel. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2023, 16 (1), 48–55.
54. Andreev, V.K. and Lemeshkova, E.N. Thermal convection of two immiscible fluids in a 3D channel with a velocity field of a special type. *Fluid Dynamics*, 2023, 58 (7), 1246–1254. DOI: 10.1134/s0015462823602176.
55. Andreev, V.K. and Uporova, A.I. Initial boundary value problem on the motion of a viscous heat-conducting liquid in a vertical pipe. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics,* 2023, 16 (1), 5–16.
56. Andreev, V.K. and Uporova, A.I. On a spectral problem for convection equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2022, 15 (1), 88–100. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-1-88-100.

57. Andreev, V.K. and Stepanova, I.V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, 14 (4), 445–451. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.
58. Andreev, V.K. and Sobachkina, N.L. Two-layer stationary flow in a cylindrical capillary taking into account changes in the internal energy of the interface. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, 14 (4), 507–518. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-507-518.
59. Lemeshkova, E. and Andreev, V. On the asymptotic behavior of inverse problems for parabolic equation. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, 2021, 7 (2), 905–921. DOI: 10.1007/s41808-021-00127-8.
60. Andreev, V.K. Asymptotic behavior of small perturbations for unsteady motion an ideal fluid jet. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, 14 (2), 204–212. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-204-212.

Подана в журнал: 10.10.2024
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ТИПА СТОКСА

Л. С. Горулева[1, 2, а], И. И. Обабков[2, б], Е. Ю. Просвиряков[1, 2, в, *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия
[2]*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования*
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

[а] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[б] https://orcid.org/0009-0008-8729-529X iiobabkov@urfu.ru;
[в] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: 374-53-30

В статье рассматривается класс точных решений для описания медленных течений Стокса бинарных жидкостей. Семейство точных решений построено на основе анзаца Линя – Сидорова – Аристова для поля скорости. Поле скорости обладает широким функциональным произволом. Оно зависит линейно от двух координат (горизонтальных или продольных). Коэффициенты линейных форм являются функциями двух переменных от третьей (вертикальной или поперечной) координаты и времени. Поле давления, поле температуры и поле концентрации растворенного вещества являются квадратичными формами. Иными словами, учитываются не только горизонтальные градиенты, но и кривизна гидродинамических полей. Построенное точное решение описывает термодиффузию с обоими перекрестными диссипативными эффектами Соре и Дюфура. Выведена система уравнений для описания неустановившихся потоков, состоящая из уравнений типа теплопроводности и градиентных уравнений. Приведены формулы гидродинамических полей для описания установившегося медленного течения Стокса бинарной жидкости.

Ключевые слова: точное решение, бинарная жидкость, конвекция, диффузия, термодиффузия, приближение Стокса, класс Линя – Сидорова – Аристова

1. Введение

При исследовании конвективного движения несжимаемых жидкостей или газов довольно часто постулируют однородность по химическому составу деформируемой сплошной среды [1–6]. В этом случае естественная и вынужденная конвекция описывается системой уравнений Обербека – Буссинеска, в которых используется линейная зависимость плотности ρ от температуры T:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta T\right),$$

где β – коэффициент объемного теплового расширения; ρ_0 – плотности жидкости при отсчетной температуре для конвективного движения [1–6]. Система уравнений Обербека – Буссинеска была выведена в предположении, что неоднородность плотности существенна только при записи удельной силы Архимеда. Для записи сил инерции изменением плотности пренебрегается [1–6]. В уравнении неразрывности плотность полагают постоянной по времени и по пространственным переменным. Данный теоретический вывод уравнений носит асимптотический характер (не выполняется принцип Галилея), но он многократно подтверждался экспериментально [1–4].

Изучение конвекции однородных по составу жидкостей не исчерпывается только однородными жидкостями или газами. При рассмотрении крупномасштабных течений в мировом океане было показано, что при течении океанических вод влияние морской соли на конвективное перемешивание выражено лучше, чем перепад температуры по глубине или на границе фаз «жидкость – атмосферный воздух» [7–11]. Таким образом, необходимо учитывать, что жидкость является раствором, в котором растворено одно или несколько веществ, а конвекция может быть индуцирована при постоянной температуре [6, 11].

Термическое равновесие является неустойчивым, поэтому при течении неоднородных жидкостей или газов происходит термодиффузия с перекрестными диссипативными эффектами Соре и Дюфура [6, 12, 13]. Для исследования свойств термодиффузионных течений используется, как и для тепловой конвекции, приближение Буссинеска о линейной зависимости плотности от растворенных веществ [6, 12, 13]. Уравнения движения в этом случае становятся сложнее, поэтому исследование качественных и количественных свойств решений системы Обербека – Буссинеска для термодиффузии не теряет актуальности в сравнении с тепловым конвективным перемешиванием [6, 12–14].

Уравнения Обербека – Буссинеска используются для исследования гидродинамической устойчивости для описания природных и технологических процессов [1–6, 12–22]. Следовательно, очень важно иметь запас точных решений для описания основного течения и методами теории возмущений исследовать устойчивость (неустойчивость) вторичных потоков [15–22].

При построении точных решений уравнений термодиффузии целесообразно применять методы нахождения и размножения анзацев для системы Обербека – Буссинеска, полученных для уравнений тепловой конвекции [4–6, 10–22]. Первым семейством точных решений уравнений Обербека – Буссинеска является семейство Остроумова – Бириха для описания однонаправленных потоков в каналах с круговым и прямоугольным поперечным сечением [23–27]. Данное точное решение многократно исследовалось, обобщалось и модифицировалось в статьях и обзорах [4–6, 10–22, 28 –31].

На основе анзаца Остроумова – Бириха и поля скоростей Линя – Сидорова – Аристова

$$V_x = U(z,t) + xu_1(z,t) + yu_2(z,t),$$

$$V_y = V(z,t) + xv_1(z,t) + yv_2(z,t),$$

$$V_z = w(z,t)$$

был построен класс точных решений для трехмерных термодиффузионных течений в прямоугольной декартовой системе координат [13].

