

## COMPLEX STATIONARY CONVECTION WITH THIRD-KIND BOUNDARY CONDITIONS AT THE BOUNDARIES OF A FLUID LAYER

A. V. Gorshkov\*, E. Y. Prosviryakov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., Ekaterinburg, Russian Federation*

\*Corresponding author. E-mail: alex55gor@mail.ru; address for correspondence: 34 Komsomolskaya st., Ekaterinburg, Russian Federation. Tel.: +7 (343) 375-35-92; fax: 374-53-30

In this paper presents analytical solutions of the Oberbeck-Boussinesq system describing layered Benard-Marangoni convection flows in an incompressible viscous fluid. On the free surface a third-kind boundary condition is used, namely Newton's heat transfer law.

*Keywords: Benard-Marangoni convection, analytical solution, third-kind boundary conditions.*

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2016.2.034-047

### References

1. Thomson J. On certain curious motions observable on the surfaces of wine and other alcoholic liquors. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. X, fourth series. London, Taylor and Francis, Red Lion Court, Fleet Street, 1855, pp. 330–333.
2. Bénard H. *Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent*. Paris, Gauthier-Villars, 1901.
3. Bénard H. Etude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide. Régime permanent: tourbillons cellulaires. *J. Phys. Theor. Appl.*, 1900, vol. 9, no. 1, pp. 513–524.
4. Getling A.V. Formation of the spatial structures of Rayleigh-Benard convection. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1991, vol. 161, no. 9, pp. 1–80. (In Russian).
5. Landa P.S. *Avtokolebaniya v raspredelennykh sistemakh* [Self-Excited Vibrations in Distribution Systems]. M., Knizhnyi Dom Publ., 2010, pp. 320. (In Russian).
6. Marangoni C. Sull'espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. *Pavia: Tipografia dei fratelli Fusi*, 1865.
7. Birikh R.V. Thermocapillary convection on a horizontal fluid layer. *J. Appl. Mech. Technol. Phys.*, 1966, vol. 7, iss. 3, pp. 43–44. DOI: 10.1007/BF00914697.7.
8. Ostroumov G.A. *Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrenney zadachi* [Free Convection under Interior Problem Conditions]. M.; L., Gostekhteorizdat Publ., 1952, 256 p. (In Russian).
9. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. *Konvektivnaya ustoychivost neszhimaemoy zhidkosti* [Convective Stability of Incompressible Fluid]. M., Nauka Publ., 1972. (In Russian).
10. Napolitano L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids. *Acta Astronautica*, 1980, vol. 7, iss. 4–5, pp. 461–478. DOI: 10.1016/0094-5765(80)90036-3.
11. Sidorov A.F. On one class of solutions to equations of gas dynamics and natural convection. In: *Chislennyye i analiticheskiye metody resheniya zadach sploshnoi sredy* [Numerical and Analytical Methods of Solving Continuum Problems]. Sverdlovsk, UNTs AN SSSR Publ., 1981, pp. 101–117. (In Russian).
12. Sidorov A.F. Two classes of solution of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, iss. 2, pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.

