

Received: 07.04.2022

Revised: 11.05.2022



Accepted: 24.06.2022



DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060

UNIDIRECTIONAL STEADY-STATE INHOMOGENEOUS COUETTE FLOW WITH A QUADRATIC VELOCITY PROFILE ALONG A HORIZONTAL COORDINATE

L. S. Goruleva^{a)} and E. Yu. Prosviryakov^{b), *}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  sherlarisa@yandex.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper presents an exact solution to the boundary value problem describing the steady-state unidirectional flow of a viscous incompressible fluid. The fluid moves in an infinite horizontal strip (infinite fluid layer). The fulfillment of the no-slip condition is postulated at the lower boundary of the viscous fluid layer. At the upper boundary, which is assumed to be rigid, non-uniform velocity distribution is specified. The deformation of the free boundary is neglected due to the use of the rigid-lid boundary condition. The exact solution to the equations of the hydrodynamics of incompressible fluids automatically satisfies the continuity equation (the incompressibility equation). The velocity function is harmonic in this case. The simplest exact solution satisfying the Laplace equation is constructed, which takes into account the features of the velocity field along the transverse (vertical) coordinate and one of the longitudinal (horizontal) coordinates. The paper analyzes the topological properties of the velocity field, the tangential stress field, the vorticity vector, specific kinetic energy, and specific helicity.

Keywords: Couette flow, inhomogeneous flow, exact solution, counterflows, shear stresses, specific kinetic energy, specific helicity.

References

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
2. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu, Burmasheva N.V., and Christianto Victor. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, No. 4, 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
3. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, No. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 2006, 196 p.
5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Boca Raton, Chapman & Hall / CRC Press Publ., 2004, 840 p.
6. Whitham G.B. *The Navier–Stokes equations of motion*, ed. L. Rosenhead, Oxford, Clarendon. *Laminar Boundary Layers Publ.*, 1963, pp. 114–162.
7. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 159–177. DOI: 10.1146/ANNUREV.FL.23.010191.001111.

8. Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.* 1989, vol. 42, pp. 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
9. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier-Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, No. 1, pp. 6–76. (In Russian).
10. Taylor G.I. Stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders. *J. Phil. Trans. Royal Society A.*, 1923, vol. 223, No. 605–615, pp. 289–343. DOI: 10.1098/RSTA.1923.0008.
11. Zhilenko D.Y., Krivonosova O.E. Transitions to chaos in the spherical Couette flow due to periodic variations in the rotation velocity of one of the boundaries. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, No. 4, pp. 452–460. DOI: 10.1134/S0015462813040042.
12. Zhilenko D., Krivonosova O., Gritsevich M. Wave number selection in the presence of noise: Experimental results. *Chaos*, 2018, vol. 28, 053110. DOI: 10.1063/1.5011349.
13. Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P. Couette problem for Kelvin-Voigt medium. *Vestnik NGU. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2010, vol. 10, No. 3, pp. 94–109. (In Russian).
14. Zhuk V.I., Protsenko I.G. Asymptotic model for the evolution of perturbations in the plane Couette-Poiseuille flow. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, No. 3, pp. 896–900. DOI: 10.1134/S1064562406060287.
15. Gavrilenko S.L., Shil'ko S.V., Vasin R.A. Characteristics of a viscoplastic material in the Couette flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, No. 3, pp. 439–444. DOI: 10.1023/A:1015378622918.
16. Shalybkov D.A. Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow. *Physics-Uspekhi*, 2009, vol. 52, No. 9, pp. 915–935. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971.
17. Babkin V.A. Plane turbulent Couette flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2003, vol. 76, No. 6, pp. 1251–1254. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.C6.
18. Abramyan A.K., Mirantsev L.V., Kuchmin A.Yu. Modeling of processes at Couette simple fluid flow in flat nano-scopic canal. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2012, vol. 24, No. 4, pp. 3–21. (In Russian).
19. Belyayeva N.A., Kuznetsov K.P. Analysis of a nonlinear dynamic model of the Couette flow for structured liquid in a flat gap. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2012, No. 2 (27), pp. 85–92. (In Russian).
20. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, No. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
21. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, vol. 10, No. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
22. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 57–70. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. (In Russian).
23. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
24. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, No. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
25. Prosviryakov E.Yu. Exact solutions of three-dimensional potential and vortical Couette flows of a viscous incompressible fluid. *Bulletin of the National Research Nuclear University MIFI*, 2015, vol. 4, No. 6, pp. 501–506. DOI: 10.1134/S2304487X15060127. (In Russian).
26. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2019, vol. 15, No. 3, pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306. (In Russian).

27. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 5, pp. 581–587. DOI: 10.7868/S0568528116050030. (In Russian).
28. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).
29. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, No. 3, pp. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
30. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions of the Navier–stokes Equations for Describing an Isobaric One-Directional Vertical Vortex Flow of a Fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, iss. 2, pp. 30–51. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2021_Burmasheva_N.V._et_al._030_051.pdf (accessed 04.05.2022).
31. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow, IPMekh RAN Publ., 2020, 384 p. (In Russian).
32. Polyanin A.D. Exact generalized separable solutions of the Navier-Stokes equations. *Doklady RAN*, 2001, vol. 380, No. 4, pp. 491–496. (In Russian).
33. Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics. *Matematicheskoe Modelirovanie i Chislennye Metody*, 2019, No. 1, pp. 65–97. DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597. (In Russian).
34. Polyanin A.D., Aristov S.N. Systems of hydrodynamic type equations: exact solutions, transformations, and nonlinear stability. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, No. 9, pp. 429–434. DOI: 10.1134/S1028335809090079.
35. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional separable solutions of two classes of nonlinear mathematical physics equations. *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, No. 3, pp. 321–324. DOI: 10.1134/s1064562419030128.
36. Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations. *Russian J. Math. Physics*, 2010, vol. 17, No. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1134/S1061920810010012.
37. Meleshko S.V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, No. 1, pp. 47–68. DOI: 10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73.

Подана в журнал: 07.04.2022



УДК 517.958



DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060

ОДНОНАПРАВЛЕННОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕОДНОРОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ ТИПА КУЭТТА С КВАДРАТИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ КООРДИНАТЕ

Л. С. Горюлева^{а)}, Е. Ю. Просвирыков^{б)}, *

*Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0001-8635-5213>  sherlarisa@yandex.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

В статье приведено точное решение краевой задачи, описывающей установившееся однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости. Жидкость движется в бесконечной горизонтальной полосе (бесконечном слое жидкости). На нижней границе слоя вязкой жидкости постулируется выполнение условия прилипания. На верхней границе, которая полагается недеформируемой, задано неоднородное распределение скорости. Пренебрежение деформацией свободной границы обусловлено использованием граничного условия типа твердой крышки. Приведенное в статье точное решение уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности (уравнению несжимаемости). В этом случае функция скорости является гармонической. Построено простейшее точное решение, удовлетворяющее уравнению Лапласа, которое учитывает особенности поля скоростей по поперечной (вертикальной) координате и по продольной (горизонтальной) координате. В статье проанализированы топологические свойства поля скорости, поля касательных напряжений, вектора завихренности, удельная кинетическая энергия и удельная спиральность.

Ключевые слова: течение Куэтта, неоднородное течение, точное решение, противотечения, касательные напряжения, удельная кинетическая энергия, удельная спиральность.

1. Введение

Точное решение Куэтта $\mathbf{V} = (V_x(z, t); 0; 0)$ описывает изобарические однонаправленное слоистое и сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя недеформируемыми бесконечными пластинами [1–9]. Линейный профиль поля скорости Куэтта

$$\mathbf{V} = (U(z); 0; 0),$$

точно удовлетворяющий уравнению Орра–Зоммерфельда, является наиболее частым фоновым течением, исследуемым на гидродинамическую устойчивость для различных классов возмущений [2, 4, 6–19].