В статьях [6, 19–22] были исследованы установившиеся неоднородные сдвиговые течения

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \big(U(z) + xu_1(z) + yu_2(z), V(z) + xv_1(z) + yv_2(z), 0\big)$$

для уравнений термодиффузии, где пространственные градиенты поля скорости связаны алгебраическим соотношением

$$u_1^2 + u_2 v_1 = 0.$$

Это соотношение при введении функции тока $\psi\,(V_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, V_y=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x})$ является частным решением уравнения Монжа – Ампера. Таким образом, библиотека точных решений для уравнений термодиффузии в последнее время пополнилась. Увеличение запаса точных решений осуществилось в том числе из-за построения точных решений для поля скоростей, нелинейно зависящего от части координат. Методика построения класса точных решений [16, 17] использовалась для интегрирования уравнений термодиффузии растворов в магнитных полях и с учетом диссипации энергии.

Анонсируемые в [13, 19–22] точные решения были получены для нелинейных уравнений термодиффузии. Для решения многих задач возможно линеаризовать уравнения Обербека – Буссинеска. Этот подход используется для описания медленных (ползущих) течений, когда число Рейнольдса или его аналоги близки к нулю [32]. Линеаризация системы, с одной стороны, упрощает интегрирование уравнений движений, а с другой – позволяет построить математические модели для инженерного описания растворов. Краевые задачи для конвективных течений типа Стокса были изучены в работах [33–41]. В данной статье приводится семейство точных решений для описания трехмерных термодиффузионных течений типа Стокса. За основу взят класс Линя – Сидорова – Аристова [42–44] и по аналогии с [13, 45–60] изучена топологическая структура гидродинамических полей.

2. Уравнения движения

Описание гидродинамических течений вязкой бинарной несжимаемой смеси опирается на интегрирование уравнений Навье – Стокса и непрерывности (несжимаемости), дополненные уравнением энергии и уравнением сохранения легкого компонента смеси [1, 2, 13, 21]:

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\nabla p+\nu\Delta\mathbf{V}\,,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0\,,$$

$$\rho T\frac{dS}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{q}+\mu\nabla\cdot\mathbf{j}\,,$$

$$\rho\frac{dC}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{j}\,. \tag{1}$$

Здесь в системе уравнений (1), записанной в инвариантной форме, введены следующие обозначения: $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости раствора; p, ρ, ν – давление, плотность и кинематическая (молекулярная) вязкость смеси соответственно; $\nabla=\mathbf{i}_1\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_2\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}_3\dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты декартовой прямоугольной системы координат; $\Delta=\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{V}$ – полная производная (индивидуальная производная, материальная производная, производная в частице, производная вдоль траектории), состоящая из суммы локальной производной (местной производной) и конвективной производной; C – концентрация легкого компонента (растворенного вещества); T – абсолютная температура; S – энтропия единицы массы; μ –

химический потенциал смеси; **q** – плотность потока тепла; **j** – плотность диффузионного потока вещества легкого компонента [1, 2].

Для дальнейшего вывода уравнений гидродинамики неоднородной жидкости будем использовать приближение Буссинеска [1–4]. В соответствии с этим приближением будем полагать, что значения температуры и концентрации мало отличаются от средних (равновесных) значений. В этом случае справедлива следующая зависимость плотности бинарной жидкости от температуры и концентрации [1–4]:

$$\rho = \rho_0\left(1-\beta_1 T-\beta_2 C\right).$$

Здесь ρ_0 – плотность смеси жидкостей при средних значениях температуры и концентрации; β_1 и β_2 – коэффициенты теплового и концентрационного расширения жидкости соответственно. Отметим, что справедливо неравенство $\beta_2 > 0$, поскольку рассматривается легкий компонент смеси жидкости.

По аналогии с выводом уравнений Обербека – Буссинеска для тепловой конвекции приведем уравнения системы (1), описывающие термодиффузионные течения вязкой несжимаемой жидкости, к следующей записи [1, 2, 6, 13, 21]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} = -\nabla P+\nu\Delta\mathbf{V}+g\left(\beta_1 T+\beta_2 C\right)\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)T = \left(\chi+\alpha^2 dn\right)\Delta T+\alpha dn\Delta C, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)C = d\Delta C+\alpha d\Delta T,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0.$$

Подробный вывод уравнений (2) из системы уравнений (1) приведен в монографиях [1, 2], в которых за основу взят подход И. Г. Шапошникова. Запись уравнений (2) основана на разложении в ряд Тейлора энтропии S из системы (1) по малым отклонениям температуры и концентрации растворенного вещества. Отметим, что в системе уравнений (2) P – отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность жидкости ρ_0; T – отклонение от средней температуры; C – отклонение концентрации легкого компонента от среднего значения; g – ускорение свободного падения; ν, χ, d, α – коэффициенты кинематической (молекулярной) вязкости, температуропроводности, диффузии, термодиффузии; n – термодинамический параметр [1, 2, 13].

Проецируя систему уравнений (2), записанную в инвариантной форме, на оси прямоугольной декартовой системы координат, получим следующую нестационарную систему квадратично нелинейных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+g\left(\beta_1 T+\beta_2 c\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=$$

$$=\left(\chi+\alpha^2 dn\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\alpha dn\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+V_x\frac{\partial C}{\partial x}+V_y\frac{\partial C}{\partial y}+V_z\frac{\partial C}{\partial z}=$$

$$=\alpha\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)+\alpha d\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0. \tag{3}$$

В системе уравнений (3) для описания термодиффузионных процессов в уравнениях теплопроводности и диффузии учитываются перекрестные диссипативные эффекты Соре и Дюфура.

