

**Received:** 27.04.2025  
**Revised:** 10.06.2025  
**Accepted:** 27.06.2025  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2025.3.016-030

## ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS TO A NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A FRACTIONAL TIME DERIVATIVE

A. L. Kazakov<sup>a</sup> and L. F. Spevak<sup>b, \*</sup>

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

<sup>a</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);  
<sup>b</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

\*Corresponding author. Email: [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia  
Tel.: +7 (343) 362-3022; fax: +7 (343) 374-5330

The paper presents an analytical and numerical study of a degenerate nonlinear heat equation containing a conformable fractional time derivative. It briefly reviews the use of fractional calculus in mathematical models of natural-science processes and phenomena, as well as methods for solving problems containing fractional derivatives. The theorem of the existence and uniqueness of the thermal wave analytical solution at a specified zero front is proved for the equation under study. The analytical solution is constructed in the form of a power series. An incremental algorithm for constructing a numerical solution with difference approximation in time is proposed. The iteration approach based on the collocation method and approximation by radial basis functions is applied at each step. Test calculations are made in order to verify the numerical algorithm, where the numerical solutions are compared with the truncated series representing the analytical solutions.

**Keywords:** parabolic equation, nonlinear heat equation, fractional derivative, conformable derivative, exact solution, existence and uniqueness theorem, analytical solution, numerical solution, collocation method, radial basis functions

### Acknowledgment

*The study was financially supported by the Russian Ministry of Science and Higher Education under the project on Studying and Modeling of the Rheology and Heat-and-Mass Transfer Phenomena in Structured Environments at Variable Initial and Boundary Conditions, No. 124020600042-9.*

### References

1. Tarasov, V.E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, 505 p. DOI: 10.1007/978-3-642-14003-7.
2. Povstenko, Yu., Kyrlych, T., Woźna-Szcześniak, B., and Yatsko, A. Fractional heat conduction with heat absorption in a solid with a spherical cavity under time-harmonic heat flux. *Applied Sciences*, 2024, 14, 1627. DOI: 10.3390/app14041627.
3. Weia, S., Chena, W., and Zhang, J. Time-fractional derivative model for chloride ions sub-diffusion in reinforced concrete. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2017, 21 (3), 319–331. DOI: 10.1080/19648189.2015.1116467.

4. Chang, A., Sun, H.G., Zheng, C., Lu, B., Lu, C., Mae, R., and Zhang, Y. A time fractional convection-diffusion equation to model gas transport through heterogeneous soil and gas reservoirs. *Physica A*, 2018, 502, 356–369. DOI: 10.1016/j.physa.2018.02.080.
5. Bolster, D., Benson, D.A., and Singha, K. Upscaling chemical reactions in multicontinuum systems: when might time fractional equations work? *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, 102, 414–425. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.04.028.
6. Meng, R., Yin, D., Zhou, C., and Wu, H. Fractional description of time-dependent mechanical property evolution in materials with strain softening behavior. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40, 398–406. DOI: 10.1016/j.apm.2015.04.055.
7. Sun, H.G., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., and Chen, Y.Q. A new collection of real-world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 64, 213–231. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.019.
8. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 264, 65–70. DOI: 10.1016/j.cam.2014.01.002.
9. Abdeljawad, T. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 279, 57–66. DOI: 10.1016/j.cam.2014.10.016.
10. Abu Hammad, M. and Khalil, R. Conformable fractional heat differential equation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2014, 94 (2), 215–221. DOI: 10.12732/ijpam.v94i2.8.
11. Zhou, H.W., Yang, S., and Zhang, S.Q. Conformable derivative approach to anomalous diffusion. *Physica A*, 2018, 491, 1001–1013. DOI: 10.1016/j.physa.2017.09.101.
12. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 6, 54–67. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6\\_350.html](http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html)
13. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. Analytical and numerical radially symmetric solutions to a heat equation with arbitrary nonlinearity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 2, 49–64. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2\\_400.html](http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2_400.html)
14. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. Self-similar solutions to a multidimensional singular heat equation with power nonlinearity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 2, 6–19. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2\\_400.html](http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2_400.html)
15. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, 10 (9), 1559. DOI: 10.3390/math10091559.
16. Kazakov, A.L. and Spevak, L.F. Exact and approximate solutions of a problem with a singularity for a convection-diffusion equation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, 62 (1), 18–26. DOI: 10.1134/S002189442101003X.
17. Kazakov, A.L. and Orlov, S.S. On some exact solutions to a nonlinear heat equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, 22 (1), 112–123. (In Russian).
18. Kazakov, A.L., Spevak, L.F., Nefedova, O.A., and Lempert, A.A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term. *Symmetry*, 2020, 12 (6), 921. DOI: 10.3390/sym12060921.
19. Sidorov, A.F. *Izbrannye Trudy: Matematika, Mekhanika* [Selected Works: Mathematics and Mechanics]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2001, 576 p. (In Russian).
20. Sorokin, P.N. Some generalizations of the Faa Di Bruno formula. *Chebyshevskii Sbornik*, 2023, 24 (5), 180–193. (In Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193.

