Received: 16.08.2019
Revised: 24.08.2019
Accepted: 30.08.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.016-025

ON THE ANALYTICAL CONSTRUCTION OF A HEAT WAVE FOR THE NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A SOURCE IN POLAR COORDINATES

A. L. Kazakov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation

https://orcid.org/0000-0002-3047-1650 a__kazakov@mail.ru

Corresponding author. E-mail: a__kazakov@mail.ru
Address for correspondence: 34, ul. Komsomolskaya, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 362 30 22; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper is devoted to the study of a nonlinear second-order parabolic equation, which in the literature is called the heat equation with a source or the generalized porous medium equation. We construct specialized solutions that describe disturbances propagating over the zero background at a finite velocity (heat waves). Previously, we studied such problems without a source. In this paper, we extend the known results to a more general case. The theorem of the existence and uniqueness of a solution having the form of a heat wave in polar coordinates is proved. A heat wave is constructed in the form of a convergent multiple power series, the coefficients of which are determined when solving systems of linear algebraic equations. We give an example where the conditions of the theorem are not satisfied. It shows that the solution, in this case, has the form of a stable heat wave.

Keywords: nonlinear heat conduction equation, heat wave, power series, convergence, existence and uniqueness theorem.

Acknowledgment

The work was partially supported by the Complex Program of UB RAS, project No. 18-1-1-5.

References

1. Samarsky A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Blow-Up in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 476 p. (In Russian).
2. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p. ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
3. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh effektov* [Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena], Moscow, Fizmatlit Publ., 1966, 687 p. (In Russian).
4. Kovalev V.A., Kurkina E.S., Kuretova E.D. Thermal self-focusing during solar flares. *Plasma Physics Reports*, 2017, vol. 43, no. 5, pp. 583–587. DOI: 10.1134/S1063780X17050063.
5. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhydkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Flow of Liquids and Gases in Natural Reservoirs]. Moscow, Nedra Publ., 1984, 211 p. (In Russian).
6. Sidorov A.F. *Izbrannye Trudy. Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics, Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian). ISBN 5-9221-0103-X.

7. Leont'ev N.E., Tatarenkova D.A. Exact solutions to nonlinear equations of suspension flow through a porous medium. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2015, vol. 70, no. 3, pp. 61–65. DOI: 10.3103/S0027133015030024.
8. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 107–117. DOI: 10.1134/S0965542507010113.
9. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem with Applications]. Novosibirsk, Nauka, 2006, 399 p. (In Russian). ISBN 5-02-032540-6.
10. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129. (In Russian).
11. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Study of the Boundary-Value Problem of Nonlinear Filtration with Degeneration. *Vychisl. Tekhnol.*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68. (In Russian).
12. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary element method and power series method for one-dimensional non-linear filtration problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, iss. 2, pp. 2–17. (In Russian).
13. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 10–11, pp. 6918–6928. DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
14. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On one boundary value problem for a nonlinear heat equation in the case of two space variables. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 12, no. 2, pp. 1–11. DOI: 10.1134/S1990478914020094.
15. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the Analytic Solutions of a Special Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Polar Coordinates. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 1–11. DOI: 10.1134/S1990478918020060.
16. Kazakov A.L. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 114–122. (In Russian).
17. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a.
18. Filimonov M.Yu. Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations. *AIP Conference Proceeding*, 2014, vol. 1631, pp. 218–223. DOI: 10.1063/1.4902479.
19. Courant R., Hilbert D. In *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: Partial Differential Equations, New York, Wiley, 2008, 852 p. ISBN: 978-3-527-61724-1.
20. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A. Solution of the Problem of Initiating the Heat Wave for a Nonlinear Heat Conduction Equation Using the Boundary Element Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.