3. Класс точных решений

Решение системы Навье – Стокса для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска (системы Обербека – Буссинеска для уравнений термодиффузии), записанной в форме (2) или (3), будем искать в следующем виде [6, 13, 21, 42–44]:

$$V_x(x,y,z,t)=U(z,t)+xu_1(z,t)+yu_2(z,t),$$

$$V_y(x,y,z,t)=V(z,t)+xv_1(z,t)+yv_2(z,t),$$

$$V_z(z,t)=w(z,t),$$

$$P(x,y,z,t)=P_0(z,t)+xP_1(z,t)+yP_2(z,t)+$$

$$+\frac{x^2}{2}P_{11}(z,t)+\frac{y^2}{2}P_{22}(z,t)+xyP_{12}(z,t),$$

$$T(x,y,z,t)=T_0(z,t)+xT_1(z,t)+yT_2(z,t)+$$

$$+\frac{x^2}{2}T_{11}(z,t)+\frac{y^2}{2}T_{22}(z,t)+xyT_{12}(z,t),$$

$$C(x,y,z,t)=C_0(z,t)+xC_1(z,t)+yC_2(z,t)+$$

$$+\frac{x^2}{2}C_{11}(z,t)+\frac{y^2}{2}C_{22}(z,t)+xyC_{12}(z,t). \tag{4}$$

Выражения для гидродинамических полей (4), являющиеся обобщением метода разделения переменных, представляют класс точных решений уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска для описания термодиффузионных процессов, анонсированный в работе [13]. Семейство точных решений основано на поле скоростей Линя – Сидорова – Аристова [6, 13, 45–50]. Подставив выражения гидродинамических полей (4) в систему уравнений (3), получим следующую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+x\frac{\partial u_1}{\partial t}+y\frac{\partial u_2}{\partial t}+(U+xu_1+yu_2)u_1+(V+xv_1+yv_2)u_2+$$
$$+w\left(\frac{\partial U}{\partial z}+x\frac{\partial u_1}{\partial z}+y\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=-(P_1+xP_{11}+yP_{12})+\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)$$

(проекция уравнения импульсов на ось Ox),

$$\frac{\partial V}{\partial t}+x\frac{\partial v_1}{\partial t}+y\frac{\partial v_2}{\partial t}+(U+xu_1+yu_2)v_1+(V+xv_1+yv_2)v_2+$$
$$+w\left(\frac{\partial V}{\partial z}+x\frac{\partial v_1}{\partial z}+y\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)=-(P_2+yP_{22}+xP_{12})+\nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right)$$

(проекция уравнения импульсов на ось Oy),

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial P_0}{\partial z}+x\frac{\partial P_1}{\partial z}+y\frac{\partial P_2}{\partial z}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial P_{11}}{\partial z}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial P_{22}}{\partial z}+xy\frac{\partial P_{12}}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+$$
$$+g\beta_1\left(T_0+xT_1+yT_2+\frac{x^2}{2}T_{11}+\frac{y^2}{2}T_{22}+xyT_{12}\right)+$$
$$+g\beta_2\left(C_0+xC_1+yC_2+\frac{x^2}{2}C_{11}+\frac{y^2}{2}C_{22}+xyC_{12}\right)$$

(проекция уравнения импульсов на ось Oz),

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+x\frac{\partial T_1}{\partial t}+y\frac{\partial T_2}{\partial t}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial T_{11}}{\partial t}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial T_{22}}{\partial t}+xy\frac{\partial T_{12}}{\partial t}+$$
$$+(U+xu_1+yu_2)(T_1+xT_{11}+yT_{12})+(V+xv_1+yv_2)(T_2+yT_{22}+xT_{12})+$$
$$+w\left(\frac{\partial T_0}{\partial z}+x\frac{\partial T_1}{\partial z}+y\frac{\partial T_2}{\partial z}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial T_{11}}{\partial z}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial T_{22}}{\partial z}+xy\frac{\partial T_{12}}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(\chi+\alpha^2 dn\right)\left(T_{11}+T_{22}+\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2}+xy\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\alpha dn\left(C_{11}+C_{22}+\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 C_{11}}{\partial z^2}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 C_{22}}{\partial z^2}+xy\frac{\partial^2 C_{12}}{\partial z^2}\right)$$

(уравнение теплопроводности),

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}+x\frac{\partial C_1}{\partial t}+y\frac{\partial C_2}{\partial t}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial C_{11}}{\partial t}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial C_{22}}{\partial t}+xy\frac{\partial C_{12}}{\partial t}+$$

$$+\left(U+xu_1+yu_2\right)\left(C_1+C_{11}x+C_{12}y\right)+\left(V+xv_1+yv_2\right)\left(C_2+C_{12}x+C_{22}y\right)+$$

$$+w\left(\frac{\partial c_0}{\partial z}+x\frac{\partial c_1}{\partial z}+y\frac{\partial c_2}{\partial z}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial c_{11}}{\partial z}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial c_{22}}{\partial z}+xy\frac{\partial c_{12}}{\partial z}\right)=$$

$$=\alpha\left(T_{11}+T_{22}+\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2}+xy\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\alpha d\left(C_{11}+C_{22}+\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2}+y\frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 C_{11}}{\partial z^2}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 C_{22}}{\partial z^2}+xy\frac{\partial^2 C_{12}}{\partial z^2}\right)$$

(уравнение концентрации),

$$\frac{\partial w}{\partial z}+u_1+v_2=0$$

(уравнение неразрывности) (4)

Проведя несложные алгебраические преобразования в полученной системе (4), получим выражения квадратичных форм вида

$$A_k+B_kx+C_ky+D_k\frac{x^2}{2}+E_k\frac{y^2}{2}+F_kxy=0\,.$$

Здесь $k=\overline{1,6}$ – номер уравнения. Уравнения при k = 1, k = 2 и k = 3 – это уравнения распространения импульсов в жидкости, спроецированные на оси Ox, Oy, Oz соответственно; при k = 4 – уравнение теплопроводности; при k = 5 – уравнение диффузии (концентрации); при k = 6 – уравнение неразрывности (несжимаемости).

В силу структуры класса точных решений (4) и системы уравнений (3), получим для первых двух уравнений проекций импульсов равенства $D_1 = E_1 = F_1 = 0$ и $D_2 = E_2 = F_2 = 0$, а для шестого уравнения – уравнения несжимаемости – $B_6 = C_6 = D_6 = E_6 = F_6 = 0$.