21. Zeid, S.S. Approximation methods for solving fractional equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, 125, 171–193. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.05.008.
22. Zhang, Y. A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215 (2), 524–529. DOI: 10.1016/j.amc.2009.05.018.
23. Du, R., Cao, W.R., and Sun, Z.Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34 (10), 2998–3007. DOI: 10.1016/j.apm.2010.01.008.
24. Chen, M. and Deng, W. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusion equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2014, 52 (3), 1418–1438. DOI: 10.1137/130933447.
25. Hamou, A.A., Hammouch, Z., Azroul, E., and Agarwal, P. Monotone iterative technique for solving finite difference systems of time fractional parabolic equations with initial/periodic conditions. *Applied Numerical Mathematics*, 2022, 181, 561–593. DOI: 10.1016/j.apnum.2022.04.022.
26. Jiang, Y. and Ma, J. High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235 (11), 3285–3290. DOI: 10.1016/j.cam.2011.01.011.
27. Liu, Y., Du, Y., Li, H., Li, J., and He, S. A two-grid mixed finite element method for a nonlinear fourth-order reaction-diffusion problem with time-fractional derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, 2015, 70 (10), 2474–2492. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.09.012.
28. Feng, L.B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., and Gu, Y.T. Finite element method for space-time fractional diffusion equation. *Numerical Algorithms*, 2016, 72, 749–767. DOI: 10.1007/s11075-015-0065-8.
29. Senol, M., Tasbozan, O., and Kurt, A. Numerical solutions of fractional Burgers' type equations with conformable derivative. *Chinese Journal of Physics*, 2019, 58, 75–84. DOI: 10.1016/j.cjph.2019.01.001.
30. Bhrawy, A.H. and Baleanu, D. A spectral Legendre–Gauss–Lobatto collocation method for a space-fractional advection diffusion equations with variable coefficients. *Reports on Mathematical Physics*, 2013, 72 (2), 219–233. DOI: 10.1016/S0034-4877(14)60015-X.
31. Bhrawy, A.H., Zaky, M.A., and Baleanu, D. New numerical approximations for space-time fractional Burgers' equations via a Legendre spectral-collocation method. *Romanian Reports in Physics*, 2015, 67 (2), 340–349.
32. Saad, K.M., Khader, M.M., Gomez-Aguilar, J.F., and Baleanu, D. Numerical solutions of the fractional fisher's type equations with Atangana–Baleanu fractional derivative by using spectral collocation methods. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, 29 (2), 023116. DOI: 10.1063/1.5086771.
33. Zúñiga-Aguilar, C.J., Romero-Ugalde, H.M., Gómez-Aguilar, J.F., Escobar-Jiménez, R.F., and Valtierra-Rodríguez, M. Solving fractional differential equations of variable-order involving operators with Mittag–Leffler kernel using artificial neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, 103, 382–403. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.06.030.
34. Ye, Y., Fan, H., Li, Y., Liu, X., and Zhang, H. Deep neural network methods for solving forward and inverse problems of time fractional diffusion equations with conformable derivative. *Neurocomputing*, 2022, 509, 177–192. DOI: 10.1016/j.neucom.2022.08.030.
35. Jafari, H., Malidareh, B.F., and Hosseini, V.R. Collocation discrete least squares meshless method for solving nonlinear multi-term time fractional differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2024, 158, 107–120. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.10.014.
36. Zhuang, P., Gu, Y., Liu, F., Turner, I., and Yarlagaadda, P.K.D.V. Time-dependent fractional advection–diffusion equations by an implicit MLS meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 88 (13), 1346–1362. DOI: 10.1002/nme.3223.

37. Hosseini, V.R., Chen, W., and Avazzadeh, Z. Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, 38, 31–39. DOI: 10.1016/j.enganabound.2013.10.009.
38. Dehghan, M., Abbaszadeh, M., and Mohebbi, A. An implicit RBF meshless approach for solving the time fractional nonlinear sine-Gordon and Klein–Gordon equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 50, 412–434. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.09.008.
39. Chen, W., Fu, Z.-J., and Chen, C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, 90 p. DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
40. Buhmann, M.D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
41. Fornberg, B. and Flyer, N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, 24, 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130.

Подана в журнал: 27.04.2025

УДК 517.958:519.633

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.3.016-030

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

А. Л. Казаков<sup>а</sup>, Л. Ф. Спёвак<sup>б, \*</sup>

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова  
Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

<sup>а</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  [a\\_kazakov@mail.ru](mailto:a_kazakov@mail.ru);

<sup>б</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

\* Ответственный автор. Электронная почта: [lfs@imach.uran.ru](mailto:lfs@imach.uran.ru)

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-22; Факс: +7 (343) 374-53-30