Недавно были опубликованы статьи, в которых анонсировались обобщения плоского течения Куэтта [20–28]. В работах [20–28] были получены точные решения типа Куэтта для двумерного поля скоростей, зависящего от трех координат и времени:

$$\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t); V_y(x, y, z, t); 0) = \\ = (U_0(z, t) + U_1(z, t)x + U_2(z, t)y; V_0(z, t) + V_1(z, t)x + V_2(z, t)y; 0).$$

Такие точные решения описывают неоднородное течение Куэтта [20–28]. Рассмотрены модификации полученных в [20–28] семейств точных решений размерности (2+1) на трехмерные движения вязкой несжимаемой жидкости [24, 28, 29].

Характерная особенность точных решений, анонсированных в [20–28], заключается в рассмотрении нелинейных эффектов при задании граничных возмущений для неоднородного поля скоростей. В статьях [20–28] были предложены математические модели, объясняющие экваториальные противотечения мирового океана и позволяющие учесть усиление скоростей и колебаний крупномасштабных волновых движений, но исследование устойчивости такого класса течений к настоящему времени не проведено.

Гидродинамическая устойчивость неоднородных течений Куэтта не изучалась, поскольку для таких фоновых течений нельзя применять метод нормальных мод, который традиционно используется в гидродинамической устойчивости. Таким образом, чтобы исследовать двумерные и трехмерные неоднородные течения Куэтта, нужно исследовать точные решения одномерного по скоростям (однонаправленного) движения жидкости, индуцированного распределением скорости, зависящей от горизонтальной (продольной) координаты по степенному закону. Этот подход был впервые описан в статье [30], где приводится точное решение

$$\mathbf{V} = (V_x(y, z, t); 0; 0) = \left(\sum_{k=0}^n U_k(z, t) \frac{y^k}{k!}; 0; 0 \right)$$

для описания нестационарного течения одномерного по скорости, но двумерного по координатам.

В статье проводится исследование простейшей краевой задачи, описывающей установившееся неоднородное течение с квадратичным профилем движения

$$\mathbf{V} = (V_x(y, z); 0; 0) = \left(U_0(z) + U_1(z)y + U_2(z) \frac{y^2}{2}; 0; 0 \right)$$

верхней границы бесконечного горизонтального слоя жидкости. Подробно изучено полиномиальное поле скоростей, распределение касательных напряжений и компонент вектора завихренности. Показано, что все гидродинамические поля стратифицируются как по вертикальной, так и по горизонтальной координатам.

2. Постановка задачи

Установившееся однонаправленное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой, состоящей из уравнения Навье–Стокса и уравнения непрерывности (уравнения несжимаемости) [30]:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = \nu \Delta V_x; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь $V_x(x, y, z)$ – ненулевая компонента вектора скорости однонаправленного течения жидкости; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа.

Система уравнений (1) является переопределенной [30]. Для нахождения нетривиальных (ненулевых) точных решений системы (1) подставим соотношение $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$ в первое уравнение и учтем, что в силу уравнения неразрывности функция не зависит от продольной (горизонтальной) координаты x [30]. В этом случае система (1) трансформируется к двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, скорость $V_x = V_x(y, z)$ является гармонической функцией.

Движение жидкости происходит в бесконечно протяженном горизонтальном слое, который ограничен двумя плоскими границами (бесконечными абсолютно жесткими пластинами). Нижняя граница слоя $z = 0$ неподвижная. При движении жидкости будем считать выполненным условие прилипания:

$$V_x(y, 0) = 0. \quad (3)$$

Верхняя граница $z = h$ (h – толщина слоя жидкости) движется по закону:

$$V_x(y, h) = W + Ay + B \frac{y^2}{2}. \quad (4)$$

Скорость жидкости на верхней границе является параболическим профилем относительно координаты y , описывающим суперпозицию поступательного и вращательного движений. Как было показано в статьях [20–24, 26–28], задание краевого возмущения приводит к генерации вертикальной закрутки в жидкости и неоднородному распределению касательных напряжений.