Приравняем к нулю коэффициенты в полиномиальных выражениях, получим следующую систему, состоящую из двадцати пяти нестационарных нелинейных уравнений в частных производных, для определения неизвестных двадцати пяти функций:

$$\widehat{L}U+Uu_1+Vu_2+P_1=0$$

(это уравнение следует из равенства $A_1 = 0$),

$$\widehat{L}u_1 + u_1^2 + v_1 u_2 + P_{11} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $B_1 = 0$),

$$\widehat{L}u_2 + u_2 u_1 + v_2 u_2 + P_{12} = 0,$$

(это уравнение следует из равенства $C_1 = 0$),

$$\widehat{L}V + Uv_1 + Vv_2 + P_2 = 0$$

(это уравнение следует из равенства $A_2 = 0$),

$$\widehat{L}v_1 + v_1 u_1 + v_1 v_2 + P_{12} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $B_2 = 0$),

$$\widehat{L}v_2 + u_2 v_1 + v_2^2 + P_{22} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $C_2 = 0$),

$$\widehat{L}w + \frac{\partial P_0}{\partial z} - g\left(\beta_1 T_0 + \beta_2 C_0\right) = 0$$

(это уравнение следует из равенства $A_3 = 0$),

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_1 + \beta_2 C_1\right)$$

(это уравнение следует из равенства $B_3 = 0$),

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_2 + \beta_2 C_2\right)$$

(это уравнение следует из равенства $C_3 = 0$),

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{11} + \beta_2 C_{11}\right)$$

(это уравнение следует из равенства $D_3 = 0$),

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{12} + \beta_2 C_{12}\right)$$

(это уравнение следует из равенства $E_3 = 0$),

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{22} + \beta_2 C_{22}\right)$$

(это уравнение следует из равенства $F_3 = 0$),

$$\widehat{M}T_0 + UT_1 + VT_2 - \left(\chi + \alpha^2 dn\right)\left(T_{11} + T_{22}\right) - \alpha dn\left(C_{11} + C_{22} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\right) = 0$$

(это уравнение следует из равенства $A_4 = 0$),

$$\widehat{M}T_1 + UT_{11} + VT_{12} + u_1 T_1 + v_1 T_2 - \alpha dn \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $B_4 = 0$),

$$\widehat{M}T_2 + UT_{12} + VT_{22} + u_2 T_1 + v_2 T_2 - \alpha dn \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $C_4 = 0$),

$$\widehat{M}T_{11} + 2u_1 T_{11} + 2v_1 T_{12} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{11}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $D_4 = 0$),

$$\widehat{M}T_{22} + 2u_2 T_{12} + 2v_2 T_{22} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{22}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $E_4 = 0$),

$$\widehat{M}T_{12} + u_1 T_{12} + u_2 T_{11} + v_1 T_{22} + v_2 T_{12} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{12}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $F_4 = 0$),

$$\hat{N}C_0 + UC_1 + VC_2 - d\left(C_{11} + C_{22}\right) - \alpha d\left(T_{11} + T_{22} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\right) = 0$$

(это уравнение следует из равенства $A_5 = 0$),

$$\hat{N}C_1 + UC_{11} + VC_{12} + u_1 C_1 + v_1 C_2 - \alpha d \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $B_5 = 0$),

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

$$\hat{N}C_2 + UC_{12} + VC_{22} + u_2C_1 + v_2C_2 - \alpha d\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $C_5 = 0$),

$$\hat{N}c_{11} + 2u_1c_{11} + 2v_1c_{12} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $D_5 = 0$),

$$\hat{N}c_{22} + 2u_2c_{12} + 2v_2c_{22} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $E_5 = 0$),

$$\hat{N}c_{12} + u_1c_{12} + u_2c_{11} + v_1c_{22} + v_2c_{12} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2} = 0$$

(это уравнение следует из равенства $F_5 = 0$),

$$\frac{\partial w}{\partial z} + u_1 + v_2 = 0$$

(это уравнение следует из равенства $A_6 = 0$). (5)

Для сокращения записи и уточнения физического смысла полученная система квазилинейных уравнений в частных производных (5) записана в операторном виде. Параболические нелинейные дифференциальные операторы в частных производных типа операторов для дифференциальных уравнений теплопроводности с конвективным членом записываются следующим образом:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\hat{M} = \frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial z} - \left(\chi + \alpha^2 dn\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{6}$$

$$\hat{N} = \frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial z} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Характерной особенностью системы уравнений (5) и дифференциальных операторов (6) является наличие в уравнении теплопроводности слагаемого, учитывающего концентрацию. Системы (2), (3) и, как следствие, (4), позволяют описывать движения жидкости, учитывая диссипативные перекрестные эффекты Соре и Дюфура [6, 12, 13, 21].

В подавляющем большинстве работ по анализу решений уравнений термодиффузии эффектом Дюфура пренебрегают [6, 12, 13, 19–21]. Отсутствие эффекта Дюфура при анализе течений жидкостей объясняют незначительностью влияния температуры на концентрацию [6, 12, 13, 19–21]. Тем не менее, в силу принципа Онсагера, эффект Дюфура существует и, хотя является признаком неустойчивости, оказывает влияние на движение жидкости [6, 12, 13, 19–21]. Далее будут рассмотрены решения уравнения термодиффузии, учитывающего оба перекрестных эффекта.

Исторически первое точное решение уравнений Навье – Стокса было получено для линеаризованного уравнения [6, 12, 13, 19–21], которое в настоящее время называется уравнением Стокса (приближением Стокса) [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Рассматриваемое приближение справедливо с некоторыми оговорками для сильновязких жидкостей [1, 2]. Оно описывает так называемые ползущие (медленные) течения жидкостей [6, 32–41]. Это эквивалентно близости к нулю числа Рейнольдса или его аналогов при движении жидкости в неизотермических силовых полях [1, 2, 6, 13]. Изучение медленных движений необходимо для жидкостей, у которых силы внутреннего сопротивления преобладают над инерционными силами. В этом случае из-за вязкости скорость потока мала, что позволяет не учитывать конвективную производную $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ в уравнениях движения. Приведем точное решение для приближения Стокса, в котором пренебрегаем влиянием конвективной производной $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$, $(\mathbf{V}\cdot\nabla)T$, $(\mathbf{V}\cdot\nabla)C$ во всех уравнениях, описывающих движение термодиффузионных потоков.