Работа посвящена аналитическому и численному исследованию вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности, содержащего конформную дробную производную по времени. Приведен краткий обзор применения дробного исчисления в математических моделях естественнонаучных процессов и явлений, а также методов решения задач, содержащих производные дробного порядка. Для рассматриваемого уравнения доказана теорема существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны при заданном нулевом фронте. Аналитическое решение строится в виде степенного ряда. Предложен пошаговый алгоритм построения численного решения с разностной аппроксимацией по времени. На каждом шаге применяется итерационный подход, основанный на методе коллокаций и аппроксимации радиальными базисными функциями. Для верификации численного алгоритма проведены тестовые расчеты, в которых численные решения сравнивались с отрезками рядов, в виде которых представлены аналитические решения.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, нелинейное уравнение теплопроводности, дробная производная, конформная производная, теорема существования и единственности, аналитическое решение, численное решение, метод коллокаций, радиальные базисные функции

### 1. Введение

Во многих областях науки исследователи сталкиваются с явлениями и процессами, которые плохо описываются общепринятыми моделями. Классические дифференциальные уравнения, обыкновенные и с частными производными, не могут в полной мере описать многие сложные физические системы и процессы, происходящие в неоднородных средах. В связи с этим в последнее время растет применение дробного исчисления – рассматриваются производные и интегралы произвольного, необязательно целого, порядка. Дробное исчисление является мощным инструментом для описания физических систем, имеющих длительную память и дальнейшее пространственное взаимодействие [1].

Дифференциальные уравнения и системы с дробными частными производными применяются для описания механических и динамических систем в физике, химии, материаловедении, биологии, экологии и других областях науки. Подобные новые модели происходящих в природе процессов реализуются и тестируются на экспериментальных данных. В работе [2] рассматривается уравнение теплопроводности с абсорбцией в твердом теле со сферической полостью, содержащее дробную производную по времени, и исследуются свойства

его решений при различных порядках производной. В работе [3] уравнение диффузии с дробной производной по времени используется для моделирования диффузии хлорид-ионов в железобетон. В работе [4] движение газа в неоднородной почве и газовых резервуарах моделируется дробным уравнением конвекции-диффузии. Статья [5] посвящена оценке применимости дробных производных для масштабирования химических реакций в многокомпонентных системах. Дробные производные нашли свое применение не только в дифференциальных уравнениях. Так, в работе [6] они используются в определяющих уравнениях для описания зависящих от времени механических свойств материалов с разупрочнением. В результате построенные кривые упрочнения с полным циклом более точно описывают экспериментальные данные. Таким образом, использование дробного исчисления позволяет расширить возможности моделирования процессов и явлений, происходящих в природе. Подробно его применение в различных областях представлено в обзорной статье [7].

Впервые понятие дробной производной ввел в конце XVII века Лейбниц. В XIX и XX веках многие ученые дали различные определения дробной производной. Наиболее распространенными из них в настоящее время являются производная Римана – Лиувилля,

$$D_{RL}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left( \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \quad n-1 < \alpha < n \quad (1)$$

и производная Герасимова – Капуто

$$D_C^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha > 0$  – константа,  $\Gamma(a)$  – гамма-функция,  $n$  – наименьшее натуральное число, превосходящее  $\alpha$ .

В 2014 году в пионерской работе [8] была введена конформная дробная производная. Для функции  $f(t)$ , определенной на интервале  $[0, \infty)$ , она определяется следующим образом:

$$D^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Можно показать, что справедливо равенство

$$D^{\alpha} f(t) = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}. \quad (4)$$

Простота вычисления, а также наличие некоторых свойств производной, отсутствующих у (1) и (2) [9], обусловили широкое применение конформной дробной производной, в частности, в моделях тепло- и массопереноса [10, 11].

Поскольку дробное исчисление является эффективным современным аппаратом моделирования, то актуальной проблемой является разработка методов решения входящих в модели дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные. Одним из возмож-

ных подходов здесь является трансфер результатов, ранее полученных для «классических» постановок.

Ранее авторами настоящей статьи был разработан комплексный подход к решению нелинейных вырождающихся параболических уравнений, описывающих теплопроводность [12–14], диффузию [15], конвекцию-диффузию [16], позволяющий эффективно находить и исследовать решения, имеющие тип тепловой (диффузионной) волны, которые описывают возмущения, распространяющиеся по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью [17, 18]. Подход включает в себя конструктивное доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения, разработку алгоритма численного решения, нахождение точных решений, численный анализ решений.

Данная статья является первым опытом исследования нелинейного уравнения теплопроводности, содержащего дробную производную, с использованием методов и подходов, предложенных нами ранее для «классических» постановок. Доказана теорема существования и единственности нетривиального решения с нулевым фронтом, являющегося основной частью тепловой волны. Предложен приближенный алгоритм, основанный на разложении по радиальным базисным функциям и методе коллокаций. Проведены тестовые расчеты для верификации численных решений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение второго порядка с конформной дробной производной по времени

$$D_t^\alpha T = (T^\sigma T_x)_x + f(T), \quad (5)$$

где  $T$  – искомая функция (температура),  $t$  – время,  $x$  – пространственная переменная,  $D_t^\alpha$  – конформная производная (3) по времени,  $\sigma > 0$  и  $0 < \alpha < 1$  – константы,  $f(T)$  – заданная функция источника (стока),  $f(0) = 0$ .