Подана в журнал: 16.08.2019
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.016-025

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

А. Л. Казаков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, 620049, Екатеринбург, Российская Федерация

https://orcid.org/0000-0002-3047-1650 a__kazakov@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: a__kazakov@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 362–30–22; факс: +7 (343) 374–53–30

Работа посвящена исследованию нелинейного параболического уравнения второго порядка, которое в литературе называют уравнением теплопроводности с источником или «generalized porous medium equation». Для него строятся решения специального вида, которые описывают возмущения, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью (тепловые волны). Ранее такие задачи рассматривались в отсутствии источника. В настоящей работе известные научные результаты переносятся на более общий случай. Производится переход в полярную систему координат, доказывается теорема существования и единственности решения, имеющего вид тепловой волны. Она строится в виде сходящегося кратного степенного ряда, коэффициенты которого определяются при решении систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен пример, в котором условия теоремы не выполнены, и показано, что решение в этом случае имеет вид остановившейся (неподвижной) тепловой волны.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, тепловая волна, степенной ряд, сходимость, теорема существования и единственности.

1. Введение

Нелинейное уравнение теплопроводности с источником [1], которое также называют «generalized porous medium equation» [2], является одним из наиболее известных объектов математической физики. Оно имеет многочисленные приложения и используется при описании высокотемпературной плазмы [3, 4], процессов лучистой теплопроводности [1], фильтрации газа в пористом грунте [5] и т. д.

Существует большое количество публикаций, посвященных разностороннему исследованию этого уравнения, его аналогов и обобщений. Объясняется это, помимо уже упомянутых приложений, его нетривиальными математическими свойствами. Известно, например, что скорость распространения возмущений, им описываемых, может быть конечной [6]. Именно такого рода решения рассматриваются в настоящей статье. Обзор исследований в данном направлении не входит в цели настоящей работы, однако упомянем публикации, посвященные построению точных [7] и приближенных решений [8], а также работы автора, посвященные доказательству аналогов и обобщений [9] теоремы Коши-Ковалевской в многомерном случае [10], построению приближенных решений разностными методами [11], методами степенных рядов и граничных элементов [10, 12, 13].

2. Постановка задачи и начальные допущения

Одна из форм записи нелинейного уравнения теплопроводности с источником имеет вид

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + \alpha u^{\beta}. \tag{1}$$

Здесь $F(u) = \alpha u^{\beta}$ – функция источника ($\alpha > 0$) или стока ($\beta < 0$). Рассмотрим (1) в случае двух пространственных переменных [14]. Перейдем к полярным координатам. Пусть x – пространственная переменная; $\varphi \in (-\pi, \pi]$ – полярный угол; t – время (как и ранее). Получим уравнение

$$u_t = uu_{xx} + \frac{uu_{\varphi\varphi}}{x^2} + \frac{u_x^2}{\sigma} + \frac{uu_x}{x} + \frac{u_{\varphi}^2}{\sigma x^2} + \alpha u^{\beta}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) рассмотрим краевое условие

$$u(t, x, \varphi)|_{x=R(t,\varphi)} = f(t, \varphi). \tag{3}$$

Пусть кривая $\rho = R(t,\varphi)$ замкнута и ограничивает в R^2 *звездную* область (в области имеется *полюс*, который можно соединить с любой другой точкой области отрезком, целиком ей принадлежащим). Гладкие функции $R(t,\varphi) > 0$ и $f(t,\varphi)$ удовлетворяют неравенствам $R_t|_{t=0} \geq 0,\ f_t|_{t=0} \geq 0$ и

$$(R_t|_{t=0})^2 + (f_t|_{t=0})^2 > 0. \tag{4}$$

Пусть также $f(0,\varphi) = 0$ и $F(0) = 0$. Ранее задача (2), (3) исследовалась нами в случае, когда $\alpha = 0$, т. е. без источника (стока) [15].

3. Основной результат

Сформулируем и докажеи теорему существования и единственности решения задачи (2), (3), которая является основным результатом настоящего исследования. Под *аналитической* далее понимается функция, совпадающая в некоторой области со своим тейлоровским разложением.