3. Точное решение

Уравнение Лапласа (2) имеет так называемое фундаментальное решение [4]. В статье мы ограничимся исследованием полиномиального решения без добавки фундаментального решения. Точное решение системы (1) и, как следствие, линейного уравнения второго порядка эллиптического типа (2) находим в виде [30]:

$$V_x(x, z) = U_0(z) + U_1(z)y + U_2(z)\frac{y^2}{2}. \quad (5)$$

Точное решение (5) получено благодаря применению обобщения метода разделения переменных [2, 9, 24, 31–37]. Для определения неизвестных функций U_0 , U_1 и U_2 вычислим частные производные для скорости V_x , определяемые формулой (5):

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = U_2; \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = U_0'' + U_1''y + U_2'' \frac{y^2}{2}.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по вертикальной (поперечной) координате z .

Подставив полученные выражения в уравнение (2), получим многочлен относительно горизонтальной переменной:

$$U_2 + U_0'' + U_1''y + U_2'' \frac{y^2}{2} = 0.$$

Приравнявая выражения при одинаковых степенях y (метод неопределенных коэффициентов), получаем простейшую систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$U_1'' = 0; \quad U_2'' = 0; \quad U_2 + U_0'' = 0.$$

После последовательного интегрирования системы, получаем выражения для функций, описывающих поле скоростей (3):

$$U_1 = c_1z + c_2; \quad U_2 = c_3z + c_4;$$

$$U_0 = -\left(\frac{c_3}{6}z^3 + \frac{c_4}{2}z^2 + c_5z + c_6\right). \quad (6)$$

Формулы (6) иллюстрируют распределение фонового течения U_0 по кубическому закону, а пространственное ускорение U_1 и кривизна поля скоростей U_2 являются линейными функциями.

3.1. Краевая задача

Для определения постоянных интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6 , входящих в точное решение (6), запишем граничные условия (3) и (4) с учетом структуры поля скоростей (5):

$$U_0(0) = 0, \quad U_1(0) = 0, \quad U_2(0) = 0;$$

$$U_0(h) = W, \quad U_1(h) = A, \quad U_2(h) = B. \quad (7)$$

Учитывая граничные условия, получаем значения для постоянных интегрирования:

$$c_2 = 0, \quad c_4 = 0, \quad c_6 = 0;$$

$$c_1 = \frac{A}{h}, \quad c_3 = \frac{B}{h}, \quad c_5 = -\left(\frac{Bh}{6} + \frac{W}{h}\right).$$

Подставляя константы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6 , получим точное решение краевой задачи:

$$U_1 = \frac{A}{h}z, U_2 = \frac{B}{h}z, U_0 = -\frac{B}{6h}z^3 + \left(W + \frac{Bh^2}{6}\right)\frac{z}{h}.$$

Для анализа поля скоростей

$$V_x = \frac{z}{h} \left(-\frac{B}{6}z^2 + W + \frac{Bh^2}{6} + Ay + B\frac{y^2}{2} \right) \quad (8)$$

введем безразмерную координату $Z = \frac{z}{h}$. В этом случае скорость записывается следующим образом:

$$V_x = Z \left(-\frac{Bh^2}{6}Z^2 + W + \frac{Bh^2}{6} + Ay + B\frac{y^2}{2} \right).$$

Поскольку целью настоящей статьи является исследование скорости и других гидродинамических полей при ненулевом значении параметра B , то для дальнейшего исследования выражение для скоростей удобно представить как

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{Z}{B} \left(-Z^2h^2 + \frac{6W}{B} + h^2 + \frac{6A}{B}y + 3y^2 \right) = \frac{Z}{B} \left(-Z^2h^2 + 6w + h^2 + 6ay + 3y^2 \right) = \\ &= \frac{Z}{B} \left(-Z^2h^2 + 6w + h^2 - 3a^2 + 3(y+a)^2 \right) = \frac{Z}{B} \left(-Z^2h^2 + b + 3(y+a)^2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

При упрощении выражения для скорости введены следующие обозначения:

$$a = \frac{A}{B}, w = \frac{W}{B}, b = 6w + h^2 - 3a^2 = \frac{6W}{B} + h^2 - 3\left(\frac{A}{B}\right)^2,$$

которые понадобятся далее.