Заменой искомой функции  $u = T^\sigma$  с учетом равенства (4) уравнение (5) приводится к виду

$$t^{1-\alpha} u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + F(u). \quad (6)$$

Здесь  $F(0) = 0$ . При  $u = 0$  параболический вид уравнения (6), очевидно, вырождается. Для уравнения (6) рассмотрим граничное условие, задающее движение нулевого фронта:

$$u|_{x=a(t)} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $a(t)$  – достаточно гладкая функция,  $a(t_0) = 0$ ,  $a'(t_0) > 0$ .

Нахождение и исследование решений задачи (6), (7) является основной целью данной работы.

## 3. Теорема существования

Рассмотрим уравнение вида

$$b(t)u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + F(u), \quad (8)$$

обобщающее выражение (6). Здесь  $b(t)$  – аналитическая в некоторой окрестности  $t = t_0$  функция. Под «аналитической» мы в данном случае понимаем функцию действительной переменной, совпадающую со своим тейлоровским разложением в некоторой области. Очевидно, что функция  $b(t) = t^{1-\alpha}$  обладает указанным свойством в некоторой окрестности точки  $t = t_0 > 0$ .

Для уравнения (8) рассмотрим граничное условие (7).

**Теорема.** Пусть  $F(u)$ ,  $a(t)$ ,  $b(t)$  – аналитические функции в окрестности  $u = 0$  и  $t = t_0$  соответственно,  $a(t_0) = 0$ ,  $a'(t_0) > 0$ ,  $b(t_0) > 0$ . Тогда задача (8), (7) имеет единственное нетривиальное аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $t = t_0$ ,  $x = a(t_0)$ .

Перед началом доказательства сделаем два замечания. Во-первых, задача (8), (7) имеет тривиальное решение  $u \equiv 0$ , существование и единственность ненулевого решения отнюдь не очевидны. Во-вторых, если  $b(t) = 1$ , то имеем известную теорему о существовании тепловой (фильтрационной) волны с заданным фронтом [19].

Доказательство теоремы проводится в два этапа: сначала строится решение, имеющее вид характеристического ряда, а затем доказывается его сходимость.

1. Построение решения. Вначале выполним замену независимых переменных

$$t' = t, \quad r = x - a(t). \quad (9)$$

Штрих у переменной  $t$  далее для удобства обозначений опускается. Задача (8), (7) после замены (9) примет вид

$$b(t)u_t - b(t)a'(t)u_r = uu_{rr} + \frac{1}{\sigma}u_r^2 + F(u), \quad u|_{r=0} = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (10) построим в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{[x - a(t)]^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{r^n}{n!}, \quad u_n = \frac{\partial^n u}{\partial r^n} \Big|_{r=0}. \quad (11)$$

Поскольку кривая  $x = a(t)$  в данном случае является для уравнения (8) характеристикой, ряд (11) является характеристическим. Коэффициенты (11) определяются рекуррентным образом.

Из (10) следует, что  $u_0 \equiv 0$ . Положив в уравнении (10)  $r = 0$ ,  $u = 0$ , получим, что  $-b(t)a'(t)u_1 = u_1^2/\sigma$ . Это уравнение имеет два корня, первый из которых,  $u_1 \equiv 0$ , приводит к тривиальному решению рассматриваемой задачи, а второй,  $u_1 = -\sigma a'(t)b(t)$ , – к нетривиальному. Пусть найдены коэффициенты (11) до  $u_n$ ,  $n > 1$ , включительно. Тогда для нахождения  $u_{n+1}$  имеем следующее соотношение:

$$u_{n+1} = \frac{1}{(1 + n\sigma)a'(t)b(t)} \left( \sum_{k=2}^n C_n^k u_k u_{n-k+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k u_{k+1} u_{n-k+1} - b(t)u'_n + F_n \right). \quad (12)$$

Здесь  $F_n = \partial^n F(u)/\partial r^n|_{r=0}$ . Дифференцирование выполняется по формуле Фаа-ди-Бруно [20].

Отметим, что выражение (12) получается при последовательном дифференцировании уравнения (10) по переменной  $r$ . При этом, если  $u_0, u_1, \dots, u_n$  известны, то  $u_{n+1}$  по формуле (12) определяется однозначно. Решение в виде ряда построено.

2. Сходимость ряда (11), (12) доказывается методом мажорант с использованием классической теоремы Коши – Ковалевской. Процедура построения мажорантной задачи является достаточно сложной и здесь излагается схематически.