13. Kirdyashkin A.G. *Teplovye gravitatsionnye techeniya i teploobmen v astenosfere* [Heat and Gravitational Flows and Heat Exchange in the Asthenosphere]. Novosibirsk, Nauka, SO RAN Publ., 1989, 81 p. (In Russian).
14. Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer. *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21, iss. 1 suppl., pp. 129–137. DOI: 10.1007/s12217-009-9108-x.
15. Andreev V.K. *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotorye ego obobshcheniya* [Birikh Solutions to Convection Equations and Some of its Extensions]. Krasnoyarsk, IBM SO RAN Publ., 2010, 68 p. (In Russian).
16. Ingel L.Kh., Kalashnik Maksim V. Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions. *Physics-Uspekhi*, vol. 55, no. 4, pp. 356–381. DOI: 10.3367/UFNe.0182.201204b.0379.
17. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, VyatGU Publ., 2011, 207 p. (In Russian).
18. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On layered flows of plane free convection. *Nelineynaya dinamika*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. (In Russian).
19. Shvarts K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal layer of incompressible fluid with solid boundaries. *Izvestiya RAN. MZhG*, 2014, no. 4, pp. 26–30. (In Russian).
20. Yudovich V.I. On the challenges and prospects of advanced mathematical hydrodynamics. *Uspekhi mekhaniki*, 2002, vol. 1, no. 1, pp. 61–102. (In Russian).
21. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Izd-vo PGU Publ., 2006, 154 p. (In Russian).
22. Aristov S.N., Shvarts K.G. Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
23. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (Review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, iss. 2, pp. 171–184. DOI: 10.1134/S0021894413020016.
24. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogs of the Birikha solution. *Izvestiya Altaiskogo gos. Universiteta*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69. (In Russian).
25. Nikitin N.V., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. Convective instabilities in the hydrodynamic model of crystal growth by the Chokhralsky method. *Uspekhi Mekhaniki*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 63–105. (In Russian).
26. Aristov S.N., Zimin V.D. *Advektivnye volny vo vrashchayushchemsya sharovom sloe* [Adequate Waves in a Rotating Spherical Layer]. IMMS, UNTs, AN SSSR Publ., Sverdlovsk, 1986, 50 p. (In Russian).
27. Aristov S.N., Frik P.G. *Dinamika krupnomasshtabnykh techeniy v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Dynamics of Large-Scale Flows in Thin Fluid Layers]. IMMS, UNTs, AN SSSR Publ., Sverdlovsk, 1987, 48 p. (In Russian).
28. Aristov S.N., Shvarts K.G. Convective heat exchange in a plane layer of incompressible fluid under localized heating. *Izvestiya RAN. MZhG*, 2013, no. 3, pp. 53–58. (In Russian).
29. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On one class of analytical solutions to stationary axisymmetric Benard-Marangoni convection of viscous incompressible fluid. *Vestnik Sam. gos. Un-ta. Ser. fiz.-mat. nauki*, 2013, no. 3 (32), pp. 110–118. (In Russian).
30. Aristov S.N., Knyazev D.V. Localized convective flows in a layer of nonuniformly heated fluid. *Izvestiya RAN. MZhG*, 2014, no. 5, pp. 5. (In Russian).
31. Aristov S.N., Frik P.G. Large-scale turbulence in a thin layer of nonisothermal rotating fluid. *Izvestiya RAN SSSR. MZhG*, 1988, no. 4, pp. 48–55. (In Russian).

32. Landau L.D. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. M., Nauka Publ., 2006, 736 p. (In Russian).
33. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
34. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions to Navier-Stokes equations with the linear dependence of the velocity components on two spatial variables. *Teoreticheskie osnovy khim. tekhnologii*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 547–566. (In Russian).
35. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of Matrices]. M., Nauka Publ., 1967, 576 p. (In Russian).

**Подана в журнал:** 30.03.2016  
**УДК** 539  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2016.2.034-047

## СТАЦИОНАРНАЯ СЛОЖНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА НА ГРАНИЦАХ СЛОЯ ЖИДКОСТИ

А. В. Горшков\*, Е. Ю. Просвиряков

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения  
 Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

\*Ответственный автор. Электронная почта: alex55gor@mail.ru; адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34,  
 Екатеринбург, Российская Федерация. Телефон: +7 (343) 375-35-92; факс: 374-53-30

В работе получены аналитические решения системы Обербека – Буссинеска, описывающие слоистые течения конвекции Бенара – Марангони в несжимаемой вязкой жидкости. На границах слоя жидкости используется граничное условие третьего рода – закон теплопередачи по Ньютону.

*Ключевые слова: конвекция Бенара – Марангони, аналитическое решение, граничные условия III рода.*

### 1. Введение

Изучение конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости является одной из наиболее распространенных задач в самых разных теоретических и прикладных научных дисциплинах. В последние десятилетия интерес к исследованию решений, описывающих естественную конвекцию, непрерывно возрастает. Это связано с тем, что конвекция является первым примером самоорганизации динамических систем, наблюдаемых экспериментально [1]. Первая именная структура самоорганизации также относится к конвекции – ячейки Бенара, представляющие собой шестиугольные призмы с подъемом жидкости в центре [2–4].

Уже в первых гидродинамических опытах [2–4] Бенаром было высказано предположение о том, что важную роль в возникновении конвекции играет не только сила тяжести, а термокапиллярный эффект Марангони [5]. Отметим, что исследование эффекта Марангони вносит ясность не только в термокапиллярную конвекцию, но и в концентрационную конвекцию и биоконвекцию [6].