3.2. Анализ скорости и удельной кинетической энергии

Для исследования поля скорости (9) для начала положим $y = 0$. В этом случае течение жидкости характеризуется застойной точкой (точкой покоя), которая определяется уравнением

$$-Z^2h^2 + b + 3a^2 = 0.$$

Разрешая это уравнение, получим выражение для переменной Z , определяющей границу, относительно которой происходит движение встречных однонаправленных потоков фонового течения вязкой несжимаемой жидкости:

$$Z = \sqrt{\frac{b + 3a^2}{h^2}}.$$

Отметим, что противотечения в жидкости будут регистрироваться при выполнении двойного неравенства:

$$0 < \frac{b+3a^2}{h^2} < 1.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получим, что вертикальная (поперечная) стратификация фоновой скорости при установившемся течении жидкости регистрируется при выполнении неравенства:

$$-\frac{1}{6} < \frac{W}{Bh^2} < 0.$$

Таким образом, для существования встречных потоков параметры W и B должны быть разных знаков.

Учитывая неоднородность течения жидкости, получим уравнение застойной линии, существующей при движении жидкости:

$$-Z^2h^2 + b + 3(y+a)^2 = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что совокупность точек покоя при $b \neq 0$ принадлежит кривой второго порядка гиперболического типа:

$$\frac{Z^2h^2}{b} - \frac{3(y+a)^2}{b} = 1.$$

В том случае, если $b = 0$, то множеством застойных точек является пара пересекающихся прямых

$$3(y+a)^2 - Z^2h^2 = (\sqrt{3}(y+a) - Zh)(\sqrt{3}(y+a) + Zh) = 0.$$

Завершая исследование одномерного поля скоростей (9), заметим, что в потоке жидкости существует две застойные точки относительно вертикальной координаты Z , зависящие от значения горизонтальной координаты y .

Наличие двух застойных точек у скорости V равносильно тому, что удельная кинетическая энергия

$$E = \frac{\rho V_x^2}{2} = \frac{\rho Z^2}{2B^2} \left(-Z^2h^2 + \frac{6W}{B} + h^2 + \frac{6A}{B}y + 3y^2 \right)^2$$

немонотонно распределена относительно координат Z и y и может принимать не более двух нулевых значений внутри слоя жидкости, определяемых формулой (10).

3.3. Анализ касательного напряжения и завихренности

Напомним, что для классического установившегося течения Куэтта с линейным профилем

$$V_x = Az + B$$

касательное напряжение

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \eta A$$

является постоянным, т. е. в жидкости регистрируются только растягивающие или сжимающие напряжения. Знак касательного напряжения τ_{xz} зависит от величины параметра A , определяющего разность граничных скоростей [1–9].

Касательное напряжение для поля скоростей, определяемое формулами (9), записываем следующим образом:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \left(-\frac{Bz^2}{2} + W + \frac{Bh^2}{6} + Ay + \frac{By^2}{2} \right). \quad (11)$$

Касательное напряжение τ_{xz} может стратифицироваться по обеим координатам z и y . По координате z возможно расслоение только на две области, а по координате y – до трех зон. Приравняв нулю выражение для касательного напряжения τ_{xz} , получим уравнение для определения границ нейтральных линий гиперболического типа:

$$-\frac{Bz^2}{2} + W + \frac{Bh^2}{6} + Ay + \frac{By^2}{2} = 0.$$

Учитывая, что рассматривается неоднородное распределение скорости, ненулевое значение принимает еще одна компонента тензора вязких напряжений:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\eta z}{h} (A + By). \quad (12)$$