Сначала сделаем замены независимой переменной и искомой функции по формулам  $x = r + a(t)$ ,  $u(t, r) = -r\sigma a'(t) + r^2 V(t, r)$ , в результате которой уравнение (10) примет вид

$$2(1+\sigma)V + (1+4\sigma)rV_r + \sigma r^2 V_{rr} = g_0 + rg_1 + r^2 g_2 + r^3 g_3, \quad (13)$$

где  $g_0 = g_0(t, r)$ ,  $g_1 = g_1(t, r, V, V_t)$ ,  $g_2 = g_2(t, r, V, V_t, V_r)$ ,  $g_3 = g_3(t, r, V, V_t, V_r, V_{rr})$  – заданные функции своих аргументов, выражения для которых громоздки, их точный вид не имеет принципиального значения, поэтому они не приводятся. Для совместности уравнения (13) потребуем выполнения условий

$$V|_{r=0} = \frac{g_0(t, 0)}{2(1+\sigma)} = V_0(t), \quad V_r|_{r=0} = \frac{(g_0)_r|_{r=0} + (g_1)_r|_{r=0}}{3(1+2\sigma)} = V_1(t). \quad (14)$$

Мажорантная для (13), (14) задача строится в виде

$$W_{rr} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} + \frac{\partial G_1}{\partial r} + G_2 + rG_3 \right), \quad W(t, r)|_{r=0} = W_0(t), \quad W_r(t, r)|_{r=0} = W_1(t), \quad (15)$$

где  $V_i \ll W_i$ ,  $i = 0, 1$ ;  $g_k \ll G_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , символ “ $\ll$ ” означает, что правая функция является для левой мажорантой. Существование и единственность аналитического решения задачи (15) доказывается с помощью теоремы Коши – Ковалевской. В свою очередь, из построения задачи (15) следует, что  $V(t, r) \ll W(t, r)$ , т. е. ряд (11), (12) является сходящимся. Теорема доказана.

**Замечание.** Доказанная теорема позволяет построить решение задачи (6), (7), имеющее вид тепловой (диффузионной, фильтрационной) волны, распространяющейся по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью. Для этого необходимо при надлежащем выборе функции  $b(t)$  состыковать неотрицательную часть нетривиального решения (11), (12) и тривиальное решение  $u \equiv 0$  на линии вырождения (7).

#### 4. Численное решение

Для численного решения уравнений с дробными производными применяются как методы, которые являются развитием аналогов, применяемых для уравнений с классическими производными, так и специальные новые подходы. В обзорной статье [21] отмечается, что численных алгоритмов для решения уравнений с дробными частными производными разработано заметно меньше, чем, например, для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными. Довольно широко применяются адаптированные методы конечных разностей [22–25] и конечных элементов [26–28], метод степенных рядов [29], спектральные методы [30–32], а также современные подходы с использованием нейронных сетей [33, 34]. Отдельно отметим бессеточные методы, такие как метод коллокаций [35], основанные на аппроксимации методом скользящих наименьших квадратов [36] и радиальными базисными функциями (РБФ) [37, 38].

Для построения численного решения задачи (6), (7) на заданном промежутке времени  $t \in [t_0, t^*]$  используем подход, аналогичный примененному в [12, 13, 15], который основан на методе коллокаций [39] и РБФ [40, 41]. В произвольный момент времени  $t$  представим уравнение (6) в виде уравнения Пуассона

$$u_{xx} = G(u, u_t, u_x), \quad (16)$$

где

$$G(u, u_t, u_x) = \frac{1}{u} \left( t^{1-\alpha} u_t - \frac{1}{\sigma} u_x^2 - F(u) \right). \quad (17)$$

Можно показать, что из условия (7) следует краевое условие на производную вдоль нулевого фронта  $x = a(t)$ :

$$u_x|_{x=a(t)} = -\sigma t^{1-\alpha} a'(t). \quad (18)$$

С учетом выражения (18) решение задачи (6), (7) будем строить по шагам по времени. На каждом шаге  $t_k = t_0 + kh$ , где  $h$  – величина шага, будем решать уравнение (16) на отрезке  $x \in [0, L]$ , где  $L = a(t_k)$ , с граничными условиями

$$u|_{x=L} = 0, \quad (19)$$

$$u_x|_{x=L} = -\sigma t_k^{1-\alpha} a'(t_k). \quad (20)$$

Для решения задачи (16), (19), (20) применим классический метод частных решений, а именно, представим решение в виде

$$u(t_k, x) = v(x) + w(x), \quad (21)$$

где  $v(x)$  – частное решение уравнения (16) в момент  $t_k$ ,  $w(x)$  – решение соответствующей краевой задачи для однородного уравнения:

$$w'' = 0, \quad (22)$$

$$w|_{x=L} = -v(L), \quad (23)$$

$$w'|_{x=L} = -\sigma t_k^{1-\alpha} a'(t_k) - v'(L). \quad (24)$$

Решение будем строить итерационно, в соответствии со следующей процедурой, в которой  $u_n$ ,  $v_n$  и  $w_n$  –  $n$ -е итерации решений.