Теорема. *Пусть* $R(t,\varphi)$ *и* $f(t,\varphi)$ *– функции, аналитические в некоторой окрестности* $t = 0$*;* $\beta \in N$*, и выполнено неравенство* (4)*. Тогда задача* (2), (3) *имеет /в окрестности* $t = 0$*;* $\rho = R(t,\varphi)$ *ненулевое аналитическое решение, единственное при выборе направления движения тепловой волны.*

Доказательство проводится в два этапа. 1. Построение решения в виде степенного [16] (специального [17, 18]) ряда. 2. Доказательство сходимости методом мажорант [19]. Отметим, что разработка методики построения решений нелинейных краевых задач математической физики в виде специальных (характеристических) рядов является одним из важных достижений научной школы А.Ф. Сидорова [6], к которой принадлежит автор [16].

Для удобства дальнейших выкладок введем новую независимую переменную $r = x - R(t,\varphi)$. Задача (2), (3) примет вид:

$$u_t - R_t u_r = \left(u u_{rr} + \frac{1}{\sigma} u_r^2 \right) g + G, \tag{5}$$

$$u(t,r,\varphi)|_{r=0} = f(t,\varphi), \tag{6}$$

где $G = u\left[\frac{u_r}{r+R} + \frac{u_{\varphi\varphi} - 2R_\varphi u_{\varphi r} - R_{\varphi\varphi} u_r}{(r+R)^2} \right] + \frac{u_\varphi^2 - 2R_\varphi u_r u_\varphi}{\sigma (r+R)^2} + \alpha u^\beta$, $g(t,r,\varphi) = 1 + \left(\frac{R_\varphi}{r+R} \right)^2$.

Решение будем строить в виде двойного ряда:

$$u(t,r,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi) \frac{t^n}{n!} \frac{r^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi) \frac{t^n}{n!} \frac{[x - R(t,\varphi)]^m}{m!}, \tag{7}$$

коэффициенты которого определяются при последовательном решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с неограниченно возрастающей размерностью. Отметим, что такого рода конструкции обычно характерны для уравнений и систем гиперболического типа [9].

По условию теоремы R и f – аналитические функции. Следовательно, для них справедливы разложения:

$$R(t,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\varphi) \frac{t^n}{n!},\ R_n = \left. \frac{\partial^n R}{\partial t^n} \right|_{t=0};\ f(t,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varphi) \frac{t^n}{n!},\ f_n = \left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

Из краевого условия (6) следует, что $u_{n,0} = f_n$, причем $u_{0,0} = f_0 = 0$. Остальные коэффициенты определяются индукцией по сумме индексов. Пусть сумма индексов равна 1. Известно, что $u_{1,0} = f_1$. Коэффициент $u_{0,1}$ найдем, положив $t = r = 0$ в уравнении (5). С учетом равенства $u(0,0,\phi) = 0$ получим квадратное уравнение, корни которого имеют вид

$$u_{0,1} = \frac{-\sigma R_1 \pm \sqrt{(\sigma R_1)^2 + 4\sigma g_{0,0} f_1}}{2 g_{0,0}},$$

где $g_{0,0}(\varphi) = g(0,0,\varphi)$ Выбор знака перед корнем определяет направление движения тепловой волны. При этом условие (4) обеспечивает наличие хотя бы одного ненулевого корня. База индукции установлена.

Пусть найдены коэффициенты $u_{i,j}$, $i + j \le n$ (до порядка n включительно). Воспользуемся дифференциальным оператором $L_{n-k,k}[.] = \left. \frac{\partial^n [.]}{\partial^{n-k} t \partial^k r} \right|_{t=r=0}$, $n \ge 2, 0 \le k \le n$.