Стратификация сдвигового напряжения τ_{xy} возможна только по горизонтальной (продольной) координате и будет иметь место при

$$y = -\frac{A}{B}. \quad (13)$$

Покажем далее, что анализ завихренности эквивалентен исследованию поля касательных напряжений. Вектор завихренности Ω определяется символическим определителем:

$$\begin{aligned} \Omega = \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{1}{h} \left(-\frac{Bz^2}{2} + W + \frac{Bh^2}{6} + Ay + \frac{By^2}{2} \right) \right) \mathbf{j} - \left(\frac{z}{h} (A + By) \right) \mathbf{k} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\tau_{xz}}{\eta} \mathbf{j} - \frac{\tau_{xy}}{\eta} \mathbf{k}.$$

Здесь $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона, а символы $\nabla \times \mathbf{V}$ обозначают операцию ротора от вектор-функции.

Очевидно, что направление компоненты завихренности Ω_y может менять направление вихря, движущегося вдоль оси ординат, до двух раз, а вертикальная компонента Ω_z – однократно. Таким образом, течение вязкой несжимаемой жидкости всюду вихревое за исключением линии, определяемой равенством:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 = 0. \quad (14)$$

Подставив в равенство (14) формулы (11) и (12), получим громоздкое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\eta^2}{h^2} \left(\frac{B^2 z^4}{4} - BWz^2 - \frac{B^2 z^2 h^2}{6} - \frac{B^2 z^2 y^2}{2} + W^2 + \frac{BWh^2}{3} + 2WAy + BWy^2 + \frac{B^2 h^4}{36} + \right. \\ \left. + \frac{BAyh^2}{3} + \frac{B^2 h^2 y^2}{6} + A^2 y^2 + BAy^3 + \frac{B^2 y^4}{4} \right) + \frac{\eta^2 z^2}{h^2} (A^2 + AB y + B^2 y^2) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для его упрощения воспользуемся соотношением (13). После подстановки (13) в (15) получим равенство:

$$\left(-\frac{Bz^2}{2} + W + \frac{Bh^2}{6} - \frac{A^2}{2B} \right)^2 = 0.$$

Следовательно, в потоке вязкой несжимаемой жидкости существует единственная точка

$$z = \sqrt{\frac{2}{B} \left(W + \frac{Bh^2}{6} - \frac{A^2}{2B} \right)}, \quad y = -\frac{A}{B},$$

в которой движение является безвихревым при ограничениях на параметры краевой задачи

$$0 \leq \frac{1}{B} \left(W + \frac{Bh^2}{6} - \frac{A^2}{2B} \right) \leq \frac{h}{2}.$$

Последнее двойное неравенство обусловлено диапазоном изменения вертикальной (поперечной) координаты.

4. Заключение

В статье изучено простейшее точное решение, описывающее изотермическое неоднородное однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости. Точное решение уравнений Навье–Стокса получено в классе полиномов. Данное точное решение описывает вихревое движение, которое может локально вырождаться в потенциальное движение. Показано,

что учет пространственного ускорения влечет стратификацию поля скоростей с нетривиальной топологией. Исследование поля касательных напряжений показывает неоднородность их распределения, причем со сменой знака величины компонент тензора напряжений.