I. Задаем нулевое начальное приближение частного решения:

$$v_0 \equiv 0. \quad (25)$$

II. На  $n$ -й итерации,  $n \geq 0$ , при известном  $v_n$ , находим решение задачи (22)–(24):

$$w_n = -(\sigma t_k^{1-\alpha} a'(t_k) + v'_n(L))(x - L) - v_n(L). \quad (26)$$

III. Получаем  $n$ -ю итерацию решения задачи (16), (19), (20):

$$u_n = v_n + w_n. \quad (27)$$

IV. Находим следующую итерацию частного решения, удовлетворяющую уравнению

$$v''_{n+1} = G(u_n, u_{n,t}, u'_n). \quad (28)$$

Решение уравнения (28) будем строить методом коллокаций, используя разложения правой части по некоторой системе РБФ:

$$G(u_n, u_{n,t}, u'_n) = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(x). \quad (29)$$

Здесь  $\varphi^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(|x - x_k|)$  – РБФ,  $x_1, \dots, x_K$  – точки коллокации, расположенные на отрезке  $[0, L]$ . Каждой  $\varphi^{(k)}(x)$  соответствует такая функция  $\psi^{(k)}(x)$ , что  $d^2\psi^{(k)}/dx^2 = \varphi^{(k)}$ . Производная по времени в левой части выражения (29) вычисляется методом конечных разностей.

Коэффициенты  $\alpha_{n+1}^{(k)}$  определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$G(u_n, u_{n,t}, u'_n)_{|x=x_i} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(x_i), \quad i = 1, \dots, K. \quad (30)$$

При найденных коэффициентах получаем  $(n + 1)$ -ю итерацию частного решения:

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \psi^{(k)}(x). \quad (31)$$

При достаточной близости двух последовательных итераций  $u_{n+1}$  и  $u_n$  итерационный процесс останавливается. Тогда в качестве решения задачи (6), (7) при  $t = t_k$  принимается непрерывно дифференцируемая по  $x$  функция

$$u(t_k, x) = v_{n+1}(x) + w_{n+1}(x). \quad (32)$$

## 5. Пример

Для верификации представленного выше численного алгоритма были проведены расчеты при следующих параметрах задачи (6), (7):  $\sigma = 3$ ,  $F(u) = u$ ,  $a(t) = e^{c(t-t_0)} - 1$ ,  $c = 0,5$ ,  $t_0 = 1$ . Численные решения сравнивались с отрезками ряда (11), (12):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N u_n(t) \frac{[x - a(t)]^n}{n!}. \quad (33)$$

Подстановкой решений вида (33) в уравнение (6) показано, что невязка уравнения при  $N = 20$  имеет один порядок с принятой точностью вычислений с плавающей точкой, по крайней мере при  $t \in [1, 2]$ . Это говорит о том, что в рассмотренных случаях ряд (11), (12) обладает машинной сходимостью [19] в рассмотренном временном диапазоне, и выражения (33) могут быть приняты в качестве тестовых для найденных численных решений. На рисунке показано сравнение численных решений с шагом по времени  $h = 0,05$  и отрезков рядов при различных значениях  $\alpha$  в дробной производной, которое показало близость результатов, что демонстрирует высокую точность численного алгоритма. При  $\alpha = 0,7$  дополнительно приведено численное решение при  $h = 0,1$ , чтобы показать сходимость алгоритма относительно шага по времени.

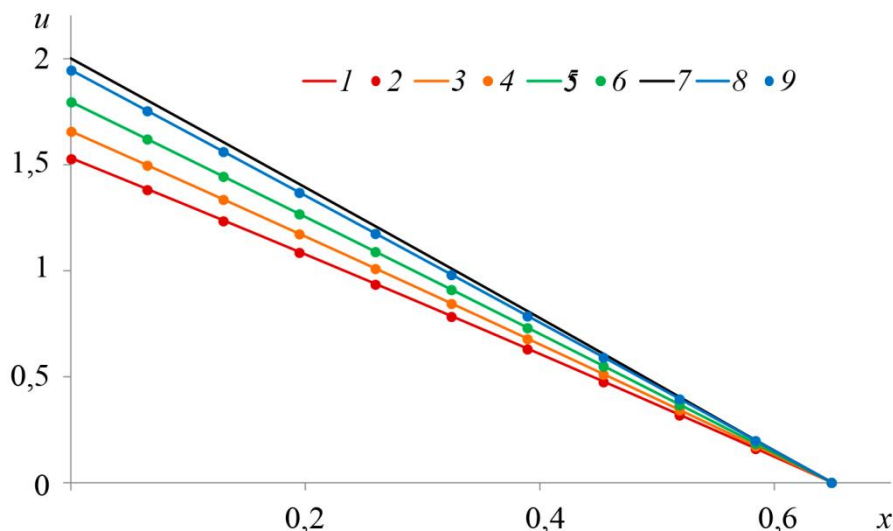


Рисунок – Сравнение численных и аналитических решений: 1 –  $\alpha = 1$ , численное; 2 –  $\alpha = 1$ , аналитическое; 3 –  $\alpha = 0,9$ , численное; 4 –  $\alpha = 0,9$ , аналитическое; 5 –  $\alpha = 0,8$ , численное; 6 –  $\alpha = 0,8$ , аналитическое; 7 –  $\alpha = 0,7$ , численное,  $h = 0,1$ ; 8 –  $\alpha = 0,7$ , численное,  $h = 0,05$ ; 9 –  $\alpha = 0,7$ , аналитическое

По результатам расчетов можно сделать вывод об эффективности предложенного численного алгоритма.