При моделировании указанных выше процессов движения жидкости очень важно иметь определенный запас точных решений, потому что полное интегрирование уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска (система Обербека – Буссинеска) является до сих пор открытой проблемой. Первое точное решение, описывающее термокапиллярные движения вязкой несжимаемой жидкости, было предложено Бирихом [7]. Пионерским точным конвективным решением является течение Остроумова, обладающее вращательной симметрией [8]. Наиболее полный список точных конвективных движений можно изучить по работам [9–31] и библиографическим спискам к ним.

В работе предложено новое точное решение, описывающее стационарную термокапиллярную конвекцию при реализации на границах слоя жидкости теплообмена по закону Ньютона – Рихмана [9]. Исследование таких движений вязкой несжимаемой жидкости чрезвычайно важно для практических задач. Даже при проведении лабораторных экспериментальных исследований всегда трудно достичь теплоизолированной границы для замкнутых сосудов, а для термокапиллярных течений, наверное, невозможно.

Характерной особенностью полученного нового точного решения является одномерность скоростей по координатам, а поля температуры и давления трехмерны по координатам. Выбранные условия соответствуют теоретическим экспериментальным исследованиям по гидродинамике [9–31]. При устойчивом движении неизотермической жидкости одномерность скоростей практически достигается в прямоугольном слое, что не наблюдается для температуры и давления даже в самых простых случаях [9].

## 2. Постановка задачи

Общая система, описывающая стационарную конвекцию в несжимаемой жидкости, в приближении Обербека – Буссинеска имеет вид [9, 32]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x; \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y; \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z + g\beta T; \\ V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) используются стандартные обозначения:  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $V_x, V_y, V_z$  – компоненты вектора скорости жидкости.

Решения уравнений Обербека – Буссинеска вычислим для граничных условий, соответствующих конвективному движению Бенара – Марангони и теплообмену, определяемому условием Ньютона – Рихмана. В силу того, что рассматривается вязкая жидкость, то на нижней (недеформируемой) поверхности для скорости выполняются условия прилипания

$$V_x(x, y, 0) = 0; \quad V_y(x, y, 0) = 0; \quad V_z(x, y, 0) = 0. \quad (2)$$

На свободной поверхности, определяемой уравнением  $z = h$ , заданы условия термокапиллярной конвекции [9]:

$$\eta \frac{dU}{dn} \Big|_{z=h} = \sigma T(x, y, h), \quad (3)$$

где  $\sigma < 0$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения;  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости. Граничные условия (3) записаны в предположении о неформируемости свободной поверхности при движении жидкости и линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры [6, 7]:  $\alpha(T) = \alpha_0 + \sigma T$ .

На верхней границе  $z = h$  и на нижней поверхности  $z = 0$  заданы условия теплопередачи по закону Ньютона – Рихмана [7, 9, 29]:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{z=h} &= \alpha_1 (T_{C1}(x, y) - T(x, y, h)); \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{z=0} &= \alpha_2 (T_{C2}(x, y) - T(x, y, 0)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T_{C1}(x, y) = A_1x + B_1y$  – температура внешней среды;  $T_{C2}(x, y) = A_2x + B_2y$  – температура нижней поверхности;  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  – компоненты градиента температуры для свободной и недеформируемой границ соответственно;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплопередачи.

Нормированное давление к плотности жидкости на внешней, свободной, поверхности имеет вид:

$$P(x, y, h) = S = \frac{s}{\rho_0},$$

где  $s$  – атмосферное давление;  $\rho_0$  – плотность жидкости.

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1 Анализ разрешимости системы Обербека – Буссинеска для слоистой конвекции

Далее рассмотрим слоистую конвекцию. Для реализации слоистых течений должно выполняться условие  $V_z = 0$  [13–15, 18, 19]. Отметим, что в отличие от пионерской работы [7] здесь рассматривается не однонаправленный поток. Ниже будет показано, что при определенных условиях рассматриваемую краевую задачу нельзя свести к одномерной. При тождественном нулевом значении компоненты скорости  $V_z$  система уравнений (1) становится переопределенной. Таким образом, для описания сложной конвекции структура класс решения должна быть такой, чтобы появилось одно «лишнее» уравнение, гарантирующее разрешимость задачи. Стационарное решение ищем в виде [11, 12, 18, 19, 33, 34]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z), V_y = V(z), \\ T(x, y, z) &= T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z), \\ P(x, y, z) &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что плоскопараллельное движение переопределенной системы Обербека – Буссинеска в рамках класса (5) впервые было приведено в статье [18], где описаны аналитические выражения для различных типов граничных условий, которые используются при математическом моделировании адвективных потоков.