Для уравнений термодиффузии (2) приближение Стокса с учетом равенства нулю конвективных производных $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=0$, $(\mathbf{V}\cdot\nabla)T=0$, $(\mathbf{V}\cdot\nabla)C=0$ записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathrm{g}\left(\beta_1 T + \beta_2 C\right)\mathbf{i}_3,\\
\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\chi + \alpha^2 dn\right)\Delta T + \alpha dn \Delta C,\\
\frac{\partial C}{\partial t} = d\Delta C + \alpha d \Delta T,\\
\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Для линейной системы (7) уравнения для определения гидродинамических полей записываются в операторном виде:

$$\hat{L}U + P_1 = 0,\ \hat{L}u_1 + P_{11} = 0,\ \hat{L}u_2 + P_{12} = 0,$$

$$\hat{L}V + P_2 = 0,\ \hat{L}v_1 + P_{12} = 0,\ \hat{L}v_2 + P_{22} = 0,$$

$$\hat{L}w + \frac{\partial P_0}{\partial z} - g\left(\beta_1 T_0 + \beta_2 C_0\right) = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_1 + \beta_2 C_1\right),$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_2 + \beta_2 C_2\right),$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{11} + \beta_2 C_{11}\right),$$

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{12} + \beta_2 C_{12}\right),$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial z} = g\left(\beta_1 T_{22} + \beta_2 C_{22}\right),$$

$$\widehat{M}T_0 - \left(\chi + \alpha^2 dn\right)\left(T_{11} + T_{22}\right) - \alpha dn\left(C_{11} + C_{22} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\widehat{M}T_1 - \alpha dn\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} = 0,\ \widehat{M}T_2 - \alpha dn\frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} = 0,\ \widehat{M}T_{11} - \alpha dn\frac{\partial^2 C_{11}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\widehat{M}T_{22} - \alpha dn\frac{\partial^2 C_{22}}{\partial z^2} = 0,\ \widehat{M}T_{12} - \alpha dn\frac{\partial^2 C_{12}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\hat{N}C_0 - d\left(C_{11} + C_{22}\right) - \alpha d\left(T_{11} + T_{22} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\hat{N}C_1 - \alpha d\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0,\ \hat{N}C_2 - \alpha d\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0,\ \hat{N}c_{11} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\hat{N}c_{22} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} = 0,\ \hat{N}c_{12} - \alpha d\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + u_1 + v_2 = 0. \tag{8}$$

Дифференциальные операторы (6) для записи уравнений (8) преобразуются к линейному виду при описании термодиффузионных течений типа Стокса:

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\widehat{M} = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\chi + \alpha^2 dn\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\hat{N} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Система уравнений (8) состоит из простейших уравнений теплопроводности с различными характерными диффузионными временами и градиентных уравнений, и ее можно быстро и эффективно решать устойчивыми численными методами. Кроме того, существуют аналитические методы интегрирования системы (8). Рассмотрим для иллюстрации свойств решений системы (8) установившиеся течения бинарной жидкости.

Система уравнений (8) при стационарном течении ($\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}=0$, $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, $\frac{\partial C}{\partial t}=0$) редуцируется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2T_1}{dz^2}=0,\ \frac{d^2T_2}{dz^2}=0,\\
\frac{d^2T_{11}}{dz^2}=0,\ \frac{d^2T_{22}}{dz^2}=0,\\
\frac{d^2T_{12}}{dz^2}=0,\ \frac{d^2C_1}{dz^2}=0,\\
\frac{d^2C_2}{dz^2}=0,\ \frac{d^2C_{11}}{dz^2}=0,\\
\frac{d^2C_{22}}{dz^2}=0,\ \frac{d^2C_{12}}{dz^2}=0,\\
\frac{d^2T_0}{dz^2}=-\left(T_{11}+T_{22}\right),\\
\frac{d^2C_0}{dz^2}=-\left(C_{11}+C_{22}\right), \qquad (9)\\
\frac{dP_1}{dz}=g\left(\beta_1T_1+\beta_2C_1\right),\\
\frac{dP_2}{dz}=g\left(\beta_1T_2+\beta_2C_2\right),\\
\frac{dP_{11}}{dz}=g\left(\beta_1T_{11}+\beta_2C_{11}\right),\\
\frac{dP_{12}}{dz}=g\beta\left(\beta_1T_{12}+\beta_2C_{12}\right),\\
\frac{dP_{22}}{dz}=g\left(\beta_1T_{22}+\beta_2C_{22}\right),\\
\nu\frac{d^2U}{dz^2}=P_1,\ \nu\frac{d^2u_1}{dz^2}=P_{11},
\end{gathered}
$$

$$\frac{d^2u_2}{dz^2}=P_{12},\ \nu\frac{d^2V}{dz^2}=P_2,$$

$$\nu\frac{d^2v_1}{dz^2}=P_{12},\ \nu\frac{d^2v_2}{dz^2}=P_{22},$$

$$\frac{dw}{dz}+u_1+v_2=0,$$

$$\frac{dP_0}{dz}=\nu\frac{d^2w}{dz^2}+g\beta_1T_0+g\beta_2C_0=-\left(\frac{du_1}{dz}+\frac{dv_2}{dz}\right)+g\beta_1T_0+g\beta_2C_0.$$

Уравнения системы (9) выписаны в том порядке, в котором осуществляется интегрирование. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений сорок третьего порядка (9) записывается следующим образом [32]:

$$T_1=c_1z+c_2,\ T_2=c_3z+c_4,$$

$$T_{11}=c_5z+c_6,\ T_{12}=c_7z+c_8,$$

$$T_{22}=c_9z+c_{10},\ C_1=c_{11}z+c_{12},$$

$$C_2=c_{13}z+c_{14},\ C_{11}=c_{15}z+c_{16},$$

$$C_{12}=c_{17}z+c_{18},\ C_{22}=c_{19}z+c_{20},$$

$$T_0=-(c_5+c_9)\frac{z^3}{3!}-(c_6+c_{10})\frac{z^2}{2!}+c_{21}z+c_{22},$$

$$C_0=-(c_{15}+c_{19})\frac{z^3}{3!}-(c_{16}+c_{20})\frac{z^2}{2!}+c_{23}z+c_{24},$$

$$P_1=g\beta_1\left(c_1\frac{z^2}{2}+c_2z\right)+g\beta_2\left(c_{11}\frac{z^2}{2}+c_{12}z\right)+c_{25},$$

$$P_2=g\beta\left(c_3\frac{z^2}{2}+c_4z\right)+g\beta_2\left(c_{13}\frac{z^2}{2}+c_{14}z\right)+c_{26},$$

$$P_{11}=g\beta\left(c_5\frac{z^2}{2}+c_6z\right)+g\beta_2\left(c_{15}\frac{z^2}{2}+c_{16}z\right)+c_{27},$$

$$P_{12}=g\beta\left(c_7\frac{z^2}{2}+c_8z\right)+g\beta_2\left(c_{17}\frac{z^2}{2}+c_{18}z\right)+c_{28},$$