Применяя его к уравнению (4), получим равенство

$$u_{n-k+1,k} + A_k u_{n-k,k+1} + B_{n-k} u_{n-k-1,k+2} = C_{n-k,k}, \tag{8}$$

где $A_i = -R_1 - g_{0,0} u_{0,1} (i + 2/\sigma)$, $B_i = -i f_1$. При этом все искомые величины (сумма нижних индексов у них равна $n+1$) находятся в левой части уравнения (8). Значения $C_{n-k,k}$ зависят от коэффициентов порядка не выше n, т. е. известны (соотвествующие формулы здесь не приводятся из-за громоздкости). Полагая в (8) $k = 0,1,...,n$, получаем СЛАУ с квадратной трехдиагональной матрицей, для которой, как можно убедиться, не выполнено условие диагонального преобладания. Тем не менее, используя ранее доказанное авторами утверждение [15], можно показать, что она невырожденная. Следовательно, система (8) однозначно разрешима и производные порядка $n+1$, а, значит, и все коэффициенты ряда (7), определяются единственным образом.

Особого обсуждения заслуживает применение оператора $L_{n-k,k}$ к функции источника (стока). Поскольку, в соотвествии с условием теоремы, $\beta \in \mathbb{N}$, то производные любого порядка здесь определяются однозначно, однако сама процедура дифференцирования является весьма громоздкой, так как необходимо многократно дифференцировать сложную функцию $F(u(t,r,\varphi))$. В частности:

$$F_{0,0} = 0, F_{1,0} = \alpha\beta u^{\beta-1} u_{1,0}, F_{0,1} = \alpha\beta u^{\beta-1} u_{0,1}, F_{2,0} = \alpha\beta(\beta-1) u^{\beta-1} u_{1,0}^2 + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{2,0},$$
$$F_{1,1} = \alpha\beta(\beta-1) u^{\beta-1} u_{1,0} u_{0,1} + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{1,1}, F_{0,2} = \alpha\beta(\beta-1) u^{\beta-1} u_{0,1}^2 + \alpha\beta u^{\beta-1} u_{0,2}, \ldots .$$

Указанное обстоятельство имеет важное значение, если необходимо выписать явные формулы коэффициентов – появление источника (стока) значительно повышает громоздкость процедуры. Исключением является случай, когда $\beta = 1$: здесь $F_{i,j} = \alpha u_{i,j}$.

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства. Перед построением мажорантной задачи последовательно сделаем в (5), (6) несколько невырожденных замен.

Из постановки задачи следует, что существует фронт тепловой волны ([15]), т. е. замкнутая аналитическая кривая $x = a(t,\varphi)$, которая неявно задается равенствами

$$u(t,r,\varphi)|_{r=a(t,\varphi)} = 0, \ a(0,\varphi) = R(0,\varphi). \tag{9}$$

Пусть $b(t,\varphi) = a(t,\varphi) - R(t,\varphi)$ – расстояние от линии $x = R(t,\varphi)$ до фронта тепловой волны. Введем новые независимые переменные τ, s, φ_1

$$\tau = t, \ s = r - b(t,\varphi), \ \varphi_1 = \varphi. \tag{10}$$

Задача (5), (6), (9) после замены (10) примет вид (индекс у третьей независимой переменной далее для простоты опущен):

$$u_\tau - b_\tau u_s - R_\tau u_s = \left(u u_{ss} + \frac{1}{\sigma} u_s^2 \right) g + G, \tag{11}$$

$$u(\tau,s,\varphi)|_{s=-b(\tau,\varphi)} = f(\tau,\varphi), \tag{12}$$

$$u(\tau,s,\varphi)|_{s=0} = 0, \tag{13}$$

Краевые условия (6) и (9) преобразуются в равенства (12) и (13) соответственно. В задаче появилась дополниетльная функция b. Чтобы избавиться от нее, сделаем замену

$$s = s(\tau,u,\varphi) \tag{14}$$

которая является аналогом преобразования годографа. Подобные замены неоднократно прменялись в работах А.Ф. Сидорова и его учеников [6]. Можно видеть, что (14) меняет ролями неизвестную функцию u и независимую переменную s. Краевые условия (12) и (13) примут вид:

$$s(\tau,u,\varphi)\,|_{u=f(\tau,\varphi)}=-b(\tau,\varphi), \tag{15}$$

$$s(\tau,u,\varphi)\,|_{u=0}=0. \tag{16}$$

Из равенства (15) можно выразить неизвестную функцию b и подставить в уравнение (11), исключив тем самым данную функцию из рассмотрения.