## 6. Заключение

В статье проведено аналитическое и численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с конформной дробной производной по времени. Рассмотрена краевая задача с заданным нулевым фронтом, для которой доказана теорема существования и единственности аналитического решения. Доказательство является конструктивным, аналитическое решение строится в виде степенного ряда с рекуррентно определяемыми коэффициентами, что, в свою очередь, позволяет использовать полученное решение при построении тепловой волны. Предложен алгоритм численного построения решения искомого вида с использованием метода коллокаций, радиальных базисных функций и разностной аппроксимации по времени. Для верификации численного алгоритма рассмотрен тестовый пример. Результаты расчетов при различных порядках дробной производной сравнивались с отрезками ряда в области машинной сходимости последнего. Вычисления показали высокую точность численных решений, а также сходимость алгоритма относительно шага по времени.

Основным результатом работы является успешное применение комплексной методики исследования вырождающихся краевых задач математической физики, разрабатываемой авторами, для принципиально новой постановки, предполагающей наличие в уравнении производной дробного порядка. Это формирует базу для дальнейшего развития указанного подхода и дает основания рассчитывать на его успешное применение для решения более сложных задач, имеющих содержательные приложения.

## Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проекта «Исследование и моделирование явлений реологии и тепломассопереноса в средах с внутренней структурой при переменных начальных и граничных условиях» (№ 124020600042-9).

## Литература

1. Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. – Berlin; Heidelberg : Springer, 2010. – 505 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-14003-7.
2. Fractional heat conduction with heat absorption in a solid with a spherical cavity under time-harmonic heat flux / Y. Povstenko, T. Kyrylych, B. Woźna-Szcześniak, A. Yatsko // Applied Sciences. – 2024. – Vol. 14. – 1627. – DOI: 10.3390/app14041627.
3. Weia S., Chena W., Zhang J. Time-fractional derivative model for chloride ions sub-diffusion in reinforced concrete // European Journal of Environmental and Civil Engineering. – 2017. – Vol. 21 (3). – P. 319–331. – DOI: 10.1080/19648189.2015.1116467.
4. A time fractional convection-diffusion equation to model gas transport through heterogeneous soil and gas reservoirs / A. Chang, H. G. Sun, C. Zheng, B. Lu, C. Lu, R. Mae, Y. Zhang // Physica A. – 2018. – Vol. 502. – P. 356–369. – DOI: 10.1016/j.physa.2018.02.080.
5. Bolster D., Benson D. A., Singha K. Upscaling chemical reactions in multicontinuum systems: when might time fractional equations work? // Chaos, Solitons and Fractals. – 2017. – Vol. 102. – P. 414–425. – DOI: 10.1016/j.chaos.2017.04.028.
6. Fractional description of time-dependent mechanical property evolution in materials with strain softening behavior / R. Meng, D. Yin, C. Zhou, H. Wu // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40. – P. 398–406. – DOI: 10.1016/j.apm.2015.04.055.
7. A new collection of real-world applications of fractional calculus in science and engineering / H. G. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, Y. Q. Chen // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 64. – P. 213–231. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.019.
8. A new definition of fractional derivative / R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 264. – P. 65–70. – DOI: 10.1016/j.cam.2014.01.002.
9. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 279. – P. 57–66. – DOI: 10.1016/j.cam.2014.10.016.
10. Abu Hammad M., Khalil R. Conformable fractional heat differential equation // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 94 (2). – P. 215–221. – DOI: 10.12732/ijpam.v94i2.8.
11. Zhou H. W., Yang S., Zhang S. Q. Conformable derivative approach to anomalous diffusion // Physica A. – 2018. – Vol. 491. – P. 1001–1013. – DOI: 10.1016/j.physa.2017.09.101.
12. Kazakov A. L., Spevak L. F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 6. – P. 54–67. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6\\_350.html](http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html)
13. Kazakov A. L., Spevak L. F. Analytical and numerical radially symmetric solutions to a heat equation with arbitrary nonlinearity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 2. – P. 49–64. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6\\_350.html](http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html)
14. Kazakov A. L., Spevak L. F. Self-similar solutions to a multidimensional singular heat equation with power nonlinearity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 2. – P. 6–19. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.006-019. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2\\_400.html](http://dream-journal.org/issues/2023-2/2023-2_400.html)
15. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10 (9). – 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.