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

$$P_{22} = g\beta\left(c_9\frac{z^2}{2} + c_{10}z\right) + g\beta_2\left(c_{19}\frac{z^2}{2} + c_{20}z\right) + c_{29}\,, \tag{10}$$

$$U = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_1\frac{z^4}{4!} + c_2\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{11}\frac{z^2}{2} + c_{12}z\right) + \frac{c_{25}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{30}z + c_{31}\,,$$

$$V = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_3\frac{z^4}{4!} + c_4\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{13}\frac{z^2}{2} + c_{14}z\right) + \frac{c_{26}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{32}z + c_{33}\,,$$

$$u_1 = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_5\frac{z^4}{4!} + c_6\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{15}\frac{z^2}{2} + c_{16}z\right) + \frac{c_{27}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{34}z + c_{35}\,,$$

$$u_2 = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{17}\frac{z^2}{2} + c_{18}z\right) + \frac{c_{28}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{36}z + c_{37}\,,$$

$$v_1 = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{17}\frac{z^2}{2} + c_{18}z\right) + \frac{c_{28}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{38}z + c_{39}$$

$$v_2 = \frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_9\frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{19}\frac{z^2}{2} + c_{20}z\right) + \frac{c_{29}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{40}z + c_{41}\,,$$

$$w = -\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_5\frac{z^5}{5!} + c_9\frac{z^5}{5!} + c_6\frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^4}{4!}\right) - \frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{15}\frac{z^5}{5!} + c_{19}\frac{z^5}{5!} + c_{16}\frac{z^4}{4!} + c_{20}\frac{z^4}{4!}\right) -$$

$$-\left(\frac{c_{27}}{\nu}\frac{z^3}{3!} + \frac{c_{29}}{\nu}\frac{z^3}{3!}\right) - \left(c_{34}\frac{z^2}{2} + c_{40}\frac{z^2}{2}\right) - \left(c_{35}z + c_{41}z\right) + c_{42}\,,$$

$$P_0 = -2g\beta_1\left(\left(c_5 + c_9\right)\frac{z^4}{4!} + \left(c_6 + c_{10}\right)\frac{z^3}{3!}\right) + g\beta_1\left(c_{21}\frac{z^2}{2!} + c_{22}z\right) -$$

$$-2g\beta_2\left(\left(c_{15} + c_{19}\right)\frac{z^4}{4!} + \left(c_{16} + c_{20}\right)\frac{z^3}{3!}\right) + g\beta_2\left(c_{23}\frac{z^2}{2!} + c_{24}z\right) -$$

$$-\nu\left(\left(c_{27} + c_{29}\right)\frac{z^2}{2} + \left(c_{34} + c_{40}\right)z + c_{35} + c_{41}\right) + c_{43}\,.$$

Здесь c_i, где $i = \overline{1;43}$ – постоянные интегрирования точного решения (10) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9). Таким образом, после интегрирования системы (10) гидродинамические поля (4) имеют вид

$$V_x(x,y,z)=\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_1\frac{z^4}{4!}+c_2\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{11}\frac{z^2}{2}+c_{12}z\right)+\frac{c_{25}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{30}z+c_{31}+$$

$$+x\left(\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_5\frac{z^4}{4!}+c_6\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{15}\frac{z^2}{2}+c_{16}z\right)+\frac{c_{27}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{34}z+c_{35}\right)+$$

$$+y\left(\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!}+c_8\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{17}\frac{z^2}{2}+c_{18}z\right)+\frac{c_{28}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{36}z+c_{37}\right),$$

$$V_y(x,y,z,t)=\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_3\frac{z^4}{4!}+c_4\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{13}\frac{z^2}{2}+c_{14}z\right)+\frac{c_{26}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{32}z+c_{33}+$$

$$+x\left(\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!}+c_8\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{17}\frac{z^2}{2}+c_{18}z\right)+\frac{c_{28}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{38}z+c_{39}\right)+$$

$$+y\left(\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_9\frac{z^4}{4!}+c_{10}\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{19}\frac{z^2}{2}+c_{20}z\right)+\frac{c_{29}}{\nu}\frac{z^2}{2}+c_{40}z+c_{41}\right),$$

$$V_z=-\frac{g\beta_1}{\nu}\left(c_5\frac{z^5}{5!}+c_9\frac{z^5}{5!}+c_6\frac{z^4}{4!}+c_{10}\frac{z^4}{4!}\right)-\frac{g\beta_2}{\nu}\left(c_{15}\frac{z^5}{5!}+c_{19}\frac{z^5}{5!}+c_{16}\frac{z^4}{4!}+c_{20}\frac{z^4}{4!}\right)-$$

$$-\left(\frac{c_{27}}{\nu}\frac{z^3}{3!}+\frac{c_{29}}{\nu}\frac{z^3}{3!}\right)-\left(c_{34}\frac{z^2}{2}+c_{40}\frac{z^2}{2}\right)-\left(c_{35}z+c_{41}z\right)+c_{42},$$

$$P(x,y,z,t)=-2g\beta_1\left((c_5+c_9)\frac{z^4}{4!}+(c_6+c_{10})\frac{z^3}{3!}\right)+g\beta_1\left(c_{21}\frac{z^2}{2!}+c_{22}z\right)-$$

$$-2g\beta_2\left((c_{15}+c_{19})\frac{z^4}{4!}+(c_{16}+c_{20})\frac{z^3}{3!}\right)+g\beta_2\left(c_{23}\frac{z^2}{2!}+c_{24}z\right)-$$

$$-\nu\left((c_{27}+c_{29})\frac{z^2}{2}+(c_{34}+c_{40})z+c_{35}+c_{41}\right)+c_{43}+$$

$$+x\left(g\beta_1\left(c_1\frac{z^2}{2}+c_2z\right)+g\beta_2\left(c_{11}\frac{z^2}{2}+c_{12}z\right)+c_{25}\right)+$$

$$+y\left(g\beta\left(c_3\frac{z^2}{2}+c_4z\right)+g\beta_2\left(c_{13}\frac{z^2}{2}+c_{14}z\right)+c_{26}\right)+$$