Подставив выражения (5) для гидродинамических полей в уравнения (1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую вид неизвестных функций (5), которые зависят от вертикальной координаты  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dz^2} &= 0, & \frac{d^2 T_2}{dz^2} &= 0; \\ \frac{dP_1}{dz} &= g\beta T_1, & \frac{dP_2}{dz} &= g\beta T_2; \\ v \frac{d^2 U}{dz^2} &= P_1, & v \frac{d^2 V}{dz^2} &= P_2; \\ \frac{d^2 T_0}{dz^2} &= \frac{1}{\chi}(UT_1 + VT_2), & \frac{dP_0}{dz} &= g\beta T_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения в системе (6) выписаны в том порядке, в котором будет осуществляться интегрирование. Краевые условия (2) – (4) в силу структуры выражений (5) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} U(0) &= 0; & V(0) &= 0; \\ \eta \frac{dU}{dz} \Big|_{z=h} &= \sigma T_1(h); & \eta \frac{dV}{dz} \Big|_{z=h} &= \sigma T_2(h) \end{aligned} \quad (7)$$

$$P_1(h) = 0; \quad P_2(h) = 0; \quad P_0(h) = S/\rho_0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\mathcal{G}_1(A_1 - T_1(0)); \quad \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mathcal{G}_2(B_1 - T_2(0)); \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \mathcal{G}_2(A_2 - T_1(h)); \quad \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=h} = \mathcal{G}_2(B_2 - T_2(h)); \quad T_0(x, y, h) = 0; \quad T_0(x, y, 0) = 0,$$

где  $\mathcal{G}_1 = \alpha_1/\lambda$ ,  $\mathcal{G}_2 = \alpha_2/\lambda$ .

Очевидно, что уравнение неразрывности, входящее в систему (1), при данном выборе представления решения выполняется тождественно.

### 3.2 Вычисление точного решения краевой задачи (6)–(8)

Решение для первых двух уравнений (6), определяющих функции  $T_1$  и  $T_2$ , записывается в виде линейных функций:

$$T_1 = a_1 z + b_1, \quad T_2 = a_2 z + b_2.$$

В результате вычислений получим коэффициенты решения, удовлетворяющие краевым условиям (8):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(A_2 - A_1)\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}; & b_1 &= \frac{A_1\mathcal{G}_1 + A_2\mathcal{G}_2 + A_1h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}; \\ a_2 &= \frac{(B_2 - B_1)\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}; & b_2 &= \frac{B_1\mathcal{G}_1 + B_2\mathcal{G}_2 + B_1h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + h\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, компоненты градиента температуры распределены по следующему закону:

$$T_1 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (A_2 - A_1)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} z + \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + h A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2}; \quad T_2 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (B_2 - B_1)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} z + \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + h B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2}.$$

Компоненты градиента приведенного давления имеют параболический профиль:

$$P_1 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (A_2 - A_1)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} \frac{(z^2 - h^2)}{2} + \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + h A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} (z - h);$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (B_2 - B_1)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} \frac{(z^2 - h^2)}{2} + \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + h B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2} (z - h).$$

Скорость при конвективном движении жидкости определяется многочленами, в общем случае имеющими четвертую степень:

$$U(z) = \frac{(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2 z^4 g \beta}{24(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} + \frac{z^3 g \beta (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} -$$

$$- z^2 h g \beta \frac{(A_2 - A_1) h \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} +$$

$$+ z \left[ h^2 g \beta \frac{2(A_2 - A_1) h \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta ((A_2 - A_1) h \vartheta_1 \vartheta_2 + (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 h \vartheta_1 \vartheta_2))}{\sigma (\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2)} \right];$$

$$V(z) = \frac{(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2 z^4 g \beta}{24(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} + \frac{z^3 g \beta (B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} -$$

$$- g \beta z^2 \frac{(B_2 - B_1) h^2 \vartheta_1 \vartheta_2 + 2h(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} +$$

$$+ z \left[ h^2 g \beta \frac{2(B_2 - B_1) h \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 h \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2) \nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta (B_2 - B_1) h \vartheta_1 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_2 h \vartheta_1 \vartheta_2}{\sigma (\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2)} \right].$$