16. Kazakov A. L., Spevak L. F. Exact and approximate solutions of a problem with a singularity for a convection-diffusion equation // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2021. – Vol. 62 (1). – P. 18–26. – DOI: 10.1134/S002189442101003X.
17. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2016. – Т. 22 (1). – С. 112–123.
18. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term / A. L. Kazakov, L. F. Spevak, O. A. Nefedova, A. A. Lempert // *Symmetry*. – 2020. – Vol. 12 (6). – 921. – DOI: 10.3390/sym12060921.
19. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика, механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
20. Сорокин П. Н. Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно // *Чебышевский сборник*. – 2023. – Т. 24 (5). – С. 180–193. – DOI: 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193.
21. Zeid S. S. Approximation methods for solving fractional equations // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2019. – Vol. 125. – P. 171–193. – DOI: 10.1016/j.chaos.2019.05.008.
22. Zhang Y. A finite difference method for fractional partial differential equation // *Applied Mathematics and Computation*. – 2009. – Vol. 215 (2). – P. 524–529. – DOI: 10.1016/j.amc.2009.05.018.
23. Du R., Cao W. R., Sun Z. Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematical Modelling*. – 2010. – Vol. 34 (10). – P. 2998–3007. – DOI: 10.1016/j.apm.2010.01.008.
24. Chen M., Deng W. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusion equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 2014. – Vol. 52 (3). – P. 1418–1438. – DOI: 10.1137/130933447.
25. Monotone iterative technique for solving finite difference systems of time fractional parabolic equations with initial/periodic conditions / A. A. Hamou, Z. Hammouch, E. Azroul, P. Agarwal // *Applied Numerical Mathematics*. – 2022. – Vol. 181. – P. 561–593. – DOI: 10.1016/j.apnum.2022.04.022.
26. Jiang Y., Ma J. High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2011. – Vol. 235 (11). – P. 3285–3290. – DOI: 10.1016/j.cam.2011.01.011.
27. A two-grid mixed finite element method for a nonlinear fourth-order reaction-diffusion problem with time-fractional derivative / Y. Liu, Y. Du, H. Li, J. Li, S. He // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2015. – Vol. 70 (10). – P. 2474–2492. – DOI: 10.1016/j.camwa.2015.09.012.
28. Finite element method for space-time fractional diffusion equation / L. B. Feng, P. Zhuang, F. Liu, I. Turner, Y. T. Gu // *Numerical Algorithms*. – 2016. – Vol. 72. – P. 749–767. – DOI: 10.1007/s11075-015-0065-8.
29. Senol M., Tasbozan O., Kurt A. Numerical solutions of fractional Burgers' type equations with conformable derivative // *Chinese Journal of Physics*. – 2019. – Vol. 58. – P. 75–84. – DOI: 10.1016/j.cjph.2019.01.001.
30. Bhrawy A. H., Baleanu D. A spectral Legendre–Gauss–Lobatto collocation method for a space-fractional advection diffusion equations with variable coefficients // *Reports on Mathematical Physics*. – 2013. – Vol. 72 (2). – P. 219–233. – DOI: 10.1016/S0034-4877(14)60015-X.
31. Bhrawy A. H., Zaky M. A., Baleanu D. New numerical approximations for space–time fractional burgers equations via a Legendre spectral-collocation method // *Romanian Reports in Physics*. – 2015. – Vol. 67 (2). – P. 340–349.
32. Numerical solutions of the fractional fisher's type equations with Atangana–Baleanu fractional derivative by using spectral collocation methods / K. M. Saad, M. M Khader., J. F. Gomez-Aguilar, D. Baleanu // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. – 2019. – Vol. 29 (2). – 023116. – DOI: 10.1063/1.5086771.

33. Solving fractional differential equations of variable-order involving operators with Mittag-Leffler kernel using artificial neural networks / C. J. Zúñiga-Aguilar, H. M. Romero-Ugalde, J. F. Gómez-Aguilar, R. F. Escobar-Jiménez, M. Valtierra-Rodríguez // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2017. – Vol. 103. – P. 382–403. – DOI: 10.1016/j.chaos.2017.06.030.
34. Deep neural network methods for solving forward and inverse problems of time fractional diffusion equations with conformable derivative / Y. Ye, H. Fan, Y. Li, X. Liu, H. Zhang // *Neurocomputing*. – 2022. – Vol. 509. – P. 177–192. – DOI: 10.1016/j.neucom.2022.08.030.
35. Jafari H., Malidareh B. F., Hosseini V. R. Collocation discrete least squares meshless method for solving nonlinear multi-term time fractional differential equations // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2024. – Vol. 158. – P. 107–120. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.10.014.
36. Time-dependent fractional advection–diffusion equations by an implicit MLS meshless method / P. Zhuang, Y. Gu, F. Liu, I. Turner, P. K. D. V. Yarlagadda // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2011. – Vol. 88 (13). – P. 1346–1362. – DOI: 10.1002/nme.3223.
37. Hosseini V. R., Chen W., Avazzadeh Z. Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2014. – Vol. 38. – P. 31–39. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2013.10.009.
38. Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A. An implicit RBF meshless approach for solving the time fractional nonlinear sine-Gordon and Klein–Gordon equations // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2015. – Vol. 50. – P. 412–434. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.09.008.
39. Chen W., Fu Z.-J, Chen C. S. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. – Berlin; Heidelberg : Springer, 2013. – 90 p. – DOI:10.1007/978-3-642-39572-7.
40. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 259 p. – DOI: 10.1017/CBO9780511543241.
41. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica*. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: 10.1017/S0962492914000130.