$$+\frac{x^2}{2}\left(g\beta\left(c_5\frac{z^2}{2}+c_6z\right)+g\beta_2\left(c_{15}\frac{z^2}{2}+c_{16}z\right)+c_{27}\right)+$$

$$+\frac{y^2}{2}\left(g\beta\left(c_9\frac{z^2}{2}+c_{10}z\right)+g\beta_2\left(c_{19}\frac{z^2}{2}+c_{20}z\right)+c_{29}\right)+$$

$$+xy\left(g\beta\left(c_7\frac{z^2}{2}+c_8z\right)+g\beta_2\left(c_{17}\frac{z^2}{2}+c_{18}z\right)+c_{28}\right),$$

$$T(x,y,z,t)=-(c_5+c_9)\frac{z^3}{3!}-(c_6+c_{10})\frac{z^2}{2!}+c_{21}z+c_{22}+x(c_1z+c_2)+y(c_3z+c_4)+$$

$$+\frac{x^2}{2}(c_5z+c_6)+\frac{y^2}{2}(c_9z+c_{10})+xy(c_7z+c_8),$$

$$C(x,y,z,t)=-(c_{15}+c_{19})\frac{z^3}{3!}-(c_{16}+c_{20})\frac{z^2}{2!}+c_{23}z+c_{24}+x(c_{11}z+c_{12})+$$

$$+y(c_{13}z+c_{14})+\frac{x^2}{2}(c_{15}z+c_{16})+\frac{y^2}{2}(c_{19}z+c_{20})+xy(c_{17}z+c_{18}).$$

При рассмотрении общих решений (10) термодиффузионной системы уравнений Стокса в приближении Буссинеска горизонтальные градиенты и кривизны температуры, а также концентрации легкого компонента распределены по линейному закону:

$$T_1=c_1z+c_2,\ T_2=c_3z+c_4,$$

$$T_{11}=c_5z+c_6,\ T_{12}=c_7z+c_8,$$

$$T_{22}=c_9z+c_{10},\ C_1=c_{11}z+c_{12},$$

$$C_2=c_{13}z+c_{14},\ C_{11}=c_{15}z+c_{16},$$

$$C_{12}=c_{17}z+c_{18},\ C_{22}=c_{19}z+c_{20}.$$

Как будет показано ниже, структура решений, описывающих движения жидкостей, для которых уже необходимо учитывать влияние конвективного ускорения, существенно усложняется. Данное замечание справедливо для остальных функций (10), которые связаны компонентами полей при линейных и квадратичных слагаемых. Ниже будет приведено решение некоторых краевых задач, обобщающих известные классические течения вязкой несжимаемой жидкости.

Решения (10), несмотря на простой вид, описывают вид трехмерных стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, играющий очень важную роль в технической и технологической гидродинамике [32–41]. Речь идет о течениях с экстремальными значениями гидродинамических полей. Как известно, для нахождения экстремума необходимо вычислить градиенты давления, температуры и концентрации [32–41]. В случае если данные поля не зависят от квадратичных слагаемых x^2 и y^2, функции P, T, C, вообще говоря, могут не иметь глобального экстремума на области определения, поскольку их частные производные по переменным x и y не зависят от горизонтальных координат.

Рассмотрим данное утверждение на примере давления, которое представлено в виде

$$P = P_0 + xP_1 + yP_2 .$$

Необходимое условие для определения точек минимума и максимума определяется системой уравнений

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} + x\frac{\partial P_1}{\partial z} + y\frac{\partial P_2}{\partial z} = 0 ,$$

$$P_1 = 0 ,\ P_2 = 0 .$$

Анализируя систему, получим условие, которое гарантирует ее разрешимость – независимость первого уравнения от горизонтальных координат:

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 ,\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = 0 .$$

Следовательно, точка экстремума является кратным корнем для градиентов P_1 и P_2, а исходные уравнения эквивалентны системе

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = 0 ,\ \frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 ,\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = 0 ,$$

$$P_1 = 0 ,\ P_2 = 0 .$$

Очевидно, что решение этой системы найти и исследовать достаточно непросто даже для полиномиального представления гидродинамических полей (10), если положить равными нулю постоянные интегрирования, возникающие при определении квадратичных слагаемых полей P, T, C. Еще одной трудностью при доказательстве существования экстремума будет невыполнение достаточного условия, наиболее часто используемого при решении задач минимизации или максимизации.

4. Заключение

В статье рассмотрен класс точных решений для описания медленных течений (типа Стокса) для вязких бинарных жидкостей. Семейство точных решений построено благодаря использованию поля скоростей Линя – Сидорова – Аристова, которое описывается линейными формами относительно двух координат с коэффициентами, зависящими от третьей координаты и времени. Поля давления, температуры и концентрации растворенного вещества описываются квадратичными формами. Рассмотрено установившееся течение, приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений сорок третьего порядка. После ее интегрирования приведены выражения для гидродинамических полей, описывающих установившееся трехмерное течение Стокса бинарной жидкости. Полученные точные решения представляют теоретический интерес для изучения установившихся течений по аналогии с исследованиями, анонсированными в работе [45–60]. Для построения новых точных решений для краевых задач важно рассмотреть многослойные и многокомпонентные жидкости в слоях с различным поперечным сечением и граничным условием на межфазных границах.