Температура  $T_0$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 T_0 = & \chi \left\{ \frac{(a_1^2 + a_2^2)g\beta}{1008\nu} z^7 + \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)g\beta}{144\nu} z^6 + \right. \\
 & + z^5 \left( \frac{g\beta}{\nu} \frac{b_1^2 + b_2^2}{120} - h \frac{g\beta}{\nu} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{40} - h^2 \frac{g\beta}{\nu} \frac{a_1^2 + a_2^2}{80} \right) + \\
 & + z^4 \left[ h^3 \frac{g\beta}{\nu} \frac{a_1^2 + a_2^2}{36} + h^2 \frac{g\beta}{\nu} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{48} - h \left( \frac{\eta}{\sigma} \frac{a_1^2 + a_2^2}{12} + \frac{g\beta}{\nu} \frac{b_1^2 + b_2^2}{24} \right) - \frac{\eta}{\sigma} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{12} \right] + \\
 & + z^3 \left[ \frac{h^3 g\beta}{\nu} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{18} + \frac{h^2 g\beta}{\nu} \frac{b_1^2 + b_2^2}{12} - h \frac{\eta}{\sigma} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{6} - \frac{\eta}{\sigma} \frac{b_1^2 + b_2^2}{6} \right] + \\
 & + z \left[ -4I \frac{h^6 g\beta}{\nu} \frac{a_1^2 + a_2^2}{2520} - \frac{h^5 g\beta}{\nu} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{120} - \frac{h^4 g\beta}{\nu} \frac{b_1^2 + b_2^2}{6} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma}{\eta} \left( \frac{h^2}{6} (b_1^2 + b_2^2) + \frac{h^3}{4} (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \frac{h^4}{12} (a_1^2 + a_2^2) \right) \right].
 \end{aligned}$$

### 3.3 Альтернативный подход к решению краевой задачи (6)–(8)

Представим краевые условия на границах слоя жидкости как вектора градиента  $\vec{T}_{g1}$  и  $\vec{T}_{g2}$  температуры. В этом случае справедливы выражения:

$$A_1 = T_{g1} \cos \psi, \quad A_2 = T_{g2} \cos(\varphi + \psi);$$

$$B_1 = T_{g1} \sin \psi, \quad B_2 = T_{g2} \sin(\varphi + \psi).$$

Здесь  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{T}_{g1}$  и  $\vec{T}_{g2}$ ;  $\psi$  – угол между вектором  $\vec{T}_{g1}$  и осью  $ox$ . В силу того, что рассматриваемая среда изотропна, решение зависит только от угла  $\varphi$ .

В этом случае коэффициенты  $a_1, a_2, b_1, b_2$  примут вид:

$$a_1 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (T_{g2} \cos(\varphi + \psi) - T_{g1} \cos \psi)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2}; \quad b_1 = \frac{T_{g2} \vartheta_2 \cos(\varphi + \psi) + T_{g1} \vartheta_1 (1 + h \vartheta_2) \cos \psi}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2},$$

$$a_2 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (T_{g2} \sin(\varphi + \psi) - T_{g1} \sin \psi)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2}; \quad b_2 = \frac{T_{g2} \vartheta_2 \sin(\varphi + \psi) + T_{g1} \vartheta_1 (1 + h \vartheta_2) \sin \psi}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + h \vartheta_1 \vartheta_2}.$$

Здесь  $T_{g1}$  и  $T_{g2}$  соответственно модули векторов  $\vec{T}_{g1}$  и  $\vec{T}_{g2}$ .

При повороте векторов  $\vec{T}_{g1}$  и  $\vec{T}_{g2}$  на угол  $\psi$  соответственно повернется и вектор скорости  $(U(z), V(z))$ .