Литература

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
2. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / S. V Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53, No. 4. – 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
3. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyenin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, No. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Drazin P. G. and Riley N. The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
5. Polyenin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. – Boca Raton : Chapman & Hall / CRC Press, 2004. – 840 p.
6. Whitham G. B. The Navier-Stokes equations of motion / ed. L. Rosenhead. – Oxford : Clarendon Press, 1963. – P. 114–162.
7. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/ANNUREV.FL.23.010191.001111.
8. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations // Appl. Mech. Rev. – 1989. – Vol. 42. – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
9. Пухначёв В. В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
10. Taylor G. I. Stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders // J. Phil. Trans. Royal Society A. – 1923. – Vol. 223, No. 605–615. – P. 289–343. – DOI: 10.1098/RSTA.1923.0008.
11. Zhilenko D. Y., Krivonosova O. E. Transitions to chaos in the spherical Couette flow due to periodic variations in the rotation velocity of one of the boundaries // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48, No. 4. – P. 452–460. – DOI: 10.1134/S0015462813040042.
12. Wave number selection in the presence of noise: Experimental results / D. Zhilenko, O. Krivonosova, M. Gritsevich, P. Read // Chaos. – 2018. – Vol. 28. – 053110. – DOI: 10.1063/1.5011349.
13. Пухначев В. В., Пухначева Т. П. Задача Куэтта для среды Кельвина–Фойхта // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, № 3. – С. 94–109.
14. Жук В. И., Проценко И. Г. Асимптотическая модель эволюции возмущений в плоском течении Куэтта-Пуазейля // Докл. Академии наук. – 2006. – Т. 411, № 1. – С. 20–25.
15. Gavrilenko S. L., Shil'ko S. V., Vasin R. A. Characteristics of a viscoplastic material in the Couette flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2002. – Vol. 43, No. 3. – P. 439–444. – DOI: 10.1023/A:1015378622918.
16. Шалыбков Д. А. Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 9. – С. 971–993. – DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909d.0971.
17. Babkin V. A. Plane turbulent Couette flow // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2003. – Vol. 76, No. 6. – P. 1251–1254. – DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.C6.
18. Абрамян А. К., Миранцев Л. В., Кучмин А. Ю. Моделирование течения Куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 4. – С. 3–21.

19. Беляева Н. А., Кузнецов К. П. Анализ нелинейной динамической модели течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2012, – Т. 16, № 2. – С. 85–92. – DOI: 10.14498/vsgtu1018.
20. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2015. – Вып. 4. – С. 50–54.
21. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10, № 2. – С. 177–182.
22. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2019. – Iss. 2. – P. 57–70. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. URL: http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_249.html (accessed: 29.08.2022).
23. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Unsteady layered vortical fluid flows // *Fluid Dynamics*. – 2016. – Vol. 51, No. 2. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.
24. Зубарев Н. М., Просвирыков Е. Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 6 (358). – С. 65–71. – DOI: 10.15372/PMTF20190607.
25. Просвирыков Е. Ю. Точные решения трехмерных потенциальных и завихренных течений Куэтта вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. – 2015. – Т. 4, № 6. С. 501–506. – DOI: 10.1134/S2304487X15060127.
26. Privalova V., Prosviryakov E. Y., Simonov M. A. Nonlinear Gradient Flow of a Vertical Vortex Fluid in a Thin Layer // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2019. – Vol. 15, No. 3. – P. 271–283. – DOI: 10.20537/nd190306.
27. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Nonuniform convective Couette flow // *Fluid Dynamics*. – 2016. – Vol. 51, No. 5. – P. 581–587. – DOI: 10.7868/S0568528116050030.
28. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2020. – Vol. 32. – P. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
29. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
30. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. – 2021. – Vol. 25, No. 3. – P. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
31. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точные решения уравнений Навье–Стокса для описания изобарического однонаправленного вертикально завихренного течения жидкости // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2021_Burmasheva_N.V._et_al._030_051.pdf.
32. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : Изд-во «ИПМех РАН», 2020. – 384 с.
33. Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 491–496.
34. Полянин А. Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // *Мат. моделирование и численные методы*. – 2019. – № 1 (21). – С. 65–97. – DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597.
35. Полянин А. Д., Аристов С. Н. Системы уравнений гидродинамического типа: Точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 428, № 2, – С. 180–185.

36. Полянин А. Д., Журов А. И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 486, № 3. – С. 287–291. – DOI: 10.31857/S0869-56524863287-291.
37. Aristov S. N., Polyanin A. D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations // Russian J. Math. Physics. – 2010. – Vol. 17, No. 1. – P. 1–18. – DOI: 10.1134/S1061920810010012.
38. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // Nonlinear Dynamics. – 2004. – Vol. 36, No. 1. – P. 47–68. – DOI: 10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73.