Далее введем новую независимую переменную $w=u-f$, в результате чего линия $u=f$ становится новой координатной осью. Чтобы выразить τ через новые переменные, используем теорему о неявной функции и представим искомую функцию в виде частичного разложения в ряд Тейлора по степеням u:

$$s(u,w,\varphi)=s_0(w,\varphi)+us_1(w,\varphi)+u^2p(u,w,\varphi).$$

Здесь $s_0\equiv 0$ (16); s_1 – известная аналитическая функция, вид которой несущественен для целей доказательства, а p – новая искомая функция. В итоге задача сводится к одному уравнению вида

$$\begin{gathered}\frac{2(1+\sigma)}{\sigma}p+\frac{4\sigma+1}{\sigma}up_u+u^2p_{uu}+c_0(w,\varphi)p\,|_{w=0}+c_1(w,\varphi)u(p_u\,|_{w=0})+c_2(w,\varphi)u^2(p_{uu}\,|_{w=0})=\\=h_0+uh_1+u^2h_2+u^3h_3.\end{gathered} \tag{17}$$

Функции c_i, $i=0,1,2$ и h_j, $j=0,1,2,3$ удовлетворяют условиям леммы 2 из статьи [15]. Следовательно, уравнение (17) имеет единственное нетривиальное решение в виде формального ряда по степеням u. Можно показать, что при выполнении мажорантных оценок $P_0<<S_0$, $P_1<<c_1$, $c^*<<c_0+c_1+c_2$ и $Hj<<hj$, $j=0,1,2,3$, задача

$$P_{uu}=(1+c^*)\left(\frac{\partial^2H_0}{\partial u^2}+\frac{\partial H_1}{\partial u}+H_2+uH_3\right),\ P\,|_{u=0}=P_0,\ P_u\,|_{u=0}=P_1 \tag{18}$$

является мажорантной для уравнения (17). Положив в уравнении (18) $u=0$, найдем $P_2=P_{uu}\big|_{u=0}$. Далее, продифференцировав (18) по u и разрешив выражение относительно P_{uuu}, получим задачу типа Ковалевской с аналитическими входными данными, которая по теореме Коши-Ковалевской [19] имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана.

Замечание 1. *При* $f(t,\varphi)\equiv 0$ *исследование задачи существенно упрощается. В частности, решение в этом случае можно построить в виде ряда по степеням одной переменной* r*, а для построения мажорантной задачи достаточно сделать одну замену* $u(t,r,\varphi)=ru_1(t,\varphi)+r^2U(t,r,\varphi)$*, где* u_1 *– некоторая известная функция.*

Замечание 2. *Поскольку рекуррентная процедура, использованная в ходе доказательства, вполне конструктивна, теорема не только обеспечивает существование аналитического решения рассмотренной задачи, но и доставляет алгоритм построения приближенных решений в виде отрезков ряда* (7), *которые, в частности, можно использовать в качестве тестовых примеров при проверке корректности результатов расчетов, выполненных другими методами* [20].