Вычислим касательные напряжения на твердой поверхности:

$$\tau_{zx} = \eta \frac{A_2 \vartheta_2 (6\eta\nu(1+h\vartheta_1) + gh^2\beta(3+2h\vartheta_1)\sigma) + A_1 \vartheta_1 (6\eta\nu + gh^2\beta\sigma(3+h\vartheta_2))}{6\nu\sigma(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h\vartheta_1\vartheta_2)};$$

$$\tau_{zy} = \eta \frac{B_2 \vartheta_2 (6\eta\nu(1+h\vartheta_1) + gh^2\beta(3+2h\vartheta_1)\sigma) + B_1 \vartheta_1 (6\eta\nu + gh^2\beta\sigma(3+h\vartheta_2))}{6\nu\sigma(\vartheta_1 + \vartheta_2 + h\vartheta_1\vartheta_2)}.$$

Если векторы градиента температуры на границах слоя коллинеарны  $(A_2, B_2) = \gamma(A_1, B_1)$ , то существует толщина слоя жидкости, при которой касательные напряжения на твердой поверхности одновременно обращаются в нуль.

Если учесть связь векторов градиентов, уравнения  $\tau_{zx} = 0$  и  $\tau_{zy} = 0$ , очевидно, совпадут, а следовательно, будут иметь одинаковые корни. Так как числители выражений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  представляют собой кубические многочлены относительно  $h$ , то один действительный корень всегда будет существовать. Для проверки условий его положительного значения можно использовать модификацию локализационных критериев проблемы Рауса – Гурвица [35].

При идеальном тепловом контакте на обеих границах условия  $\tau_{zx} = 0$  и  $\tau_{zy} = 0$  вырождаются к квадратным уравнениям с равным корнем:

$$h_2 = \sqrt{\frac{-6\eta\nu}{\beta g \sigma (1+2\gamma)}}.$$

Вычисленный корень принимает положительные значения при

$$\frac{-\gamma}{\sigma(1+2\gamma)} > 0.$$

Напомним, что справедливо неравенство  $\sigma < 0$ . Таким образом, одновременное обращение в нуль касательных напряжений возможно, если

$$\gamma \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

Векторы градиента температуры должны быть всегда сонаправлены или антинаправлены, но с определенным коэффициентом пропорциональности. Общего решения уравнений  $\tau_{zx} = 0$  и  $\tau_{zy} = 0$  при  $\gamma \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  не имеют.

В качестве примера проведены расчеты скоростей  $U$ ,  $V$  и температуры  $T_0$  для воды. Физические параметры взяты следующими:

$$\beta = 0,000210 \text{ 1/К}$$

$$\alpha_1 = 350 \text{ Вт/(м}^2\text{К)} \text{ коэффициент взят для пары сталь-вода}$$

$$\alpha_2 = 5,6 \text{ Вт/(м}^2\text{К)} \text{ коэффициент взят для пары вода-воздух}$$

$$\vartheta_1 = \alpha_1 h / \lambda = 583,333; \vartheta_2 = \alpha_2 h / \lambda = 9,33333$$

$$\lambda = 0,6 \text{ Вт/(м К)}; \chi = 0,14310^{-6} \text{ м}^2\text{/сек}$$

$$\eta = 0,001 \text{ Па сек}; \nu = 0,000001 \text{ м}^2\text{/сек}$$

$$g = 9,81 \text{ м/сек}^2$$

$$\sigma = -0,0727 \text{ н/м}^2.$$

При значении  $h = 1$  численно определено значение параметра  $\gamma = -0,659$ , при котором касательные напряжения на твердой поверхности обращаются в ноль.

Изменение скорости  $V$  по толщине в зависимости от параметра  $B_1$  при значении параметра  $\gamma = -0,659$  приведено на рис. 1.