Литература

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
2. Гершуни Г. З. Жуховицкий, Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М. : Наука, 1989.
3. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection // Soviet Physics Uspekhi. – 1991. – 34 (9). – P. 737–776. – DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
4. Mathematical Models of Convection / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin, Boston : De Gruyter, 2012. – 417 p. – DOI: 10.1515/9783110258592.
5. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : ВятГУ, 2011. – 206 с.
6. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Symmetry. – 2023. – Vol. 15. – P. 1825. – DOI: 10.3390/sym15101825.
7. Булгаков С. Н. Исследование роли халинных факторов в формировании циркуляции и структуры вод Черного моря : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.12. – Севастополь, 1986. – 155 с.
8. Булгаков С. Н., Коротаев Г. К. Аналитическая модель струйной циркуляции в замкнутых водоемах // Морской гидрофизический журнал. – 1987. – № 3. – С. 434–446.
9. Aristov S. N., Shvarts K. G. On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin // Soviet Journal of Physical Oceanography. – 1991. – Vol. 2. – P. 293–298. – DOI: 10.1007/BF02346081.
10. Burmasheva N. V. Prosviryakov E. Yu. Exact solution for Couette-type steady convective concentration flows // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62 (7). – P. 155–166. – DOI: 10.1134/S0021894421070051.
11. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8 (4). – С. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
12. Рыжков И. И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2013. – 199 с.
13. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
14. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the flow of multicomponent fluids with internal heat generation // Russian Aeronautics. – 2024. – Vol. 67 (1). – P. 60–69. – DOI: 10.3103/S1068799824010070.
15. The effect of abrasive additives on the tribotechnical properties of lubricants for the wheel–rail system / L. F. Koroleva, R. A. Savrai, E. Yu. Prosviryakov, V. A. Kostarev, S. V. Pavlyshko, P. V. Kostarev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 54–64. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.054-064. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_390.html
16. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows / E. Yu. Prosviryakov, S. A., Mikhailov O. A. Ledyankina, L. S. Goruleva // Russian Aeronautics. – 2023, – Vol. 66 (3). – P. 500–509. – DOI: 10.3103/S106879982303011X.
17. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to magnetohydrodynamics equations for describing convective flows of binary fluids // Technical Physics. – 2023. – Vol. 68 (10). – P. 292–301. – DOI: 10.1134/S1063784224700191.
18. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo

Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2021. – Vol. 25 (4). – P. 781–793. – DOI: 10.14498/vsgtu1878.
19. Burmasheva N. V. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect // Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika. – 2021. – Vol. 37. – P. 17–30. – DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.17.
20. Burmasheva N. V. Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // Journal of King Saud University – Science. – 2020. – Vol. 32 (8). – P. 3364–3371. – DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.02.
21. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // Symmetry. – 2023. – Vol. 15. – P. 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows // Dynamics. – 2022, – Vol. 2 (4), – P. 367–379. – DOI: 10.3390/ dynamics2040021.
23. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. Ser. Technical Memorandum. – No. 1407. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
24. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1966. – Vol. 7 (3). – P. 43–44. – DOI: 10.1007/bf00914697.
25. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского госуниверситета. Сер. Гидродинамика. – 1972. – № 4. – С. 129–140.
26. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного течения жидкости // Журнал технической физики. – 1953. – Т. 23 (10). – С. 1838–1844.
27. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12 (3). – P. 209–233. – DOI: 10.1090/qam/64563.
28. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynamics. – 2014. – Vol. 49 (4). – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
29. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2011. – Vol. 52 (2). – P. 212–217. – DOI: 10.1134/ S0021894411020088.
30. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9 (4). – С. 651–657.
31. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (2). – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.
32. Goruleva L. S., Obabkov I. I., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for convective Stokes flows // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 2. – P. 36–49. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2_437.html
33. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.
34. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное конвективное течение Куэтта–Хименца при квадратичном нагреве нижней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14 (1). – С. 69–79. – DOI: 10.20537/nd1801007.
35. Vlasova, S. S., Prosviryakov E. Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary // Russian Aeronautics. – 2016. – Vol. 59 (4). – P. 529–535. – DOI: 10.3103/S1068799816040140.

36. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12 (2). – С. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
37. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Плоская линейная конвекция Бенара-Рэлея при квадратичном нагреве верхней границы слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2015. – № 2. – С. 6–13.
38. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2014. –№ 3. – С. 7–12.
39. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. – № 3. – С. 34–45.
40. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физ.-мат. науки». – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118. – DOI: 10.14498/vsgtu1205.
41. Privalova V. V. Prosviryakov E. Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2018. – Vol. 22 (3). – P. 532–548. – DOI: 10.14498/vsgtu1638.
42. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
43. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1989. – Vol. 30 (2). – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
44. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. доктора физ.-мат. наук : 01.02.05. – Владивосток, 1990. – 303 с.
45. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier – Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2022. – Vol. 18 (3). – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
46. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier – Stokes equations describing stratified fluid flows // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2021. – Vol. 25 (3). – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.
47. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
48. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier – Stokes equations with couple stresses // Symmetry. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
49. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2022. – Vol. 56 (3). – P. 331–338. – DOI: 10.1134/S0040579522030113.
50. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release // Optics and Spectroscopy. – 2022. – Vol. 130 (6). – P. 365–370. – DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
51. Andreev V. K., Efimova M. V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small Marangoni numbers // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2024. – Vol. 18 (2). – P. 179–191. – DOI: 10.1134/S1990478924020017.

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

52. Andreev V. K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a three-dimensional layer at low Marangoni numbers // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2024. – Vol. 17 (2). – P. 195–206.
53. Andreev V. K., Pianykh A. A. Comparative analysis of the analytical and numerical solution of the problem of thermocapillary convection in a rectangular channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2023. – Vol. 16 (1). – P. 48–55.
54. Andreev V. K., Lemeshkova E. N. Thermal convection of two immiscible fluids in a 3D channel with a velocity field of a special type // Fluid Dynamics. – 2023. – Vol. 58 (7). – P. 1246–1254. – DOI: 10.1134/s0015462823602176.
55. Andreev V. K., Uporova A. I. Initial boundary value problem on the motion of a viscous heat-conducting liquid in a vertical pipe // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2023. – Vol. 16 (1). – P. 5–16.
56. Andreev V. K., Uporova A. I. On a spectral problem for convection equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2022. – Vol. 15 (1). – P. 88–100. – DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-1-88-100.
57. Andreev V. K., Stepanova I. V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (4). – P. 445–451. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.
58. Andreev V. K., Sobachkina N. L. Two-layer stationary flow in a cylindrical capillary taking into account changes in the internal energy of the interface // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (4). – P. 507–518. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-507-518.
59. Lemeshkova E., Andreev V. On the asymptotic behavior of inverse problems for parabolic equation // Journal of Elliptic and Parabolic Equations. – 2021. – Vol. 7 (2). – P. 905–921. – DOI: 10.1007/s41808-021-00127-8.
60. Andreev V. K. Asymptotic behavior of small perturbations for unsteady motion an ideal fluid jet // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (2). – P. 204–212. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-204-212.