4. Остановившаяся тепловая волна

Условие (4) играет существенную роль при доказательстве теоремы и носит принципиальный характер, однако его невыполнение не обязательно влечет неразрешимость задачи. Покажем на конкретном примере, что может происходить в случае, когда оно не выполняется. Рассмотрим уравнение (1) в случае плоской симметрии:

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \alpha u^{\beta}, \tag{19}$$

Граничное условие (3) также упростим:

$$u(t,x)|_{x=R} = 0. \tag{20}$$

Несложно убедиться, что стандартная процедура построения решения в виде ряда возможна лишь при введении дополнительного краевого условия $u|_{t=0} = q(x) \not\equiv 0$, $q(0) = q'(0) = 0$. Вопрос о сходимости ряда, который получается в этом случае, пока открыт. Тем не менее можно утверждать, что задача (19), (20) имеет некоторые частные точные аналитические решения.

Утверждение. *Задача* (19), (20) *имеет следующие нетривиальные точные решения вида остановившейся (неподвижной) тепловой волны*:

1. *При* $\alpha = 0$: $u(t,x) = \dfrac{C_1(x-R)^2}{(2+4/\sigma)(C_2 - C_1 t)}$.

2. *При* $\beta = 1, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathrm{R}$: $u(t,x) = \dfrac{C_1(x-R)^2}{(2+4/\sigma)(C_2\exp(-\alpha t) - C_1/\alpha)}$.

Здесь $C_1, C_2 \neq 0$ – const.

Доказательство. Утверждение доказывается с помощью представления $u(t,x) = v_1(t)v_2(x)$ (методом Фурье), после подстановки которого в исходную задачу получается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование последней дает искомые решения.

Таким образом показано, что невыполнение условий теоремы может привести к тому, что фронт тепловой волны будет неподвижен. Подобные решения рассматривались, в частности, в работе [1].

5. Заключение

Подводя итог исследования отметим, что в ходе него была доказана новая теорема существования и единственности решений типа тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности с источником, которая обобщила ранее полученные результаты автора. Важной отличительной чертой теоремы является то, что она, помимо установления факта существования решения при выполнении определенных предположений, сформулированных в условии, также позволяет строить приближенные решения по конструктивной рекуррентной процедуре. Рассмотрен также пример, который показывает, что при невыполнении условий доказанной теоремы возможна ситуация, когда тепловая волна существует, однако она не движется (остановившаяся тепловая волна).

Благодарность

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН, проект № 18-1-1-5.

Литература

1. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 476 с.
2. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М. : Физматлит, 1966. – 687 с.
4. Kovalev V. A., Kurkina E. S., Kuretova E. D. Thermal self-focusing during solar flares / Plasma Physics Reports. – 2017. – Vol. 43, no. 5. – P. 583–587. – DOI: 10.1134/S1063780X17050063.
5. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М. : Недра, 1984. – 211 с.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.
7. Леонтьев Н. Е., Татаренкова Д. А. Точные решения нелинейных уравнений течения суспензии в пористой среде // Вестник Московского университета. Серия 1 «Математика. Механика». – 2015. – № 3. – С. 49–54. – DOI: 10.3103/S0027133015030024.
8. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.
9. Баутин С. П., Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. – Новосибирск : Наука, 2006. –399 с. – ISBN 5-02-032540-6.
10. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
11. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
12. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия ИГУ. Серия «Математика». – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
13. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
14. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 46–54.
15. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. 21, № 2. – С. 56–65. – DOI: 10.17377/SIBJIM.2018.21.205.

16. Казаков А. Л. Применение характеристических рядов для построения решений нели нейных параболических уравнений и систем с вырождением // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 114–122.
17. Филимонов М. Ю. Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1100–1107.
18. Filimonov M. Yu. Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations // AIP Conference Proceeding. – 2014. – Vol. 1631, iss. 1 –. P. 218–223. – DOI: 10.1063/1.4902479.
19. Курант Р. Уравнения с частными производными / пер. с англ. – М. : Мир, 1964. – 830 с.
20. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. Solution of the Problem of Initiating the Heat Wave for a Nonlinear Heat Conduction Equation Using the Boundary Element Method / Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 59, no. 6. – P. 1015–1029. – DOI: 10.1134/S0965542519060083.