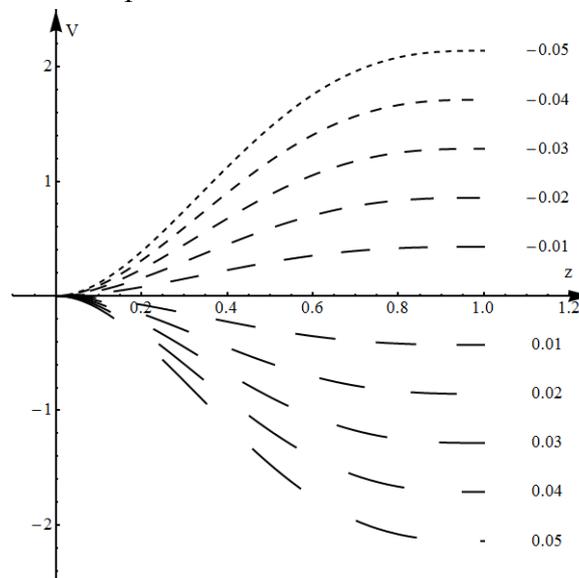


Рис. 1. Изменение скорости потока с глубиной при различных значениях параметра  $B_1$

Из рисунка видно, что график скорости при  $z = 0$  касается оси  $Oz$ , т.е. в точке  $z = 0$  касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  обращаются в ноль. Графики скорости  $U$  аналогичны приведенным для скорости  $V$ .

На рис. 2 представлено изменение скорости  $U$  по толщине слоя в зависимости от коэффициента  $\gamma$  при значении параметра  $A_1 = 0,3$ .

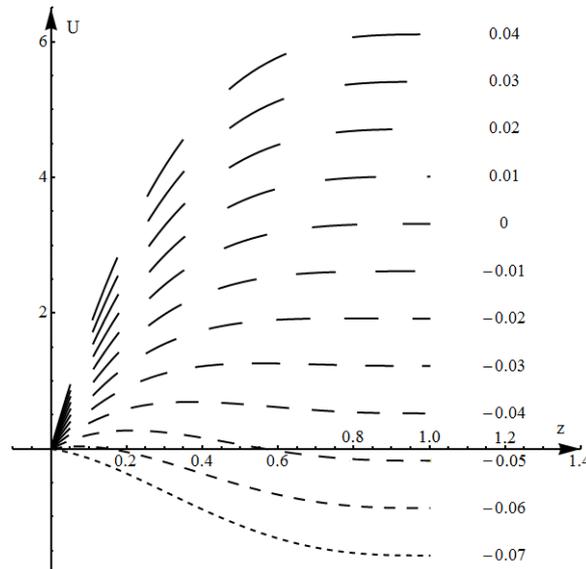


Рис. 2. Изменение скорости потока с глубиной при различных значениях параметра  $\gamma$

При значении  $\gamma = -0,05$  существует противоток. При значении  $\gamma > -0,05$  противоток пропадает, при  $\gamma < -0,05$  течение меняет направление.

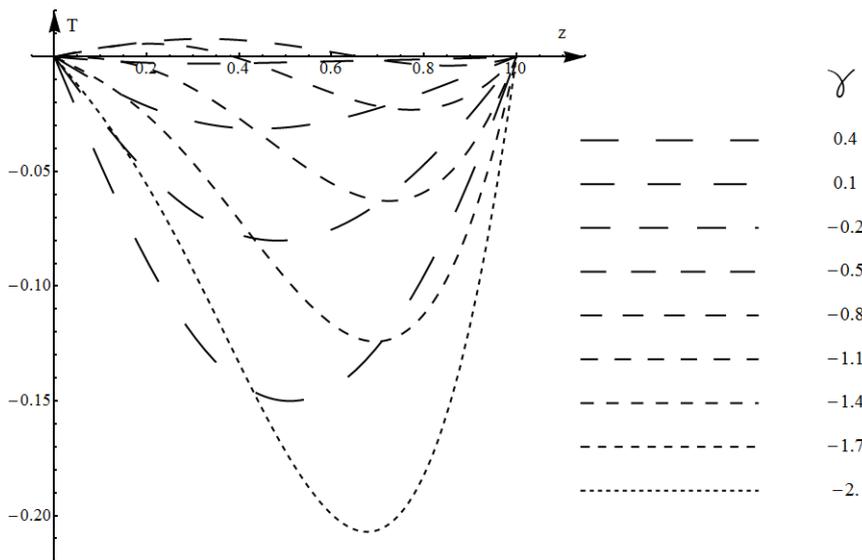


Рис. 3. Изменение температуры по глубине при различных значениях параметра  $\gamma$

На рис. 3 представлено изменение температуры по толщине в зависимости от параметра  $\gamma$ , при  $A_1 = -1; B_1 = 0,1$ . При больших и малых значениях  $\gamma$  температура меняется монотонно, при  $-0,8 < \gamma < -0,2$  температура знакопеременна.

#### 4. Заключение

В настоящей работе рассмотрены стационарные слоистые течения конвекции Бенара – Марангони вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые градиентом температуры на обеих границах. Получены решения для краевых условий третьего рода на границах потока жидкости – теплообмен по закону Ньютона. Показано, что при некоторых условиях найдется

толщина слоя жидкости, при которой касательные напряжения на твердой поверхности в направлении  $x$  и  $y$  одновременно обращаются в ноль.

### Благодарность

Работа выполнена по теме государственного задания, ГР № 01201354600.

### Литература

1. Thomson J. On certain curious motions observable on the surfaces of wine and other alcoholic liquors // *Philosophical Magazine*. – 1855. – Т. 10. – P. 330–333.
2. Bénard H. Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. – Paris : Gauthier-Villars, 1901.
3. Bénard H. Etude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide. Régime permanent: tourbillons cellulaires // *J. Phys. Theor. Appl.* – 1900. – Vol. 9, no. 1. – P. 513–524.
4. Гетлинг А. В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея-Бенара // *Успехи физических наук*. – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 1–80.
5. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. – М. : Книжный дом "Либроком". – 2010. – 320 с.
6. Marangoni C. Sull espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido // *Pavia : Tipografia dei fratelli Fusi*. – 1865.
7. Birikh R. V. Thermocapillary convection on a horizontal fluid layer // *J. Appl. Mech. Technol. Phys.* – 1966. – Vol. 7, iss. 3. – P. 43–44. – DOI: 10.1007/BF00914697.7.
8. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1952. – 256 с.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
10. Napolitano L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids // *Acta Astronautica*. – 1980. – Vol. 7, iss. 4–5. – P. 461–478. – DOI: 10.1016/0094-5765(80)90036-3.
11. Сидоров А. Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции. Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды. : сборник научных трудов УНЦ АН СССР. – Свердловск : УНЦ АН СССР, 1981. – С. 101–117.
12. Sidorov A. F. Two classes of solution of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 1989. – Vol. 30, iss. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
13. Кирдяшкин А. Г. Тепловые гравитационные течения и теплообмен в астеносфере. – Новосибирск : Наука, СО РАН, 1989. – 81 с.
14. Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer // *Microgravity Sci. Technol.* – 2009. – Vol. 21, iss. 1 suppl. – P. 129–137. DOI: 10.1007/s12217-009-9108-x.
15. Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Препринт № 1–10. – Красноярск : ИВМ СО РАН, 2010. – 68 с.
16. Ingel L. Kh., Kalashnik Maksim V. Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions // *Physics-Uspekhi*. – Vol. 55, no. 4. – P. 356–381. – DOI: 10.3367/UFNe.0182.201204b.0379.
17. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : ВятГУ, 2011. – 207 с.
18. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // *Нелинейная динамика*. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 651–657.

19. Шварц К. Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Изв. РАН. МЖГ. – 2014. – № 4. – С.26–30.
20. Юдович В. И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики. – 2002. – Т. 1, № 1. – С. 61–102.
21. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Изд-во ПГУ, 2006. – 154 с.
22. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57, no. 1. – P. 188–194. – DOI: 10.1134/S0021894416010211.
23. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review) // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2013. – Vol. 54, iss. 2. – P. 171–184. – DOI: 10.1134/S0021894413020016.
24. Пухначев В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2011. – № 1–2. – С. 62–69.
25. Никитин Н. В., Никитин С. А., Полежаев В. И. Конвективные неустойчивости в гидродинамической модели роста кристаллов методом Чохральского // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 4. – С. 63–105.
26. Аристов С. Н., Зимин В. Д. Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт № 145. – Свердловск : ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР, 1986. – 50 с.
27. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 146. – Свердловск : ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР, 1987. – 48 с.
28. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 2013. – № 3. – С. 53–58.
29. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118.
30. Аристов С. Н., Князев Д. В. Локализованные конвективные течения в слое неоднородно нагретой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 2014. – № 5. – С. 5–16.
31. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1988. – № 4. – С. 48–55.
32. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М. : Наука, 2006. – 736 с.
33. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.
34. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547–566.
35. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 576 с.